

VEREIN  
DEUTSCHER  
INGENIEURE

Entwicklung von Bauteilen  
aus Faser-Kunststoff-Verbund  
Berechnungen  
Development of FRP components  
(fibre reinforced plastics)  
Analysis

VDI 2014

Blatt 3 / Part 3

Ausg. deutsch/englisch  
Issue German/English

*Die deutsche Version dieser Richtlinie ist verbindlich.*

*No guarantee can be given with respect to the English translation. The German version of this guideline shall be taken as authoritative.*

Inhalt	Seite	Contents	Page
Vorbemerkung . . . . .	3	Preliminary note . . . . .	3
<b>1 Anwendungsbereich . . . . .</b>	<b>4</b>	<b>1 Scope . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>2 Abkürzungen, Begriffe, Symbole, Indizierung . . . . .</b>	<b>5</b>	<b>2 Abbreviations, terminology, symbols, superscripts and subscripts . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>3 Berechnungsablauf . . . . .</b>	<b>14</b>	<b>3 Analytical procedure . . . . .</b>	<b>14</b>
3.1 Allgemeines . . . . .	14	3.1 General comments . . . . .	14
3.2 Auslegungsphilosophie . . . . .	16	3.2 Design philosophy . . . . .	16
3.3 Berechnungsprogramme . . . . .	17	3.3 Computer programs . . . . .	17
<b>4 Modellierung der Schicht . . . . .</b>	<b>18</b>	<b>4 Modelling the lamina . . . . .</b>	<b>18</b>
4.1 Allgemeines . . . . .	18	4.1 General comments . . . . .	18
4.2 Eben beanspruchte Schicht . . . . .	20	4.2 Two-dimensionally loaded lamina . . . . .	20
4.2.1 UD-Schicht (faserparalleles KOS) . . . . .	20	4.2.1 UD lamina (parallel-to-fibre COS) . . . . .	20
4.2.2 G-Schicht und M-Schicht . . . . .	22	4.2.2 WF lamina and M lamina . . . . .	22
4.2.3 Drehung der UD-Schicht in das Laminat-KOS . . . . .	23	4.2.3 Rotation of the UD lamina into the laminate COS . . . . .	23
4.2.4 Berücksichtigung der Schubspannungen aus Querkraft bei UD-Schichten . . . . .	24	4.2.4 Inclusion of shear stresses from transverse forces in case of UD laminae . . . . .	24
4.3 Räumlich beanspruchte Schichten . . . . .	25	4.3 Laminae subject to three-dimensional loading . . . . .	25
4.3.1 Mechanische Beanspruchung (faserparalleles KOS) . . . . .	25	4.3.1 Mechanical loading (parallel-to-fibre COS) . . . . .	25
4.3.2 Mechanische Beanspruchung einer UD-Schicht (gedrehtes KOS) . . . . .	27	4.3.2 Mechanical loading of a UD lamina (rotated COS) . . . . .	27
4.4 Einfluss von Beanspruchungsarten/-dauer . . . . .	28	4.4 Influence of loading type and duration . . . . .	28
4.4.1 Kurzzeitbeanspruchung . . . . .	28	4.4.1 Short-term load . . . . .	28
4.4.2 Ruhende Langzeitbeanspruchung . . . . .	28	4.4.2 Long-term static load . . . . .	28
4.4.3 Schwingbeanspruchung . . . . .	32	4.4.3 Cyclic load . . . . .	32
4.4.4 Stoßbeanspruchung . . . . .	33	4.4.4 Impact load . . . . .	33
4.5 Festigkeitskriterien . . . . .	33	4.5 Strength criteria . . . . .	33
4.5.1 Allgemeines . . . . .	34	4.5.1 General comments . . . . .	34
4.5.2 Bruchbedingungen für UD-Schichten . . . . .	38	4.5.2 Fracture conditions for UD lamina . . . . .	38
4.5.3 G-Schicht . . . . .	46	4.5.3 WF lamina . . . . .	46
4.5.4 M-Schicht . . . . .	47	4.5.4 M lamina . . . . .	47
4.5.5 Einzusetzende Festigkeitswerte . . . . .	48	4.5.5 Strength values to be used . . . . .	48

VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik

VDI-Handbuch Kunststofftechnik  
VDI-Handbuch Konstruktion

	Seite		Page
4.6 Anwendung von Berechnungsprogrammen . . . . .	48	4.6 Application of calculation programs . . . . .	48
4.6.1 UD-Schicht . . . . .	48	4.6.1 UD lamina . . . . .	48
4.6.2 G-Schicht . . . . .	50	4.6.2 WF lamina . . . . .	50
<b>5 Modellierung des Laminates . . . . .</b>	<b>50</b>	<b>5 Modelling the laminate . . . . .</b>	<b>50</b>
5.1 Ermittlung von Spannungen und Verzerrungen . . . . .	51	5.1 Determining stresses and strains. . . . .	51
5.1.1 Netztheorie. . . . .	51	5.1.1 Netting theory . . . . .	51
5.1.2 Klassische Laminattheorie (CLT) . . . . .	57	5.1.2 Classical laminate theory (CLT) . . . . .	57
5.1.3 Interlaminare Spannungen (ILS) . . . . .	63	5.1.3 Interlaminar stresses (ILS) . . . . .	63
5.1.4 Berücksichtigung der Verzerrung aus Schubspannungen durch Querkraft. . . . .	70	5.1.4 Taking into account the strains arising from shear stresses due to transverse forces. . . . .	70
5.1.5 Behandlung von Kerben. . . . .	71	5.1.5 Treatment of notches . . . . .	71
5.2 Schichtenweise Bruchanalyse . . . . .	74	5.2 Lamina-by-lamina fracture analysis . . . . .	74
5.2.1 Grundsätzliche Betrachtungen . . . . .	74	5.2.1 Fundamental aspects . . . . .	74
5.2.2 Nichtlineare Spannungsanalyse vor dem ZFB. . . . .	75	5.2.2 Non-linear stress analysis before IFF. . . . .	75
5.2.3 Kontinuierliche Modulabminderung (Degradation) nach dem ZFB . . . . .	79	5.2.3 Continuous modulus reduction (degradation) after IFF . . . . .	79
5.2.4 Auswirkung von FB . . . . .	83	5.2.4 Effect of FF. . . . .	83
5.2.5 Vereinfachungen und selektive Nachprüfung. . . . .	83	5.2.5 Simplification and selective reviews . . . . .	83
5.2.6 Maßnahmen zur zielgerichteten Verbesserung von Laminaten . . . . .	84	5.2.6 Making specific improvements of laminates. . . . .	84
5.3 Anwendung der schichtenweisen Bruchanalyse für verschiedene Beanspruchungsarten . . . . .	85	5.3 Application of lamina-by-lamina fracture analysis for different types of loading . . . . .	85
5.3.1 Kurzzeitbeanspruchung . . . . .	85	5.3.1 Short term loading . . . . .	85
5.3.2 Langzeitbeanspruchung . . . . .	85	5.3.2 Long term loading . . . . .	85
5.4 Schwingbeanspruchte Laminare . . . . .	91	5.4 Cyclically loaded laminates . . . . .	91
5.4.1 Schädigungsvorgänge . . . . .	91	5.4.1 Fracture processes . . . . .	91
5.4.2 Darstellung von Schwingfestigkeitsergebnissen. . . . .	94	5.4.2 Presentation of fatigue strength results . . . . .	94
5.4.3 Bauteilbelastungsgeschichte. . . . .	98	5.4.3 Component loading history . . . . .	98
5.4.4 Methoden der Schwingfestigkeitsanalyse . . . . .	99	5.4.4 Methods of fatigue strength analysis . . . . .	99
5.4.5 Auslegungshinweise. . . . .	101	5.4.5 Advices for design . . . . .	101
5.5 Anwendung von Berechnungsprogrammen. . . . .	102	5.5 Application of calculation programs . . . . .	102
5.5.1 Laminat-Analyseprogramme . . . . .	100	5.5.1 Laminate analysis programs . . . . .	100
5.5.2 FEM . . . . .	103	5.5.2 FEM. . . . .	103
5.5.3 Berechnung des Streckungsfaktors $f_S^L$ der lastbedingten Spannungen bei gleichzeitig vorhandenen Eigenspannungen. . . . .	104	5.5.3 Calculation of the stretch factor $f_S^L$ of the load-determined stresses when residual stresses are also present . . . . .	104
<b>6 Bauteilberechnung . . . . .</b>	<b>107</b>	<b>6 Analysis of FRP components . . . . .</b>	<b>107</b>
6.1 Allgemeines . . . . .	107	6.1 General comments . . . . .	107
6.2 Stabilitätsberechnungen. . . . .	109	6.2 Stability analyses. . . . .	109
6.2.1 Knicken von Stäben . . . . .	111	6.2.1 Buckling of struts. . . . .	111
6.2.2 Beulung ebener Platten . . . . .	112	6.2.2 Buckling of flat plates . . . . .	112
6.2.3 Beulung zylindrisch gekrümmter Flächenträger . . . . .	115	6.2.3 Buckling of cylindrically curved plates and shells . . . . .	115
6.2.4 Anmerkungen . . . . .	122	6.2.4 Comments . . . . .	122
6.2.5 Berechnungen mit FEM . . . . .	124	6.2.5 Finite element analyses. . . . .	124

	Seite
6.3 Verbindungen und Krafteinleitungen . . . . .	124
6.3.1 Klebverbindungen . . . . .	125
6.3.2 Bolzenverbindungen . . . . .	130
6.3.3 Schlaufenanschlüsse . . . . .	131
Schrifttum . . . . .	133
<b>Anhang</b> . . . . .	<b>136</b>
<b>A1</b> Berücksichtigung von nicht auf der Bruchebene wirkenden Spannungen in den wirkebenebezogenen Zwischenfaserbruch-Kriterien nach Abschnitt 4.5 . . . . .	134
<b>A2</b> Berechnung des Streckungsfaktors $f_s^L$ der lastbedingten Spannungen bei gleichzeitig vorhandenen Eigen- spannungen . . . . .	146
<b>A3</b> Benutzen des in einem Rechenprogramm implementierten Tsai/Wu-Kriteriums zur Erlangung von ZFB- und FB-Ergebnissen nach <i>Puck/Knaust</i> . . . . .	156

	Page
6.3 Joints . . . . .	124
6.3.1 Bonded joints . . . . .	125
6.3.2 Mechanically fastened joints . . . . .	130
6.3.3 Loop joints . . . . .	131
Bibliography . . . . .	133
<b>Annex</b> . . . . .	<b>136</b>
<b>A1</b> Inclusion of stresses not acting on the fracture plane in the action-plane-related inter-fibre fracture criteria described in Section 4.5 . . . . .	134
<b>A2</b> Calculation of the stretch factor $f_s^L$ of the load-determined stresses when residual stresses are also present . . . . .	146
<b>A3</b> Using the Tsai/Wu criterion implemented in a computer program in order to obtain IFF and FF results according to the <i>Puck/Knaust</i> criterion . . . . .	156

**Vorbemerkung**

Die Richtlinie VDI 2014 enthält Empfehlungen für das Entwickeln von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden (FKV), die aus einzelnen faserverstärkten Schichten bestehen, bei denen Fasern in einer Kunststoff-Matrix eingebettet sind. Auch wenn auf Grund des vorliegenden Erfahrungsschatzes die Gruppe der betrachteten Matrixwerkstoffe dabei auf die „klassischen“ duromeren Kunststoffe wie Epoxid-, Vinylester- und Polyesterharze beschränkt ist, können die vorgestellten Berechnungsmodelle auch auf FKV mit thermoplastischer Matrix angewandt werden, solange das grundsätzliche Werkstoffverhalten vergleichbar bleibt. (Abweichungen des Werkstoffverhaltens sind vor allem beim Bruchgeschehen zu erwarten, weil insbesondere bei geringeren Faservolumenanteilen oder höheren Temperaturen kein ausgeprägtes Spröbruchverhalten zu erwarten ist).

Die Richtlinie will durch Systematisieren und Vereinheitlichen der Bauteilauslegung und -dimensionierung auch die Zulassungsverfahren und die Qualitätssicherung erleichtern. Sie ist in drei Teile gegliedert:

- Blatt 1 Grundlagen
- Blatt 2 Konzeption und Gestaltung
- Blatt 3 Berechnungen**

**Preliminary note**

Guideline VDI 2014 includes recommendations for the design of components made of fibre-reinforced plastics (FRP) which consist of individual fibre-reinforced laminae in which fibres are embedded in a plastic matrix. Even when, due to the fund of experience available, the group of matrix materials coming here into consideration, is restricted to the “classic” thermoset plastics such as epoxy, vinylester and polyester resins, the calculation models presented can also be applied to fibre-reinforced plastics with a thermoplastic matrix provided the basic behaviour of the material remains comparable. (Differences in material behaviour are to be expected above all in fracture behavior, since it is particularly with lower fibre volume contents or higher temperatures that no marked brittle-fracture behaviour would be expected).

By systemizing and standardizing component design and dimensioning, this guideline seeks to make approval procedures and quality assurance easier as well. It is subdivided into three parts:

- Part 1 Basics
- Part 2 Concept and design
- Part 3 Analysis**

## 1 Anwendungsbereich

VDI 2014 Blatt 3 zeigt den Stand der Technik der Berechnungsmethoden zur Entwicklung von FKV-Bauteilen auf. Das Grundprinzip dabei ist, dass das Verhalten des Laminates (Abschnitt 5) auf die Eigenschaften seiner Schichten (Abschnitt 4) zurückgeführt wird. Die Auslegung und das Dimensionieren eines Laminates umfasst die beanspruchungsgerechte Konstruktion des Laminates (Faserrichtungen, Schichtanzahl, Schichtfolge) und die Bestimmung der notwendigen Laminatdicke, zusammengesetzt aus den Dicken der einzelnen Schichten. Die Richtlinie basiert weitgehend auf bereits in der Praxis erprobten und anerkannten Methoden. Dies gilt für VDI 2014 Blatt 3 hinsichtlich der Methoden der Verformungs- und Spannungsberechnung (Abschnitt 4.1 bis Abschnitt 4.3 und Abschnitt 5.1). Für die Festigkeitsberechnung (Abschnitt 4.5 und Abschnitt 5.2) musste dieses Prinzip verlassen werden, da das übliche Vorgehen zumindest in einigen Industriezweigen zu groben Fehleinschätzungen führen kann. Es sind hierzu zum Teil neue Methoden aufgenommen worden, die aber die Erkenntnisse langjähriger Entwicklungspraxis widerspiegeln.

Die in VDI 2014 Blatt 1 und Blatt 2 eingeführten Schichttypen P-ES, G-ES und W-ES werden beibehalten. Deren Bezeichnung musste aber auf Grund der englischen Übersetzung von Blatt 3 in UD-Schicht, G-Schicht und M-Schicht geändert werden. Dabei hat die UD-Schicht für die Entwicklung hochleistungsfähiger Bauteile auf Grund ihrer gestreckten Faseranordnung herausragende Bedeutung. Daher steht die UD-Schicht im Vordergrund der Berechnungsmethoden.

Bei der rechnerischen Dimensionierung von Laminaten und FKV-Bauteilen verbleiben noch Unsicherheiten, z.B. bezüglich der Schwingfestigkeit (Abschnitt 5.4). Hier kann nicht der richtige, sondern nur der zurzeit bestmögliche Weg aufgezeigt werden.

Die hier vorliegende Richtlinie VDI 2014 Blatt 3 befasst sich vorrangig mit der Darstellung der Berechnungsmethoden, erläutert aber an vielen Stellen auch den Zusammenhang zu werkstofflichen Phänomenen.

Das Entwickeln einer für den jeweiligen Industriezweig geeigneten Sicherheits- oder Nachweisphilosophie zum Umgang mit den verbleibenden rechnerischen (und experimentellen!) Unsicherheiten muss in der Verantwortung des Bauteilentwicklers verbleiben.

## 1 Scope

VDI 2014 Part 3 records the state of the art regarding calculation methods for the development of FRP components. Here the basic principle is that the behaviour of the laminate (Section 5) be traced back to the properties of its individual laminae (Section 4). Designing and dimensioning a laminate includes stacking the laminate in such a way as to enable it to cope with the stresses it encounters (fibre orientations, number of laminae, sequence of laminae); it also includes determining the laminate thickness required, which will be the sum of the thickness of the individual laminae. To a very great extent the guideline is based on approved methods which have already been tried and tested in practice and does not therefore necessarily reflect the very latest research findings. In the case of VDI 2014 Part 3 this affects methods used for strain and stress calculation (Sections 4.1 to Section 4.3, and Section 5.1). In the case of strength calculation (Section 4.5 and Section 5.2) this principle had to be abandoned since the usual procedure could result in seriously incorrect estimates, at least in some branches of industry. Here some new methods have been included which do nevertheless reflect what has been learnt during the course of years of design and development work.

The lamina types introduced in VDI 2014 Part 1 and Part 2 – namely, P-ES, G-ES and W-ES – are retained. However, for reasons associated with the translation of Part 3 into English, the terms UD lamina, WF lamina and M lamina are now used instead. Here, due to the straight, non-crimped unidirectional orientation of its fibres, the UD lamina is of outstanding importance in the design of heavy-duty or high-performance components. For this reason the UD lamina occupies a prominent position in the various analytical methods.

Some uncertainties remain, however, in the theoretical dimensioning of laminates and FRP components – one example of this is fatigue strength (Section 5.4). It is therefore not possible to provide a description here of the correct method, but only of the best method available at the present time.

This present VDI 2014 Part 3 concerns itself principally with presenting calculation methods but does nevertheless frequently explain connections with material-related phenomena.

It must remain the responsibility of the component designer to develop a safety- or verification-related strategy for dealing with the remaining calculation (and experimental!) uncertainties and which will suit the requirements of his own branch of industry.

## 2 Abkürzungen, Begriffe, Symbole, Indizierung

### Abkürzungen, Begriffe

AFK	aramidfaserverstärkter Kunststoff
AWV	Ausgeglichener Winkelverbund
C-Faser	Kohlenstofffaser
C-Faser-Schicht	kohlenstofffaserverstärkte Schicht
G-Faser	Glasfaser
G-Faser-Schicht	glasfaserverstärkte Schicht
CFK	kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff
CLT	klassische Laminattheorie
CME	Feuchteausdehnungskoeffizient
CTE	Wärmeausdehnungskoeffizient
FB	Faserbruch
FEM	Finite-Element-Methode
FKV	Faser-Kunststoff-Verbund
G-Schicht	gewebeverstärkte Schicht (in VDI 2014 Blatt 1 und Blatt 2 als G-ES bezeichnet) mit zwei sich unter 90° kreuzenden Faserrichtungen (Kett- und Schußrichtung)
GFK	glasfaserverstärkter Kunststoff
ILS	interlaminare Spannungen ( $\tau_{31}$ , $\tau_{32}$ , $\sigma_3$ )
ILSS	interlaminare Schubfestigkeit
KOS	Koordinatensystem
Laminat	Bezeichnung für das Rechenmodell zur Beschreibung des aus mehreren, miteinander verklebten Schichten bestehenden FKV. In VDI 2014 Blatt 1 und Blatt 2 wird hierfür die Bezeichnung Schichtenverbund verwendet, die gemäß dem sich ändernden Sprachgebrauch angepasst wurde.
Laminat-KOS	Laminat-Koordinatensystem
M-Schicht	wirrfaserverstärkte (Matten)-Schicht (in VDI 2014 Blatt 1 und Blatt 2 als W-ES bezeichnet)
Schicht	Bezeichnung für die einzelne Schicht als Berechnungselement (Bestandteil) eines Laminates. Mit Schicht ist jedoch nicht notwendigerweise die physikalisch wirklich vorliegende Lage eines

## 2 Abbreviations, terminology, symbols, superscripts and subscripts

### Abbreviations, terms

AFRP (or ARP)	aramid-fibre-reinforced plastic
BAP	balanced angle-ply laminate
C fibre	carbon fibre
C-fibre-lamina	lamina with carbon-fibre reinforcement
G fibre	glass fibre
G-fibre-lamina	lamina with glass-fibre reinforcement
CFRP	carbon-fibre-reinforced plastic
CLT	Classical Laminate Theory
CME	Coefficient of moisture expansion
CTE	Coefficient of thermal expansion
FF	fibre fracture
FEM	Finite Element Analysis
FRP	fibre-reinforced plastic
WF lamina	lamina with fabric reinforcement with two mutually perpendicular fibre directions (warp and fill direction)
GFRP	glass-fibre-reinforced plastic
ILS	interlaminar stresses ( $\tau_{31}$ , $\tau_{32}$ , $\sigma_3$ )
ILSS	interlaminar shear strength
COS	coordinate system
laminate	designation of the calculation model of a stack of several FRP laminae which are bonded together
laminate COS	coordinate system of laminate
M lamina	lamina with random (mat) reinforcement
lamina	designation of the single layer as calculation element (constituent) of the laminate. The term lamina does not necessarily mean the physical single layer as it is realized to stack a laminate. The single

Laminates gemeint. So wird im Allgemeinen eine physikalisch aus einer einzelnen Gelegelage (z. B. [0/90/45]) bestehende Schicht in der Berechnung mit drei einzelnen Schichten (Orientierungen 0°, 90°, 45°) modelliert.

layer of a non-crimped fabric layer (e.g. [0/90/45]) is normally modelled using three distinct laminae with orientation angles 0°, 90° and 45° (Note: lamina-by-lamina ≡ ply-by-ply).

Schicht-KOS Schicht-Koordinatensystem (bezieht sich auf die natürlichen oder Hauptachsen der Schicht)

lamina COS

lamina coordinate system related to the natural material axis of the lamina

UD-Schicht unidirektional faser-verstärkte Schicht (in VDI 2014 Blatt 1 und Blatt 2 der Richtlinie als P-ES bezeichnet)

UD lamina

lamina with unidirectional reinforcement

RT Raumtemperatur

RT

room temperature

WL Wöhlerlinie

S-N curve

S-N curve

ZFB Zwischenfaserbruch

IFF

inter-fibre fracture

2D, 3D zwei-, dreidimensional

2D, 3D

two-, three-dimensional

Symbole

Symbols

||, ⊥ parallel zur Faserrichtung, quer (senkrecht) zur Faserrichtung

||, ⊥ parallel (longitudinal) to fibre and transverse (perpendicular) to fibre direction

Δ Differenz

Δ

difference

[ ' ] Transformation Schicht-KOS → Laminat-KOS

[ ' ]

transformation from lamina COS to laminate COS

Lateinische Zeichen

Latin characters

[A] Scheiben-Steifigkeitsmatrix des Laminates

[A] matrix of in-plane (stretching) or extensional stiffness of laminate

[B] Kopplungs-Steifigkeitsmatrix des Laminates

[B] matrix of (bending-stretching) coupling stiffness of laminate

[D] Platten-Steifigkeitsmatrix des Laminates

[D] matrix of bending stiffness of laminate

[K] Laminat-Steifigkeitsmatrix

[K] stiffness matrix of the laminate

[C] Steifigkeitsmatrix der räumlich beanspruchten Schicht

[C] stiffness matrix of the lamina for 3D-stress state

[C'] Steifigkeitsmatrix der räumlich beanspruchten Schicht im Laminat-KOS

[C'] stiffness matrix of the lamina for 3D-stress state (referred to laminate COS)

[Q] Schicht-Steifigkeitsmatrix im Schicht-KOS (ebener Spannungszustand)

[Q] stiffness matrix of the lamina for 2D-stress state (referred to lamina COS, plane stress state)

[Q'] Schicht-Steifigkeitsmatrix im Laminat-KOS

[Q'] stiffness matrix of the lamina for 2D-stress state (referred to lamina COS)

[S]	Schicht-Nachgiebigkeitsmatrix im Schicht-KOS (2D und 3D)	[S]	compliance matrix of the lamina for 2D and 3D stress state (referred to laminate COS)
[S']	Schicht-Nachgiebigkeitsmatrix im Laminat-KOS (2D und 3D)	[S']	compliance matrix of the lamina for 2D and 3D stress state (referred to laminate COS)
[T]	Transformationsmatrix (unterschiedlich für Spannungen und Dehnungen)	[T]	transformation matrix (varying for stress or strain transformations)
<i>D</i>	Schädigungssumme; Biegesteifigkeit	<i>D</i>	damage accumulation; bending stiffness
$E_{\parallel}, E_{\perp}$	Elastizitätsmodul der UD-Schicht in Faserrichtung, quer zur Faserrichtung	$E_{\parallel}, E_{\perp}$	Young's Modulus of UD lamina for parallel or transverse to fibre direction
$f_E$	Anstrengung	$f_E$	stress exposure
$f_S = (f_E)^{-1}$	Streckungsfaktor	$f_S = (f_E)^{-1}$	stretch factor
$f_S^L$	Streckungsfaktor der lastbedingten Spannungen (siehe Abschnitt 5.5.3)	$f_S^L$	stretch factor of load determined stresses (see Section 5.5.3)
$G_{\perp\parallel}$	Schubmodul in der Schichtebene	$G_{\perp\parallel}$	in-plane shear modulus
$k_S$	Schubkorrekturfaktor	$k_S$	shear correction factor
<i>M</i>	Feuchte (moisture)	<i>M</i>	moisture
<i>m</i>	Laminat-Schnittmomentenfluss $\hat{=}$ auf Breite bezogenes Schnittmoment	<i>m</i>	laminate resultant moment per unit length (per width) $\hat{=}$ section moment
<i>n</i>	Laminat-Schnittkraftfluss $\hat{=}$ auf Breite bezogene Schnittkraft	<i>n</i>	laminate resultant force per unit length (per width) $\hat{=}$ section force
$p_{\perp\parallel}^t, p_{\perp\parallel}^c$	Neigung der $(\tau_{n1}, \sigma_n)$ -Bruchkurve an der Stelle $\sigma_n = 0$ ; <sup>t</sup> für den Kurvenast im Bereich $\sigma_n > 0$ ; <sup>c</sup> für den Kurvenast im Bereich $\sigma_n < 0$	$p_{\perp\parallel}^t, p_{\perp\parallel}^c$	inclination of $(\tau_{n1}, \sigma_n)$ -fracture curve at $\sigma_n = 0$ ; <sup>t</sup> for the range $\sigma_n > 0$ ; <sup>c</sup> for the range $\sigma_n < 0$
$p_{\perp\perp}^t, p_{\perp\perp}^c$	Neigung der $(\tau_{nt}, \sigma_n)$ -Bruchkurve an der Stelle $\sigma_n = 0$ ; <sup>t</sup> für den Kurvenast im Bereich $\sigma_n > 0$ ; <sup>c</sup> für den Kurvenast im Bereich $\sigma_n < 0$	$p_{\perp\perp}^t, p_{\perp\perp}^c$	inclination of $(\tau_{nt}, \sigma_n)$ -fracture curve at $\sigma_n = 0$ ; <sup>t</sup> for the range $\sigma_n > 0$ ; <sup>c</sup> for the range $\sigma_n < 0$
<i>Q</i>	Querkraft	<i>Q</i>	transverse shear force
$R^t, R^c$	Zug- bzw. Druckfestigkeit der M-Schicht	$R^t, R^c$	tensile and compressive strength of M lamina
$R_{\parallel}^t, R_{\parallel}^c$	Zug- bzw. Druckfestigkeit parallel zur Faserrichtung der UD-Schicht	$R_{\parallel}^t, R_{\parallel}^c$	tensile and compressive strength of UD lamina parallel to fibre direction
$R_{\perp\parallel}$	Schubfestigkeit in der Schicht-Ebene der UD-Schicht	$R_{\perp\parallel}$	in-plane shear strength of UD lamina
$R_{\perp}^t, R_{\perp}^c$	Zug- bzw. Druckfestigkeit quer zur Faserrichtung der UD-Schicht	$R_{\perp}^t, R_{\perp}^c$	tensile and compressive strength of UD lamina transverse to fibre direction
$R_{\perp\perp}^A$	Bruchwiderstand einer faserparallelen Wirkebene gegen ihren Bruch infolge einer in ihr wirkenden $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung	$R_{\perp\perp}^A$	fracture resistance of an action-plane action parallel to the fibre direction against its fracture due to $\tau_{\perp\perp}$ stressing acting on it
<i>T</i>	Temperatur	<i>T</i>	temperature
<i>t</i>	Laminatdicke	<i>t</i>	laminate thickness
$t_k$	Dicke der <i>k</i> -ten Schicht	$t_k$	thickness of <i>k</i> <sup>th</sup> lamina

Griechische Zeichen

$\alpha$	richtungsorientierter Ausdehnungs-Koeffizient (Feuchte $\alpha_M$ , Temperatur $\alpha_T$ , im Anwendungsbereich linearisiert) und Winkel der Faserorientierung (Rechtsschraubregel, positiv von $x$ nach $x_1$ , siehe Bild 2 und 4)
$\beta$	Winkel der Faserorientierung bezogen auf Hauptnormalspannungsrichtung
$\varepsilon_{2,1}^{comb}$	kombinierte Dehnung (siehe Abschnitt 5.2.2)
$\kappa_x, \kappa_y$	Laminat-Krümmungen (infolge Biegebeanspruchung)
$\kappa_{xy}$	Laminat-Drillung (infolge Torsionsbeanspruchung)
$\eta$	Abminderungsfaktor bei Moduln nach Überschreitung der ZFB-Grenze
$\eta_{w1}$	Schwächungsfaktor der ZFB-Festigkeiten $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\parallel}$ zur Berücksichtigung von Schädigung durch $\sigma_1$
$\eta_{m+p}$	Schwächungsfaktor der ZFB-Festigkeiten $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\parallel}$ zur Berücksichtigung von Mikroschädigung und Probabilistik
$\lambda$	Beulfaktor
$\rho$	Dichte, Abminderungsfaktor
$\varphi$	Faservolumenanteil
$\Theta$	Krümmungsparameter
$\theta$	Winkel zwischen Dickenrichtung und einer faserparallelen Schnittebene der UD-Schicht
$\theta_{fp}$	ZFB-Bruchwinkel
$\nu$	Querkontraktionszahl (für isotropen Fall)
$\nu_{\parallel}, \nu_{\perp\parallel}, \nu_{\perp\perp}$	Querkontraktionszahlen der UD-Schicht
$\psi$	durch das Verhältnis $\tau_{n1}/\tau_{nt}$ bestimmter Winkel $\arctan(\tau_{n1}/\tau_{nt})$ (Bild 16)
$\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$	Spannungen in der Schicht bezogen auf lokales Schicht-KOS
$\sigma_n$	Normalspannung auf einer geneigten Schnittebene (wirkebenebezogenes Bruchkriterium)
$\sigma_{\parallel}$	Längsbeanspruchung der UD-Schicht
$\sigma_{\perp}$	Querbeanspruchung der UD-Schicht

Greek characters

$\alpha$	direction-dependent coefficient of expansion (moisture $\alpha_M$ , temperature $\alpha_T$ , value is linearized in the application range); angle of fibre direction (right-hand COS, positive from $x$ to $x_1$ , see Figure 2 and 4)
$\beta$	angle between fibre direction and principal normal-stress direction
$\varepsilon_{2,1}^{comb}$	combined strain (see Section 5.2.2)
$\kappa_x, \kappa_y$	laminata curvatures (resulting from bending load)
$\kappa_{xy}$	laminata twist (resulting from torsion load)
$\eta$	reduction factor of the elasticity values after exceeding the IFF limit
$\eta_{w1}$	weakening factor for the IFF strength values $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\parallel}$ considering damage caused by $\sigma_1$
$\eta_{m+p}$	weakening factor for the IFF strength values $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\parallel}$ considering the effects of micro-damage and probabilistics
$\lambda$	buckling factor
$\rho$	density; reduction factor
$\varphi$	fibre-volume fraction
$\Theta$	parameter of curvature
$\theta$	angle between thickness direction and a parallel-to-fibre section plane of the UD lamina
$\theta_{fp}$	angle of the fracture plane
$\nu$	Poisson's ratio (for isotropic case)
$\nu_{\parallel}, \nu_{\perp\parallel}, \nu_{\perp\perp}$	Poisson's ratios of UD lamina
$\psi$	angle calculated from $\arctan(\tau_{n1}/\tau_{nt})$ determined by the ratio $\tau_{n1}/\tau_{nt}$ (Figure 16)
$\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$	lamina stresses related to the local lamina COS
$\sigma_n$	normal stress on an inclined action plane (action-plane strength criterion)
$\sigma_{\parallel}$	longitudinal stressing in the UD lamina
$\sigma_{\perp}$	transverse stressing in the UD lamina



$\tau_{nt}$	Quer/Quer-Schubspannung auf einer geneigten Wirkebene (wirk-ebenebezogenes Bruchkriterium)	$\tau_{nt}$	transverse/transverse shear stress on an inclined action plane (action-plane strength criterion)
$\tau_{nl}$	Quer/Längs Schubspannung auf einer geneigten Wirkebene (wirk-ebenebezogenes Bruchkriterium)	$\tau_{nl}$	transverse/longitudinal shear stress on an inclined action plane (action-plane strength criterion)
$\tau_{\perp\perp}$	Quer/Quer-Schubbeanspruchung der UD-Schicht	$\tau_{\perp\perp}$	transverse/transverse shear stressing in the UD lamina
$\tau_{\parallel\parallel}$	Quer/Längs-Schubbeanspruchung der UD-Schicht	$\tau_{\parallel\parallel}$	transverse/longitudinal shear stressing in the UD lamina
$\omega$	halber Kreuzungswinkel der Fasern beim AWW. Meistens von der $x$ -Achse aus gemessen: $\alpha_1 = +\omega$ ; $\alpha_2 = -\omega$	$\omega$	half of the crossing angle of an angle ply laminate; in most cases measured from the $x$ axis: $\alpha_1 = +\omega$ ; $\alpha_2 = -\omega$

**Laminat-Codierung**

$(0^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$	Beispiel für eine Laminat-Familie
$(20\%0^\circ, 70\% \pm 45^\circ, 10\%90^\circ)$	Definition eines Laminates mit Angabe der Prozentanteile der jeweiligen Schicht-Orientierung
$[0/90]_s$	Definition eines symmetrischen Laminates
$[90_2^G / 0_3^C / \pm 45_2^G / 0^C]_{2s}$	hinsichtlich Faserart spezifizierter Laminataufbau
$[0/0/\pm 45$ Gewebe/90/ $\pm 45$ Gewebe /0/0]	Hinsichtlich Verstärkungsart der einzelnen Schichten spezifizierter Laminataufbau

**Laminate notation**

$(0^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$	example of a laminate family
$(20\%0^\circ, 70\% \pm 45^\circ, 10\%90^\circ)$	definition of a specific laminate showing the thickness fractions of lamina orientations
$[0/90]_s$	definition of a symmetrical laminate with respect to the mid-plane
$[90_2^G / 0_3^C / \pm 45_2^G / 0^C]_{2s}$	specification of the lay-up of a laminate with respect to the fibre type
$[0/0/\pm 45$ fabric/90/ $\pm 45$ fabric /0/0]	specification of the lay-up of a laminate with respect to the type of reinforcement

**Indices**

*Hochgestellte Indices*

in	anfänglich
b	Biegung
c	Druck
L	lastbedingt
r	Eigenspannung
s	Schub
t	Zug
T	Transponierte
0	geometrische Mittelfläche des Laminates (übliche Referenzfläche)

**Superscripts and subscripts**

*Superscripts*

in	initial
b	bending
c	compressive
L	load-determined
r	residual stress
s	shear
t	tensile
T	transposed
0	laminate geometrical midplane (reference plane)

*Tiefgestellte Indices*

cr	kritisch (knick-, beul-)
fr	Bruch
F	Schussrichtung (Gewebe)
f	Faser
H	hygrothermal
k	$k$ -te Schicht
M	Wirrfaserverstärkung (isotrop)

*Subscripts*

cr	critical (buckling)
fr	fracture
F	fill direction of a woven fabric
f	fibre
H	hygrothermal
k	$k^{\text{th}}$ lamina
M	random-mat reinforcement (isotropic)

M	Feuchte
m	Matrix
s	symmetrischer Aufbau; Sekantenwert
T	Temperatur
W	Kettrichtung (Gewebe)
0	Anfangswert

*Koordinatensysteme*

$x, y, z$	Laminat-KOS (Bild 3)
$x_1, x_2, x_3$	Schicht-Koordinatensystem (Bild 3)
$x_I, x_{II}$	Hauptnormalspannungs- Richtungen
W, F	Kette, Schuss bei Geweben
$  , \perp$	UD-Schicht-Koordinatensystem mit Bezeichnungen parallel und senkrecht zur Faserrichtung (zur Kennzeichnung transversal isotroper Eigenschaften)
n, t	normal, tangential zu einer faser- parallelen Schnittebene der UD-Schicht

Die tiefgestellten Indices kennzeichnen den Ort, die Schnittflächen oder die Richtung. Schnittflächen stehen, falls nicht anders gekennzeichnet, senkrecht auf der angegebenen Richtung, vgl. Bild 1 bis Bild 4. Die hochgestellten Indices kennzeichnen die Beanspruchungsarten wie Zug, Druck, Biegung (t, c, b) sowie Temperatur und Feuchte.

**Zur Kennzeichnung von Spannungen, Verzerrungen und Elastizitätsgrößen**

Zur Kennzeichnung von Spannungen  $\sigma$  und  $\tau$  sowie Verzerrungen  $\varepsilon$  und  $\gamma$  dienen das  $(x_1, x_2, x_3)$ -Schicht-KOS (bei G-Schichten das F,W-KOS) und das  $(x, y, z)$ -Laminat-KOS.

Bei einer Spannung müssen zu ihrer eindeutigen Kennzeichnung ihre *Wirkebene* und ihre *Richtung* ersichtlich sein.

Eine Normalspannung  $\sigma$  übt auf ihre Wirkebene eine Zug- oder Druckkraft aus, die („normal“) senkrecht zur Wirkebene gerichtet ist. Deshalb genügt bei einer Normalspannung  $\sigma$  zu ihrer Kennzeichnung allein der Index zur Angabe der Richtung der Spannung, denn dadurch ist implizit auch die Orientierung der Wirkebene angegeben (Bild 3). Ob es sich bei der Normalspannung um eine Zug- oder Druckspannung handelt, wird durch ein positives (für Zug) und negatives (für Druck) Vorzeichen bei den Zahlenwerten für  $\sigma$  ausgedrückt.

Bei Schubspannungen sind zu ihrer eindeutigen Kennzeichnung zwei Indizes erforderlich. Der 1. Index gibt die Richtung der Flächennormalen der Wir-

M	moisture
m	matrix
s	symmetric lay-up; secant value
T	temperature
W	warp direction of a woven fabric
0	initial value

*Coordinate systems*

$x, y, z$	laminata COS (Figure 3)
$x_1, x_2, x_3$	lamina COS (Figure 3)
$x_I, x_{II}$	directions of principal normal stresses
W, F	warp and fill in case of woven fabrics
$  , \perp$	UD-lamina COS showing the parallel (longitudinal) and trans- verse fibre directions (for denoting transversely isotropic properties)
n, t	normal, tangential to a parallel to the fibre plane of the lamina

The subscripts denote the location, the sectional areas or the direction. Sectional areas are, unless otherwise indicated, perpendicular with respect to the direction specified (cf. Figure 1 to Figure 4). The superscripts denote the type of loading, such as tension, compression, bending (t, c, b) and also temperature and moisture.

**On the designation of stresses, strains and elasticity values**

In order to designate stresses  $\sigma$  and  $\tau$  as well as strains  $\varepsilon$  and  $\gamma$  we use the  $(x_1, x_2, x_3)$  lamina COS (in case of WF laminae the F,W COS) and the  $(x, y, z)$ -laminata COS.

With a stress both the *action plane* and the *direction* must be clearly designated.

Any normal stress  $\sigma$  exerts a tension or compression force which acts perpendicularly (“normally”) to its action plane. Therefore it is sufficient in case of a normal stress  $\sigma$  to use only the index for indicating the direction of the stress because this gives implicitly also the orientation of the action plane (see Figure 3). The algebraic sign for the numerical value of the stress (positive for tension and negative for compression) indicates whether the normal stress is a tensile or a compressive stress.

For shear stresses two indices are mandatory for an unambiguous designation. The 1<sup>st</sup> index denotes the direction of the normal to the action plane of  $\tau$ , that is

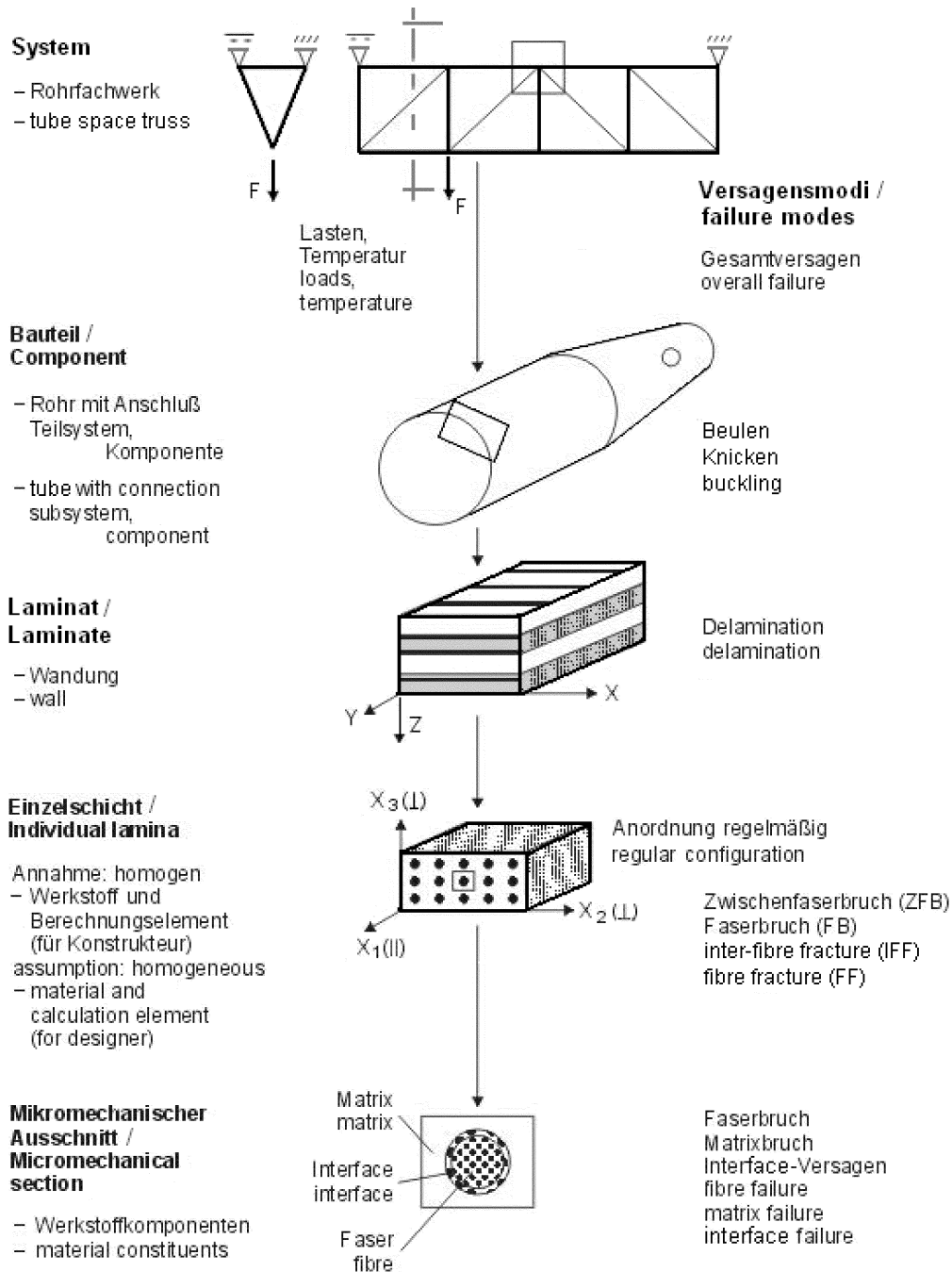


Bild 1. Definition, Betrachtungsniveaus

Figure 1. Definition, levels of examination

ebene von  $\tau$  an, das heißt jener Ebene, in der die Schubspannung wirkt. Der 2. Index gibt die Richtung von  $\tau$  an. Dabei gilt: Auf einer Wirkebene, deren Flächennormale in die positive Richtung der Koordinatenachse weist (auch als positives Schnittufer bezeichnet), weist eine positive Schubspannung in Richtung der positiven Koordinatenachse (siehe Bild 3).

Damit wird ein allgemein räumlicher Spannungszustand einer UD-Schicht im Schicht-KOS folgendermaßen angegeben (siehe Bild 3):

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$$

the plane in which the shear stress is acting. The 2<sup>nd</sup> index denotes the direction of  $\tau$ . The following applies: On an action plane whose normal to the plane points towards the positive direction of the coordinate axis (also called positive section plane), a positive shear stress is acting in the direction of the positive coordinate axis (see Figure 3).

With that a general 3D stress state can be defined for a UD lamina in the lamina COS (see Figure 3):

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$$

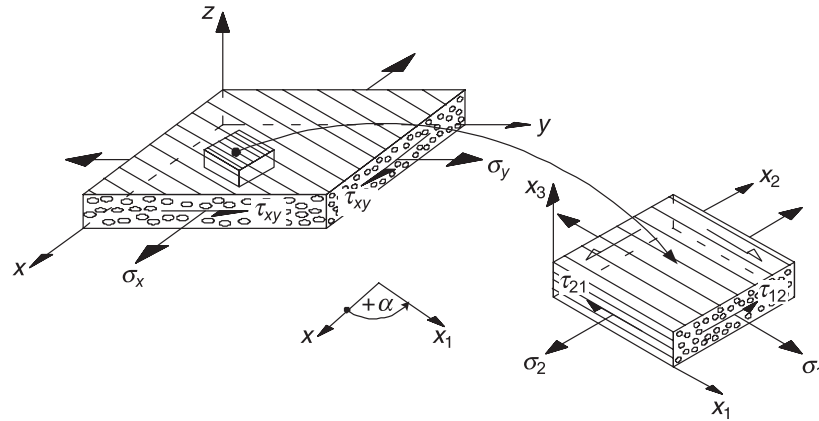


Bild 2. Darstellung einer ebenen UD-Schicht im Laminat-KOS (links) und im lokalen KOS (rechts) mit den wirkenden Spannungen (ebener Spannungszustand mit Normalspannungen und intralaminarer Schubspannung  $\tau_{12} = \tau_{21}$ )

Figure 2. Plane UD lamina in the laminate COS (on the left) and in the local COS (on the right) with the stresses acting (plane stress state with normal stress and intralaminar shear stress  $\tau_{12} = \tau_{21}$ )

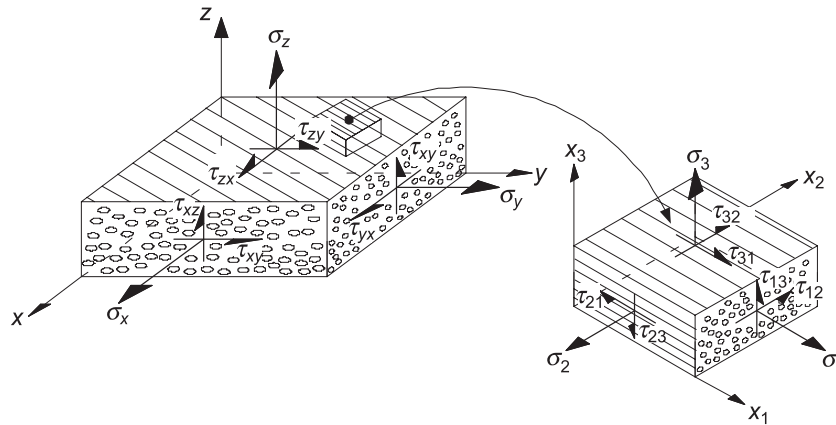


Bild 3. Darstellung einer räumlich beanspruchten UD-Schicht im Laminat-KOS und im lokalen KOS mit den wirkenden Spannungen (räumlicher Spannungszustand) mit „In-Schichtebene“- (intralaminaren)-Spannungen ( $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12} = \tau_{21}$ ) und „Aus der Schichtebene heraus“- (interlaminaren)-Spannungen ( $\tau_{31} = \tau_{13}, \tau_{32} = \tau_{23}, \sigma_3$ ) zusammengefasst im so genannten Spannungszustandsvektor:

Figure 3. Three-dimensional stressing of a UD lamina in the laminate COS and in the local COS with the stresses acting (three-dimensional stress state) with intralaminar stresses (stresses “within the lamina plane”) ( $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12} = \tau_{21}$ ) and interlaminar stresses (stresses “perpendicular to the lamina plane”) ( $\tau_{31} = \tau_{13}, \tau_{32} = \tau_{23}, \sigma_3$ ) collectively expressed as the so-called stress state vector:

- Faserparalleles KOS:  
 $\{\sigma\} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T$  Ingenieurbezeichnung  
 $= (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)^T$  Matrixnotation
- Laminat- oder Bauteil-KOS:  $\{\sigma\} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})^T$

- Fibre-paralleles COS:  
 $\{\sigma\} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T$  engineering designation  
 $= (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)^T$  matrix notation
- Laminate or component COS:  $\{\sigma\} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})^T$

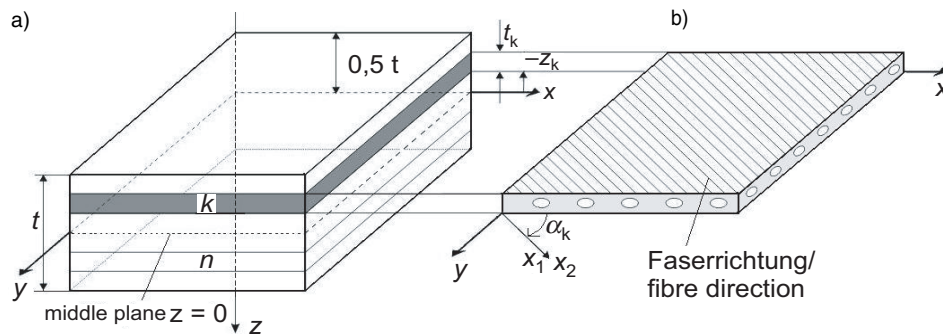


Bild 4. Darstellung eines Laminates (a) und einer UD-Schicht daraus (b). Die positive Richtung des Schichtwinkels  $\alpha$  wird unterschiedlich definiert. Hier wird die mehrheitlich gebräuchliche Festlegung benutzt: bezüglich x-y-Sicht,  $x \rightarrow x_1$ , rechtshändigen KOS, Schichtzählung in positiver z-Richtung

Figure 4. Laminate (a) and a UD lamina taken from it (b). The positive direction of the lamina orientation angle  $\alpha$  is variously defined. This guideline uses the definition preferred by the majority as regards x-y view,  $x \rightarrow x_1$ , right-handed COS, laminae counted in positive direction along z axis

und entsprechend bezogen auf das Laminat-KOS (siehe Bild 3)

$$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$$

Für das Laminat werden keine über die Laminatdicke gemittelten Spannungen benutzt, sondern es werden stattdessen (resultierende) „Normalkraft-Flüsse“  $n_x$  und  $n_y$  sowie der (resultierende) „Schubfluss“  $n_{xy}$  angegeben. Dabei handelt es sich um Kräfte je Breiten-einheit des Laminates. In Ausnahmefällen werden auch (resultierende) „Querkraftkraft-Flüsse“  $n_{xz}$  und  $n_{yz}$  benutzt.

Wenn es bei der transversal-isotropen UD-Schicht auf eine genaue Richtungsangabe für eine Spannung überhaupt nicht ankommt, sondern nur allgemein die Beanspruchungsart (z.B. Längsbeanspruchung oder Querbeanspruchung bezogen auf die Faserrichtung) charakterisiert werden soll, benutzt man dazu zweckmäßigerweise nicht die Indizes „1, 2, 3“ sondern stattdessen die Indizes  $\parallel$  und  $\perp$ . Damit lassen sich sehr augenfällig die verschiedenen Möglichkeiten der Beanspruchung eines UD-Verbundes kennzeichnen (siehe Bild 10):

$$\sigma_{\parallel}, \sigma_{\perp}, \tau_{\perp\parallel}, (\tau_{\parallel\perp}), \tau_{\perp\perp}$$

Entsprechend werden die Festigkeiten der transversal-isotropen UD-Schicht folgendermaßen bezeichnet:

$$R_{\parallel}, R_{\perp}, R_{\perp\parallel}, R_{\perp\perp}$$

Zug- und Druckfestigkeiten werden durch hochgestellte Indizes <sup>t</sup> (für Zug) und <sup>c</sup> (für Druck) unterschieden. Sämtliche Festigkeiten werden als positive Werte angegeben, auch Druckfestigkeiten.

Das eingeführte Schicht-KOS und ebenso das Laminat-KOS werden in der folgenden Weise für die Bezeichnung von Verzerrungen benutzt:

$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{21})$$

$$(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$$

Zur Bezeichnung der Elastizitätsgrößen der transversal-isotropen UD-Schicht verwendet man zweckmäßigerweise wiederum die Indizes  $\parallel$  und  $\perp$  und erhält damit für die Moduln

$$E_{\parallel}, E_{\perp}, G_{\perp\parallel}, G_{\perp\perp}$$

Bei der Indizierung der Querkontraktionszahlen wird international unterschiedlich verfahren. In der Richtlinie VDI 2014 werden die erforderlichen zwei Indizes folgendermaßen benutzt: Der 1. Index gibt die Richtung der auftretenden Querkontraktion an. Der 2. Index bezeichnet die Beanspruchung, durch welche die Querkontraktion bewirkt wird. So ergibt sich, dass bei einer UD-Schicht  $\nu_{\perp\parallel}$  die größere und  $\nu_{\parallel\perp}$

as well as in the laminate COS (see Figure 3)

$$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$$

For the laminate we do not make use of stresses averaged across the laminate thickness, instead we specify (resultant) normal forces  $n_x$  and  $n_y$  as well as the (resultant) shear force  $n_{xy}$ . In this case the forces are given as forces per unit width of the laminate. In special cases the (resultant) transverse shear forces  $n_{xz}$  and  $n_{yz}$  are also used.

If it is not important to precisely specify the direction of a stress in a UD lamina, but one is interested only in characterising the general kind of stressing (e. g. longitudinal or transverse stressing referred to the fibre direction), we do not make use of the indices “1, 2, 3” but we use the indices  $\parallel$  and  $\perp$  instead. By doing this the different kinds of stressing of a UD composite can be described in the following way (see Figure 10):

$$\sigma_{\parallel}, \sigma_{\perp}, \tau_{\perp\parallel}, (\tau_{\parallel\perp}), \tau_{\perp\perp}$$

In correspondence to the above symbols the strength values of the transversely isotropic UD lamina are denoted as follows:

$$R_{\parallel}, R_{\perp}, R_{\perp\parallel}, R_{\perp\perp}$$

The distinction between tension and compression strength values is achieved by the superscript indices <sup>t</sup> (for tension) and <sup>c</sup> (for compression). All strength parameters are always inserted as positive values, even compressive strengths.

The already introduced lamina COS as well as the laminate COS are used for the denotation of the strains as follows:

$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{21})$$

$$(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$$

The denotation of the elasticity values of the transversely isotropic UD lamina can again be done in a practical way by using the indices  $\parallel$  and  $\perp$  which leads to the moduli

$$E_{\parallel}, E_{\perp}, G_{\perp\parallel}, G_{\perp\perp}$$

In case of the Poisson’s ratios there are different ways for the indexing in international practice. In the guideline VDI 2014 the required two indices are utilized as follows: The 1<sup>st</sup> index indicates the direction of the transverse contraction. The 2<sup>nd</sup> index denotes the stress, which causes the contraction. As a consequence the Poisson’s ratios  $\nu_{\perp\parallel}$  is the larger and  $\nu_{\parallel\perp}$  the smaller one. (In the English literature the two in-

die kleinere Querkontraktionszahl bezeichnet. (In der angloamerikanischen Literatur wird meistens in umgekehrter Reihenfolge indiziert.)

**Basiswerte, Dimensionen**

Kraft	N
Länge	mm, m
Fläche	mm <sup>2</sup> , m <sup>2</sup>
Spannung	N/mm <sup>2</sup> = MPa
Modul	GPa = 10 <sup>3</sup> MPa = 10 <sup>3</sup> N/mm <sup>2</sup>
Dichte	g/cm <sup>3</sup> = 10 <sup>3</sup> kg/m <sup>3</sup>

**3 Berechnungsablauf**

In den folgenden Abschnitten wird eine kurze Einführung in die Thematik „Berechnungen“ von FKV-Bauteilen gegeben [Mic95].

**3.1 Allgemeines**

Die Entwicklung von FKV-Bauteilen unterscheidet sich von Bauteilentwicklungen mit isotropen Werkstoffen dadurch, dass das Gestalten der Bauteilgeometrie und das „Konstruieren des Laminates“ bei FKV-Bauteilen Hand in Hand geht; darüber hinaus müssen fertigungstechnische Aspekte bereits beim Vorentwurf berücksichtigt werden.

Grundsätzlich sollte ein FKV-Bauteil nach Möglichkeit so gestaltet werden, dass das Fasergestüt (das „Fasernetz“) allein tragfähig ist. Eine grob vereinfachende, aber zum Entwerfen eines Laminates gut geeignete Theorie ist die so genannte Netztheorie (siehe Abschnitt 5.1.1).

Der beim Dimensionieren neben der Anisotropie zweite wesentliche Unterschied von FKV zu herkömmlichen Werkstoffen ist die Inhomogenität. Die Fasern eines FKV „bringen“ die hervorragenden Eigenschaften, das Harz (die Matrix) ist aber notwendig, um

- ein zusammenhängendes Bauteil zu realisieren,
- Kräfte in die Fasern einzuleiten,
- die Fasern vor Umwelteinflüssen zu schützen und
- die Fasern bei Druckbeanspruchung am Ausknicken zu hindern.

Leider entstehen nun zwangsläufig auch Spannungen in der Matrix und an den Faser/Matrix-Grenzflächen. In vielen Fällen kann man es nicht verhindern, dass diese Spannungen für die Dimensionierung maßgebend werden, das heißt, die *matrixdominierten* Festigkeiten müssen beim Dimensionieren auf jeden Fall berücksichtigt werden.

stances related to the contraction and acting stress are used in the reverse sequence.)

**Basic values and dimensions**

Force	N
Length	mm, m
Area	mm <sup>2</sup> , m <sup>2</sup>
Mechanical stress	N/mm <sup>2</sup> = MPa
Modulus	GPa = 10 <sup>3</sup> MPa = 10 <sup>3</sup> N/mm <sup>2</sup>
Density	g/cm <sup>3</sup> = 10 <sup>3</sup> kg/m <sup>3</sup>

**3 Analytical procedure**

The following sections will provide a brief introduction to the subject of “analysis“ of FRP components [Mic95].

**3.1 General comments**

Where the design of FRP components and the design of components made of isotropic materials differs is in the fact that in the former case definition of the component geometry goes hand in hand with “designing the laminate” for the FRP component. On top of that production engineering aspects also need to be taken into consideration already in the preliminary design stage.

Basically, an FRP component should, if possible, be designed in such a way that the fibre structure (the “fibre network”) can bear loads on its own. One theory which, although oversimplifying matters, is nevertheless very suitable when designing a laminate is the so-called netting theory (see Section 5.1.1).

In dimensioning, the second major difference between FRP and conventional materials after anisotropy is inhomogeneity. The fibres of an FPR are what “deliver” its excellent properties but the resin (the matrix) is still required in order to

- provide a cohesive component,
- direct loads into the fibres,
- protect the fibres against environmental influences, and
- prevent the fibres from buckling when subjected to compressive stress.

Unfortunately stresses will of necessity now arise in the matrix as well, and also at the interface of the fibres and matrix. In many cases these stresses exert an unavoidable and decisive influence on dimensioning in other words, the *matrix-dominated* strengths must definitely be taken into account during dimensioning.

Es ist leicht vorstellbar, dass auf Grund der sehr unterschiedlichen mechanischen Eigenschaften von Fasern und Matrix sich in einem Laminat und erst recht in einer Schicht lokal stark unterschiedliche, komplexe Spannungszustände ausbilden. Analysen im Bereich einzelner Fasern mit dazwischen liegender Matrix nennt man *Mikromechanik*. Eine ingenieurgerechte Betrachtung eines Laminates ist aber auf „größerem“ Niveau anzusiedeln, der so genannten *Macromechanik*. Bei dieser betrachtet man die Eigenschaften der Fasern und der Matrix „verschmiert“ in jeweils einer Schicht, das heißt, die Inhomogenität der Schicht wird hier *nicht berücksichtigt*. Die so „homogenisierte“ Schicht wird als kleinstes Bauelement des Laminates und damit auch als „kleinste Berechnungseinheit“ betrachtet. Werden fertigungstechnisch mehrere Lagen zusammengefasst (z.B. Einzellagen mit unterschiedlicher Orientierung in Multiaxialgelegen) können diese rechenstechnisch zu einer Schicht vereinigt werden, die wie ein homogenes, anisotropes Kontinuum behandelt wird. Es spricht aber auch nichts dagegen, jede dieser Einzellagen mit ihrer Orientierung als UD-Schicht zu modellieren. Das Laminat wird dann auf der Basis der Schicht-Eigenschaften schichtenweise z.B. mit Hilfe der so genannten klassischen Laminattheorie (engl. CLT) analysiert und dimensioniert (siehe Bild 19 und Bild 20).

Für eine Steifigkeitsberechnung können sowohl die Schicht als auch das Laminat als *homogen* betrachtet werden. Die Steifigkeit des Laminates ergibt sich als „Summe“ der Schichtsteifigkeiten. Die „Festigkeitsberechnung“ hingegen ist komplexer. Die dazu notwendige Spannungsanalyse, die – im Gegensatz zum kontinuierlichen Spannungsverlauf über der Wanddicke von homogenen Werkstoffen – Spannungssprünge von Schicht zu Schicht im Laminat ermittelt, muss für jede Schicht durchgeführt werden.

Bei der dann folgenden Festigkeitsanalyse darf die Auswirkung der *Inhomogenität* der Schicht auf ihr Bruchverhalten **nicht mehr unberücksichtigt** bleiben:

In einem Laminat müssen in jeder Schicht zwei grundsätzlich verschiedene Bruchtypen, Faserbruch und Zwischenfaserbruch, unterschieden werden. Hinzu kommt noch das Delaminieren der einzelnen Schichten, das heißt die flächige Trennung der einzelnen Schichten voneinander. Dies kann die Steifigkeit des Laminates negativ beeinflussen und auch das Versagen einer Schicht durch mangelnde gegenseitige Stützwirkung beschleunigen. Meistens werden zunächst Zwischenfaserbrüche (ZFB) in einer oder mehreren Schichten auftreten, die die Schicht örtlich

As may readily be imagined, due to the very different mechanical properties of the fibres and the matrix, complex stress states with marked local variations will develop in a laminate and more especially within an individual lamina. Analyses covering individual fibres with the intervening matrix are referred to as *micromechanics*. Examination of a laminate from an engineering point of view, however, concerns itself rather with a “larger” scale: this is the level of so-called *macromechanics*. The latter approach “smears” together the properties of the fibres and the matrix, taking one lamina at a time: in other words, the inhomogeneity of the lamina is *ignored* here. The lamina thus “homogenized” is taken as the smallest component of the laminate and therefore also regarded as the “smallest unit of analysis”. When several layers are grouped together for the purposes of production (for example, individual layers with differing orientations within a multiaxial stitched fabric) these can, for analytical purposes, be united into a single lamina which is treated as a homogeneous, anisotropic continuum. There can, however, be no objection to modelling each of these individual layers with its orientations as a UD lamina. The laminate will then be analysed and dimensioned lamina by lamina on the basis of the lamina properties, doing so, for example, with the aid of so-called classical laminate theory (CLT) (see Figure 19 and Figure 20).

For the purpose of a stiffness analysis not only the lamina but also the laminate may be regarded as *homogenous*. The stiffness of the laminate is simply the “sum” of the lamina stiffnesses. “Strength analysis”, on the other hand, is more complex. The stress analysis which it requires and which must determine the abrupt stress changes occurring from lamina to lamina within the laminate (unlike the continuous progression of stress across the wall thickness of homogeneous materials) needs to be carried out for each lamina separately.

In the strength analysis which then follows the effect of *inhomogeneity* of the lamina on its fracture behaviour can **no longer be left out of consideration**:

In a laminate a distinction must be drawn in each lamina between two fundamentally different kinds of fracture, namely, fibre fracture and inter-fibre fracture. In addition, there is the delamination of the individual lamina: in other words, the individual layers detach from each other. This can have a negative effect on the stiffness of the laminate and also speed up the failure of a lamina due to a lack of mutual support. In most cases, instances of inter-fibre fracture (IFF) will first occur in one or more laminae whereby the lamina is severed locally between the fibres. Such

zwischen den Fasern durchtrennen. Diese ZFB bedeuten aber nicht von vornherein, dass gleichzeitig auch das gesamte Laminat versagt, sondern sie können in einigen Fällen sogar toleriert werden. Zu beachten ist jedoch, dass die durch ZFB entstehenden Risse in der Matrix eine ankernde Wirkung auf die Fasern der angrenzenden Schichten haben können und eventuell Delaminationen initiieren. Laminat-Versagen ist aber auf jeden Fall anzunehmen, sobald der erste FB, das heißt das Versagen der Fasern der betroffenen Schicht auftritt, wodurch die Schicht in einem Makrobereich ihre Tragfähigkeit verliert.

Die schichtenweise Spannungs- und Festigkeitsanalyse ermöglicht das Dimensionieren „flächiger“ FKV-Bauteile (Platten bzw. Schalen), die vorwiegend in der Bauteilebene beansprucht sind. Eine Beurteilung der Delaminationsgefahr ist damit aber nicht ohne weiteres möglich.

In räumlich beanspruchten Bereichen wie in Laminat-Querschnitten von Krafterleitungsbereichen eines FKV-Bauteils werden naturgemäß auch die Schichten räumlich beansprucht, sodass räumliche Festigkeitskriterien benötigt werden.

Übliche Laminare sind nur in der Laminat-Ebene faserverstärkt und sollten deshalb hauptsächlich auch nur in der Laminat-Ebene beansprucht werden. Mit zunehmender „Dickwandigkeit“ treten aber – neben Randstörspannungen an freien Rändern – weitere „Störspannungen“ in Form von Normal- und Schubspannungen in Dickenrichtung auf, die eine aufwändigere Spannungs- und Festigkeitsanalyse notwendig machen.

In Bild 5 ist das Flussdiagramm des Berechnungsablaufs dargestellt.

Bei der Festlegung der Bauteilgeometrie werden die Möglichkeiten und Grenzen der FKV-Bauweise oft nicht oder nicht genügend berücksichtigt. Bereits bei der Festlegung der Bauteilgeometrie sollte man sich Klarheit über die günstigsten Orientierungen des „Fasernetzes“ verschaffen. Eine Vorgehensweise, bei der Hauptschnittkräfte für ein zu entwerfendes FKV-Bauteil mit angenommenen isotropen Eigenschaften ermittelt werden („verschmieren“) und daraus Faserorientierungen abgeleitet werden, kann unter Umständen zu einem ungünstigen Startentwurf führen.

### 3.2 Auslegungsphilosophie

Wie bereits in Abschnitt 1 erwähnt, werden in dieser Richtlinie Berechnungsmethoden aufgezeigt, die als „Tools“ benutzt werden sollen. Im Folgenden sind einige Hinweise darauf gegeben, was bei der Entwicklung eines geeigneten Sicherheits- bzw. Nachweis-

IFFs do not necessarily mean that the entire laminate will fail: indeed, in some cases they may even be tolerated. What should be remembered, however, is that the IFF cracks in the matrix may tend to initiate failure of fibre filaments in adjacent lamina and possibly initiate delamination. Failure of the laminate will, however, have to be assumed as soon as the first fibre fracture (FF) occurs – in other words, the fibres in the affected lamina fail. This causes the lamina to lose its load-carrying capacity over a macro-region.

Stress and strength analyses carried out lamina by lamina make it possible to dimension thin-walled FRP components (plates or shells) which experience a predominantly plane stress state. An appraisal of the risk of delamination cannot therefore be made simply on that basis.

In regions subject to a three-dimensional stress state – such as in laminate cross-sections of load introduction regions of an FRP component, for example – the laminae will, of course, also be subject to a three dimensional stress state. This means that three-dimensional strength criteria are required.

The laminates are customarily fibre-reinforced only in the laminate plane and therefore should primarily be subjected to stress only in the laminate plane. As wall thickness increases, so too will additional unwanted stresses arise (as well as stress concentrations at free edges) in the shape of normal stress and transverse shear stress in the direction of thickness. These make a more complex stress and strength analysis necessary.

Figure 5 presents a flow diagram of the analysis procedure.

The possibilities and the limits of FRP design are frequently ignored or given inadequate consideration when deciding on the geometry of components. As early as this stage the designer should ascertain what is the best orientation for the “fibre network”. A procedure whereby the principal section forces are determined for a projected FRP component with assumed isotropic properties (“smearing”) and fibre orientations deduced from this may under certain circumstances result in an unsatisfactory starting design.

### 3.2 Design philosophy

As has already been mentioned in Section 1, this guideline covers methods of analysis which should be employed as “tools”. In what follows some information will be provided as to what should be taken into consideration in the development of a suitable



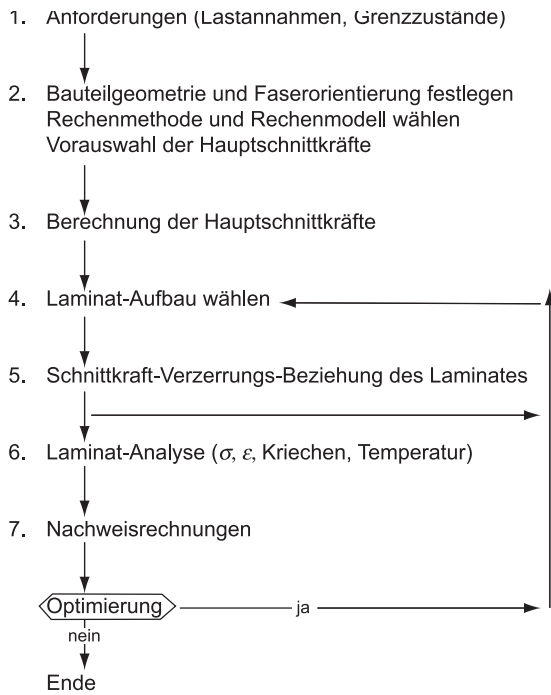


Bild 5. Flussdiagramm der Laminat-Dimensionierung

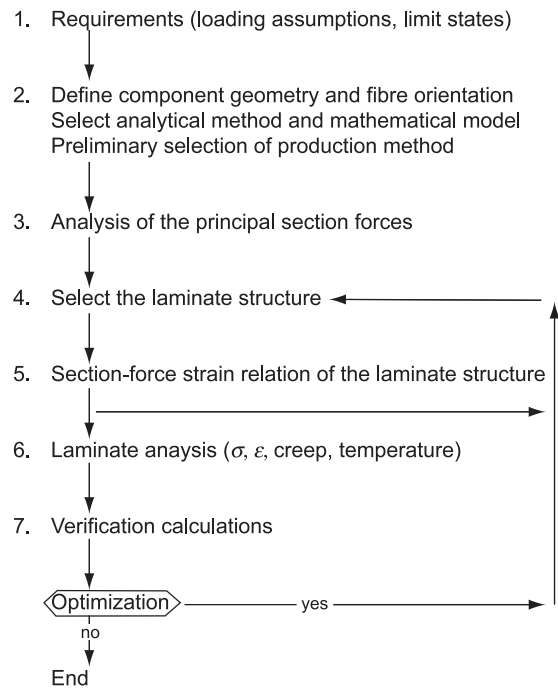


Figure 5. Flow diagram of laminate dimensioning

konzepts zu berücksichtigen ist. Wertvolle Hinweise zum Sicherheitskonzept für FKV-Bauteile finden sich in [DNV03].

Kernstück jeder *Strukturanalyse* (siehe Bild 3 in VDI 2014 Blatt 2) ist die mechanische Modellierung. Zu ihr zählt die Ausarbeitung der dimensionierenden Lastfälle und sonstiger wesentlicher Vorgaben, die Festlegung von Geometrie und Tragsystem, und die Berücksichtigung möglicher Versagensmodi (unter Umständen mehrere pro Lastfall).

Als *Grenzzustand* bezeichnet man jenen Last- oder Beanspruchungszustand, bei dem das Versagenskriterium gerade erfüllt ist. Grenzzustände sind z. B.:

- Bruch, Querschnittskollaps, Beulen/Knicken, Kriechen, instabile Schädigungsausbreitung
- Verlust der Funktionsfähigkeit (kinematisches Verhalten, Dämpfung des Laminates, Wärmeleitung)
- Verlust der Gebrauchsfähigkeit (Schwingung, Dichtigkeit, Durchbiegung)
- Verlust der Sicherheit (Bruch der Isolierung, nicht der Tragwirkung etc.)

### 3.3 Berechnungsprogramme

Es gibt zwei Kategorien von Berechnungsprogrammen: Eine Anzahl „kleiner“ Programme für die Berechnung von Laminaten und geometrisch einfachen Bauteilelementen sowie Verbindungen/Krafteinleitungen. Diese beruhen überwiegend auf geschlossenen analytischen Lösungsformeln.

safety or verification concept. Valuable advices to the safety concept for FRP components can be found in [DNV03].

The heart of any *structural analysis* (see VDI 2014 Part 2, Figure 3) is the mechanical modelling. This will include working out the relevant loading cases and other important constraints, defining the geometry and support system, and taking possible failure modes into account (in some circumstances including several failure modes for each loading case).

By *limit state* is meant that loading state or state of stress at which the failure criterion is just satisfied. Limit states may include for example:

- fracture, cross-sectional collapse, buckling, creeping, unstable propagation of damage
- loss of function (kinematic behaviour, damping of the laminate, conduction of heat)
- loss of serviceability (vibration, leak rate, deflection)
- loss of safety (failure of insulation, without loss of load-bearing capacity, and so on).

### 3.3 Computer programs

There are two categories of computer programs. Firstly, there is a number of “small” programs for calculating laminates and geometrically straightforward elements of components as well as connections and load-introduction features. The great majority of these are based on closed analytical formulae.

Um komplex beanspruchte Bauteile mit komplexer Geometrie zu dimensionieren, verwendet man in der Regel die „großen“ FEM-Programme. Die Gesamtverformung des Bauteils und die daraus abgeleiteten Ergebnisse wie Schicht-Verzerrungen und Schicht-Spannungen des Laminates, die Eigenfrequenzen und die Beullasten des Bauteils werden mit Hilfe numerischer Näherungsverfahren bestimmt.

Kleine analytische Programme und FEM-Schalenelemente basieren meist auf der linearen CLT (Abschnitt 5.1.2), die eine vergleichsweise einfache Berechnung ermöglicht, da die gesamte Laminatdicke auf einmal in einem Schalenelement berücksichtigt wird. Für dickwandige Laminates, in denen Schichten 3-D-beanspruchung werden, muss hingegen jede Schicht aus eigenen orthotropen Volumenelementen modelliert werden. Einfache analytische Ansätze gibt es hier nur für Spezialfälle (Rohre).

#### 4 Modellierung der Schicht

In diesem Abschnitt wird das Verhalten der Schichten mit dem Ziel behandelt, seine Beschreibung in Abschnitt 5 in der schichtenweisen Analyse des Laminates anzuwenden.

Es werden die bekannten Spannungs-Verzerrungsbeziehungen für ebene Beanspruchung angegeben und Ansätze für räumliche Beanspruchung aufgezeigt [Her98]. In Tabelle 1 sind die einachsigen („Basis“) Festigkeiten des FKV aufgelistet, die für die Bewertung von mehrachsigen Spannungszuständen mit Hilfe von Festigkeitskriterien (Abschnitt 4.5 und Abschnitt 5.2) benötigt werden. Die in Tabelle 1 angegebenen Festigkeiten sind die in einachsigen Versuchen unter der angegebenen Beanspruchung an Probekörpern gemessenen maximalen Spannungen.

##### 4.1 Allgemeines

Die rechnerische Analyse des Laminates bzw. eines daraus bestehenden Bauteils benötigt Rechenmodelle für die Schichten als Grundelement des Laminates. Die Schichten sind aus technologischen Gründen meist flächige, heterogene Gebilde, bestehend aus einer Unidirektional-(UD-Schicht), Gewebe-(G-Schicht), oder Wirrfaserverstärkung (M-Schicht) und der jeweiligen Matrix. Folgende Schicht-Eingangsgrößen sind für die Berechnung notwendig:

- Schichtdicke
- Fasergehalt
- Art und Orientierung der Verstärkung
- Kennwerte für Verformungsverhalten und Festigkeit (Elastizitätsgrößen und Festigkeiten)

However, when it is necessary to dimension components which are subject to complex loading and which have complex geometries, the designer will usually turn to “big” FEM programs. The total deformation of the component and the results derived from this – such as lamina strains and lamina stresses in the laminate, the natural frequency and the buckling loads of the component – are obtained with the aid of numerical approximation methods.

Small analytical programs and FEM shell elements are mostly based on linear CLT (Section 5.1.2) which permits comparatively simple analysis since the entire thickness of the laminate is included all at once in a shell element. As regards thick-walled laminates, however, which have laminae subject to spatial stresses, every individual lamina must be modelled using its own orthotropic volume elements. Simple analytical approaches only find application here in special cases (such as tubes).

#### 4 Modelling the lamina

This section will deal with the behaviour of laminae with the aim of applying its description in Section 5 to the lamina-by-lamina analysis of the laminate.

The well-known stress-strain relations for plane stress state are given and possible approaches for 3-dimensional stress state described [Her98]. Table 1 shows the uniaxial (“basic”) strength properties of the FRP material, which are required for the evaluation of multiaxial stress stated by means of strength criteria (see Section 4.5 and Section 5.2). The strength properties which are shown in Table 1 are maximum stress values reached during uniaxial tests on FRP specimen for the given loading.

##### 4.1 General comments

The mathematical analysis of the laminate or of a component made of a laminate requires mathematical models for the laminae as a basic element of the laminate. For technical reasons the laminae are usually flat, heterogeneous objects consisting of a unidirectional fibre reinforced lamina (UD lamina), a woven-fabric reinforced lamina (WF lamina) or a random-mat reinforced lamina (M lamina) and the corresponding matrix. The following lamina input variables are required for the analysis:

- lamina thickness
- fibre content
- type and orientation of reinforcement
- data for stress-strain behaviour and strength (Elasticity and strength properties)

Für die Berechnung sind je nach Verstärkungsart der Schicht die in Tabelle 1 zusammengestellten *makro-mechanischen* Kennwerte heranzuziehen, die normalerweise aus Versuchen an isolierten Schichten stammen.

Eine Abschätzung dieser Kennwerte kann auch auf der Basis der Eigenschaften der FKV-Werkstoffkomponenten Matrix und Faser mit Hilfe der *mikromechanischen* Formeln aus VDI 2014 Blatt 1 getroffen werden. Dazu müssen aber die technischen Eigenschaften der Grundwerkstoffe sowie deren Volumenanteile und Verteilungen in der Schicht bekannt sein.

So führt z.B. die mikromechanische Berechnung des E-Moduls parallel zur Faserrichtung einer UD-Schicht (Faservolumenanteil 55 %) mit den E-Moduln für die EP-Harzmatrix von ca. 3000 MPa und für die E-Glasfaser von ca. 75000 MPa auf ca.  $E_{||} = 43000$  MPa.

FKV-Schichten weisen auf Grund der verfügbaren Verstärkungsmaterialien Symmetrien der technischen Eigenschaften auf. In UD-Schichten sind z.B. alle Ebenen, deren Normalenvektor senkrecht zur Faserrichtung weist, Symmetrieebenen. Bei der G-Schicht gehen durch Kett- und Schussrichtung Symmetrieebenen.

Die UD-Schicht ist transversal-isotrop. Sie verhält sich in Ebenen parallel zur Faserrichtung orthotrop

Tabelle 1. Elastizitätsgrößen und Festigkeiten der UD-, Gewebe- und mattenverstärkten Schicht

Verstärkungsart	Elastizitäts- und Festigkeitskennwerte
<b>UD-Schicht</b> transversal-isotrop	Elastizitätsgrößen: $E_{  }, E_{\perp}, \nu_{\perp  },$ (oder $\nu_{  \perp}, G_{\perp  }$ ) (2D) $\nu_{\perp\perp}$ ...zusätzlich (3D) Festigkeiten: $R_{  }^t, R_{  }^c, R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\perp\perp}, R_{\perp  }, R_{\perp\perp}^A$ (3D)
<b>G-Schicht</b> rhombisch anisotrop 3.. $\hat{=}$ Dickenrichtung	Elastizitätsgrößen: $E_W, E_F, \nu_{FW}, G_{WF}$ (2D) $E_3, \nu_{3W}, \nu_{3F}, G_{F3}, G_{W3}$ ...zus. (3D) Festigkeiten: $R_W^t, R_W^c, R_F^t, R_F^c, R_{WF}$ (2D) $R_3^t, R_3^c, R_{3W}, R_{3F}$ ...zus. (3D)
<b>M-Schicht</b> transversal-isotrop (3D), quasi-isotrop (2D) 3.. $\hat{=}$ Dickenrichtung	Elastizitätsgrößen: $E_M, \nu_M$ ...Schichtebene (2D) $E_3, G_{3M}, \nu_{3M}$ Festigkeiten: $R_M^t, R_M^c, R_M^S$ ...Schichtebene (2D) $R_3^t, R_3^c, R_{3M}$ (3D)

**Anmerkung:** Im Falle der M-Schicht wird der Index M (ebenso wie die Indizes W und F bei der G-Schicht) als Richtungsangabe benutzt, weil es in der Schichtebene auf Grund der Isotropie der M-Schicht keine Vorzugsrichtung gibt.

The *macromechanical* parameters shown in Table 1 and which normally derive from experiments with isolated laminae should be used in calculations, depending on the type of reinforcement used in the lamina.

It is also possible to estimate these values on the basis of the properties of the FRP material components matrix and fibres with the aid of the *micromechanical* formulae provided in VDI 2014 Part 1. However, this will require the technical properties of the basic materials and also their volume contents and distributions in the lamina to be known.

Accordingly, micromechanical calculation of the Young's modulus parallel to the fibre direction of a UD lamina (with a fibre volume content of 55 %) with Young's moduli of around 3000 MPa for the epoxy resin matrix and about 75000 MPa for the low-alkali glass fibres will yield a result of  $E_{||} = 43000$  MPa approximately.

Due to the reinforcement materials available, FRP laminae have symmetries in their engineering properties. In UD laminae, for example, all planes whose perpendicular vector is transverse with respect to the fibre direction are planes of symmetry. In the case of the WF lamina, planes of symmetry pass through the warp and fill directions.

The UD lamina is transversely isotropic. On planes parallel with the fibre direction it behaves orthotropi-

Table 1. Elasticity and strength properties of UD, woven-fabric – reinforced and mat – reinforced lamina

Typ of reinforcement	Elasticity and strength properties
<b>UD-lamina</b> transversely isotropic	Elasticity properties: $E_{  }, E_{\perp}, \nu_{\perp  },$ (or $\nu_{  \perp}, G_{\perp  }$ ) (2D) $\nu_{\perp\perp}$ ...additionally (3D) Strengths: $R_{  }^t, R_{  }^c, R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\perp\perp}, R_{\perp  }, R_{\perp\perp}^A$ (3D)
<b>WF-lamina</b> rhombically anisotropic 3.. $\hat{=}$ thickness direction	Elasticity properties: $E_W, E_F, \nu_{FW}, G_{WF}$ (2D) $E_3, \nu_{3W}, \nu_{3F}, G_{F3}, G_{W3}$ ...additionally (3D) Strengths: $R_W^t, R_W^c, R_F^t, R_F^c, R_{WF}$ (2D) $R_3^t, R_3^c, R_{3W}, R_{3F}$ ...additionally (3D)
<b>M-lamina</b> transversely isotropic (3D), quasi-isotropic (2D) 3.. $\hat{=}$ thickness direction	Elasticity properties: $E_M, \nu_M$ ...in-plane (2D) $E_3, G_{3M}, \nu_{3M}$ Strengths: $R_M^t, R_M^c, R_M^S$ ...in-plane (2D) $R_3^t, R_3^c, R_{3M}$ (3D)

**Note:** In case of the M-lamina we use M as a direction index (as it is also done with the indices W and F for the WF-lamina), because of lack of any marked orientation within the lamina plane due to isotropy of the M-lamina.

und in einer senkrecht zur Faserrichtung gedachten Ebene isotrop.

G-Schichten müssen auf Grund ihrer Struktur als rhombisch-anisotrop (orthotrop) betrachtet werden. Dabei können unterschiedliche Faservolumenanteile in Kett- und Schussrichtung vorliegen.

Die M-Schicht darf bei ebener Beanspruchung als in ihrer Schichtebene isotrop, also ohne ausgeprägte Orientierung betrachtet werden. Als isotrop können auch so genannte *Interface-Schichten* aus Reinharz oder Kleber angesehen werden.

Die für die Rechnung erforderlichen 2D-Schichtkennwerte sind gemeinsam mit den 3D-Werten in Tabelle 1 für die verschiedenen Schicht-Typen zusammengestellt. Diese Kennwerte beziehen sich immer auf die natürlichen Achsen der Schicht. Das sind z.B. die Orthotropieachsen der G-Schicht oder die Richtungen parallel  $\parallel$  und senkrecht  $\perp$  zur Faser bei der UD-Schicht. Der Bezug auf diese Richtungen hat den Vorteil, dass Dehnungen nur mit Normalspannungen und Schubverzerrungen nur mit Schubspannungen verknüpft sind.

Als der wesentliche Bestandteil der späteren Laminat-Berechnung sind im Folgenden die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen für die eben beanspruchte Schicht zusammengestellt. Die Formulierung erfolgt im Hinblick auf die Anwendung computerunterstützter Berechnungsmethoden in Matrizenschreibweise.

#### 4.2 Eben beanspruchte Schicht

Spannung  $\sigma$  und Dehnung  $\varepsilon$  sind eine Funktion von

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= f(\{\varepsilon\}, \Delta T, \Delta M) \text{ bzw.} \\ \{\varepsilon\} &= g(\{\sigma\}, \Delta T, \Delta M) \end{aligned} \quad (1)$$

In den folgenden Abschnitten ist die Spannungsbeziehung bezüglich mechanischer und hygrothermischer Beanspruchungen getrennt abgehandelt, letztere werden exemplarisch für die UD-Schicht dargestellt. Es ist zu bemerken, dass die Spannungssuperposition aus dieser Teilberechnung nur im geometrisch und physikalisch linear elastischen Fall Gültigkeit besitzt. Im nicht-linearen Fall (sowohl geometrisch als auch physikalisch) ist der Spannungsvektor  $\{\sigma\}$  bzw.  $\{\varepsilon\}$  unter simultaner Berücksichtigung der in Gleichung (2) beschriebenen Variablen zu lösen.

##### 4.2.1 UD-Schicht (faserparalleles KOS)

###### Mechanische Beanspruchung

Beim ebenen Spannungszustand lauten die Verzerrungs-Spannungs-Beziehungen unter mechanischer Belastung für eine beliebige  $k$ -te Schicht (siehe Bild 2 und Bild 4)

$$\{\varepsilon\}_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{21})_k^T = [S]_k \{\sigma\}_k$$

cally and on an imaginary plane perpendicular to the fibre direction it behaves isotropically.

Due to their structure WF laminae must be regarded as rhombically anisotropic (orthotropic). Here the warp and fill directions may have different fibre volume contents.

With planar stress the M lamina may be considered to be isotropic on its lamina plane – in other words, lacking any marked orientation. So-called *interface laminae* consisting of pure resin or adhesive may also be regarded as isotropic.

Table 1 shows the 2D lamina properties needed for the analysis for the various lamina types together with the 3D values. These properties are always referred to the natural axes of the lamina. These include, for example, the orthotropic axes of the WF lamina, or the directions parallel  $\parallel$  and transverse  $\perp$  to the fibre in the case of the UD lamina. The advantage of referencing these directions is that elongation strains are linked only to normal stresses and shear strains only to shear stresses.

We will now pass on to a consideration of stress/strain relationships for the two-dimensionally loaded lamina as the main component of subsequent laminate analysis. Since computer-aided methods of analysis are being used here, these relationships will be expressed in matrix notation.

#### 4.2 Two-dimensionally loaded lamina

Stress  $\sigma$  and strain  $\varepsilon$  are a function of

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= f(\{\varepsilon\}, \Delta T, \Delta M) \text{ or} \\ \{\varepsilon\} &= g(\{\sigma\}, \Delta T, \Delta M) \end{aligned} \quad (1)$$

In the following sections, the stress analysis is treated separately for mechanical and hygrothermal stresses with the latter presented taking the UD lamina as an example. It should be noted that the superposition of stresses obtained from this partial analysis only has validity in geometrically and physically linear-elastic cases. In the (geometrically and physically) non-linear case the stress vector  $\{\sigma\}$  or  $\{\varepsilon\}$  should be solved by simultaneous inclusion of the variables described in Equation (2).

##### 4.2.1 UD lamina (parallel-to-fibre COS)

###### Mechanical loading

With a two-dimensional stress state the strain/stress relationships under mechanical loading for any  $k^{\text{th}}$  lamina (see Figure 2 and Figure 4) read

$$\{\varepsilon\}_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{21})_k^T = [S]_k \{\sigma\}_k$$

oder in Matrixschreibweise (Index  $k$  weggelassen)

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2)$$

das heißt ( $\varepsilon_6 \equiv \gamma_{21}$ ,  $\sigma_6 \equiv \tau_{21}$ )

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{21} \end{Bmatrix}$$

Analog gilt bei den Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen

$$\{\sigma\}_k = (\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})_k^T = [Q]_k \{\varepsilon\}_k$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{21} \end{Bmatrix}$$

oder

$$\sigma_i = Q_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (3)$$

Dabei ist

$k$  1, 2, ...,  $n$

$n$  Anzahl der Schichten

$\tau_{21}$  ist die intralaminare Schubspannung, in der Matrixindizierung auch  $\sigma_6$  genannt. Der Index 6 zur klaren Zuordnung bezüglich  $\tau_{21}$  wird später in der Laminat-Steifigkeitsmatrix  $[K]$  beibehalten. Beim UD-Werkstoff ist für ZFB infolge reiner Schubbeanspruchung die Spannung  $\tau_{21}$  und nicht  $\tau_{12}$  maßgeblich (siehe Bildunterschrift zu Bild 10).

In den Gleichungen stehen die so genannte (Werkstoff-)Nachgiebigkeitsmatrix  $[S]$  für die *unidirektional-verstärkte* Schicht

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{\parallel}} & \frac{-\nu_{\parallel\perp}}{E_{\perp}} & 0 \\ \frac{-\nu_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}} & \frac{1}{E_{\perp}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{\perp\parallel}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

sowie die (Werkstoff-)Steifigkeitsmatrix

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_{\parallel}}{1-\nu_{\parallel\perp}\nu_{\perp\parallel}} & \frac{\nu_{\perp\parallel}E_{\perp}}{1-\nu_{\parallel\perp}\nu_{\perp\parallel}} & 0 \\ \frac{\nu_{\parallel\perp}E_{\parallel}}{1-\nu_{\parallel\perp}\nu_{\perp\parallel}} & \frac{E_{\perp}}{1-\nu_{\parallel\perp}\nu_{\perp\parallel}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\perp\parallel} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Weiter gelten die Symmetriebedingung (Maxwell-Betti)

$$\nu_{\perp\parallel} E_{\perp} = \nu_{\parallel\perp} E_{\parallel} \quad (6)$$

or in matrix notation (with  $k$  subscript omitted)

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2)$$

i. e. ( $\varepsilon_6 \equiv \gamma_{21}$ ,  $\sigma_6 \equiv \tau_{21}$ )

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{21} \end{Bmatrix}$$

With the stress/strain relationships, analogously

$$\{\sigma\}_k = (\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})_k^T = [Q]_k \{\varepsilon\}_k$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{21} \end{Bmatrix}$$

or

$$\sigma_i = Q_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (3)$$

where

$k$  1, 2, ...,  $n$

$n$  number of laminae

$\tau_{21}$  is the intralaminar shear stress which is also referred to as  $\sigma_6$  in the matrix indexing. To allow clarity of assignment with respect to  $\tau_{21}$  the subscript 6 will later be retained in the laminate stiffness matrix  $[K]$ . In the case of UD material the stress  $\tau_{21}$  and not  $\tau_{12}$  is responsible for IFF due pure shear stressing (see caption to Figure 10).

In the equations the so-called (material) compliance matrix  $[S]$  stands for the *unidirectionally reinforced lamina*

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{\parallel}} & \frac{-\nu_{\parallel\perp}}{E_{\perp}} & 0 \\ \frac{-\nu_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}} & \frac{1}{E_{\perp}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{\perp\parallel}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

as well as the (material) stiffness matrix

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_{\parallel}}{1-\nu_{\parallel\perp}\nu_{\perp\parallel}} & \frac{\nu_{\perp\parallel}E_{\perp}}{1-\nu_{\parallel\perp}\nu_{\perp\parallel}} & 0 \\ \frac{\nu_{\parallel\perp}E_{\parallel}}{1-\nu_{\parallel\perp}\nu_{\perp\parallel}} & \frac{E_{\perp}}{1-\nu_{\parallel\perp}\nu_{\perp\parallel}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\perp\parallel} \end{bmatrix} \quad (5)$$

In addition the symmetry condition (Maxwell-Betti)

$$\nu_{\perp\parallel} E_{\perp} = \nu_{\parallel\perp} E_{\parallel} \quad (6)$$

und der Zusammenhang

$$[Q] = [S]^{-1} \quad (7)$$

**Anmerkung:** Beachtet werden muss – auch im Hinblick auf Verwendung der Schicht-Kennwerte in FEM-Programmen – die Indizierung der Querkontraktionszahlen, weil diese beliebig gewählt werden kann, siehe Abschnitt 2.

Da die Matrizen  $[Q]$  und  $[S]$  das Stoffgesetz der Schicht, bezogen auf die Orthotropiehauptachsen darstellen, sind die Glieder  $Q_{16} = Q_{26} = 0$  bzw.  $S_{16} = S_{26} = 0$ . Eine Normalspannung in Hauptachsenrichtung erzeugt also keine Schubverzerrung.

### Hygrothermische Beanspruchung

Verzerrungen aus mechanischen Lasten (siehe Gleichung (2):  $\{\varepsilon\}_k = [S]_k \{\sigma\}_k$ ) überlagern sich Verzerrungen aus Temperatur (Index T) und Feuchte (Index M), die zur hygrothermischen (Index H) Gesamtverzerrung

$$\{\varepsilon_H\}_k = \Delta T_k \{\alpha_T\}_k + \Delta M_k \{\alpha_M\}_k \quad (8)$$

zusammengefasst werden, sodass gilt

$$\{\varepsilon\}_k = [S]_k \{\sigma\}_k + \{\varepsilon_H\}_k \quad (9)$$

Dabei ist

$\Delta T$  Temperaturdifferenz

$\Delta M$  so genannte Feuchtekonzentrationsänderung

$\alpha_T$  in der Regel im Betriebstemperaturbereich linearisierter Temperatureausdehnungskoeffizient (CTE)

$\alpha_M$  Feuchteausdehnungskoeffizienten (CME) der  $k$ -ten Schicht

Sowohl Temperaturen als auch Feuchtigkeiten bewirken in Bezug auf das  $\parallel, \perp$ -Koordinatensystem keine Schubwinkel, das heißt es gilt

$$\begin{aligned} \{\alpha_T\}_k &= (\alpha_{T\parallel}, \alpha_{T\perp}, 0)_k^T \\ \{\alpha_M\}_k &= (\alpha_{M\parallel}, \alpha_{M\perp}, 0)_k^T \end{aligned} \quad (10)$$

Sind nach der späteren Laminat-Berechnung dann die mechanischen Verzerrungen  $\{\varepsilon\}_k$  der Schicht bekannt, so sind gemäß Gleichung (11) die Schicht-Spannungen bestimmt

$$\{\sigma\}_k = [Q]_k \cdot (\{\varepsilon\}_k - \{\varepsilon_H\}_k) \quad (11)$$

Damit ist die Festigkeitsbewertung des vorliegenden Spannungszustandes möglich.

#### 4.2.2 G-Schicht und M-Schicht

Die **G-Schicht** kann direkt als eine orthotrope Schicht, eine so genannte Kreuzschicht modelliert werden. Für den Fall fehlender Gewebekennwerte

holds, as does the relationship

$$[Q] = [S]^{-1} \quad (7)$$

**Note:** Attention should be paid – even when the lamina parameters are used in FEM programs – to the indexing of Poisson’s ratios since these can be selected as desired, see Section 2.

Since the matrices  $[Q]$  and  $[S]$  represent the constitutive law of the lamina with respect to the orthotropic main axes, this means the terms  $Q_{16} = Q_{26} = 0$  and  $S_{16} = S_{26} = 0$ . In other words, a normal stress in the direction of the main axis will not result in shear deformation.

### Hygrothermal loading

Strains arising from mechanical loads (see Equation (2):  $\{\varepsilon\}_k = [S]_k \{\sigma\}_k$ ) are overlaid by strains caused by temperature (subscript T) and moisture (subscript M) which are combined into the total hygrothermal (subscript H) strain

$$\{\varepsilon_H\}_k = \Delta T_k \{\alpha_T\}_k + \Delta M_k \{\alpha_M\}_k \quad (8)$$

so that

$$\{\varepsilon\}_k = [S]_k \{\sigma\}_k + \{\varepsilon_H\}_k \quad (9)$$

where

$\Delta T$  temperature difference

$\Delta M$  the so-called change in moisture concentration

$\alpha_T$  coefficient of temperature expansion (CTE) usually linearized within the operating temperature range

$\alpha_M$  coefficient of moisture expansion (CME) of the  $k^{\text{th}}$  lamina

Neither temperatures nor moisture values produce a shear angle with respect to the  $\parallel, \perp$  coordinate system; in other words,

$$\begin{aligned} \{\alpha_T\}_k &= (\alpha_{T\parallel}, \alpha_{T\perp}, 0)_k^T \\ \{\alpha_M\}_k &= (\alpha_{M\parallel}, \alpha_{M\perp}, 0)_k^T \end{aligned} \quad (10)$$

If the mechanical strains  $\{\varepsilon\}_k$  of the lamina are then known, following subsequent laminate analysis, then the lamina stresses will be determined using Equation (11)

$$\{\sigma\}_k = [Q]_k \cdot (\{\varepsilon\}_k - \{\varepsilon_H\}_k) \quad (11)$$

This makes it possible to undertake a strength evaluation of the stress state which is present.

#### 4.2.2 WF lamina and M lamina

The **WF lamina** can be modelled directly as an orthotropic lamina, a so-called cross-ply lamina. In the event that characteristic values for the fabric are not

darf die UD-Schicht-Modellierung als Ersatz herangezogen werden. Es ist dann darauf zu achten, dass die G-Schicht aus mehreren UD-Schichten entsprechend den Faseranteilen in Kett- und Schussrichtung modelliert wird (Faserwelligkeit aufgrund von Faserüberkreuzungen ist zu berücksichtigen). Dieser feinschichtige Aufbau muss mittensymmetrisch ausgelegt werden. Hier wird die direkte G-Schicht-Modellierung allein vorgestellt. Für diese ergeben sich die folgenden Beziehungen für mechanische Beanspruchung:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_W \\ \varepsilon_F \\ \varepsilon_{FW} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_W} & \frac{-v_{WF}}{E_F} & 0 \\ & \frac{1}{E_F} & 0 \\ \text{(symm.)} & & \frac{1}{G_{FW}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_W \\ \sigma_F \\ \tau_{FW} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

mit  $v_{FW} E_F = v_{WF} E_W$

Welche Querkontraktionszahl die größere ist, hängt vom Faservolumengehaltsverhältnis Kette zu Schuss ab.

Die **M-Schicht** wird in ihrer Ebene als isotrop und homogen angenommen, sodass

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ & \frac{1}{E} & 0 \\ \text{(symm.)} & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

gilt mit  $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$

#### 4.2.3 Drehung der UD-Schicht in das Laminat-KOS

Die Laminat-Hauptachsen fallen im Allgemeinen nicht mit jenen der Schicht zusammen. Man benötigt daher Transformationsbeziehungen für das Stoffgesetz der Schicht. Die nachfolgend angegebenen Beziehungen gelten für den in Bild 4 dargestellten Richtungssinn der Schichtwinkel  $\alpha$ .

#### Mechanische Beanspruchung

Die Spannungs- und Verzerrungsbeziehungen lauten (Schichtindex  $k$  hier weglassen, siehe Bild 2 und Bild 4)

$$\begin{aligned} \{\varepsilon'\} &= (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})^T \\ &= [T_\varepsilon] \cdot \{\varepsilon\} = [S'] \{\sigma'\} \end{aligned} \quad (14)$$

available, UD laminae modelling may be used as a substitute. Care should be taken that the WF lamina is modelled from multiple UD laminae in accordance with the fractions of fibres in the warp and fill directions (Fibre ondulation due to fibre crossings has to be taken into account). This finely layered structure must be designed so that it is symmetrical with respect to the laminate mid-plane. Here we will be concerned with direct WF-lamina modelling alone. For this we obtain the following relations for mechanical loading:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_W \\ \varepsilon_F \\ \varepsilon_{FW} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_W} & \frac{-v_{WF}}{E_F} & 0 \\ & \frac{1}{E_F} & 0 \\ \text{(symm.)} & & \frac{1}{G_{FW}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_W \\ \sigma_F \\ \tau_{FW} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

where  $v_{FW} E_F = v_{WF} E_W$

Which Poisson's ratio will be the larger depends on the fibre volume contents ratio for warp and fill.

The **M lamina** is assumed to be isotropic and homogenous in its plane so that

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ & \frac{1}{E} & 0 \\ \text{(symm.)} & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

where  $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$

#### 4.2.3 Rotation of the UD lamina into the laminate

The main axes of the laminate do not generally coincide with those of the lamina. For this reason we require transformation relationships for the constitutive law. The relationships given below apply to the sense of direction of the lamina angle  $\alpha$  shown in Figure 4.

#### Mechanical loading

The stress and strain relations (the lamina subscript  $k$  is omitted here, see Figure 2 and Figure 4) are

$$\begin{aligned} \{\varepsilon'\} &= (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})^T \\ &= [T_\varepsilon] \cdot \{\varepsilon\} = [S'] \{\sigma'\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \{\sigma'\} &= (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T \\ &= [T_\sigma] \cdot \{\sigma\} = [Q'] \{\varepsilon'\} \end{aligned} \quad (15)$$

mit den Transformationsmatrizen

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -sc \\ s^2 & c^2 & sc \\ 2sc & -2sc & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \quad (17)$$

und  $s = \sin \alpha$ ,  
 $c = \cos \alpha$ , wobei gilt:

$$[T_\varepsilon]^{-1} = [T_\sigma]^T \quad (18)$$

Gleichung (15) lautet ausgeschrieben ( $Q'_{16}$  und  $Q'_{26} \neq 0!$ )

$$\{\sigma'\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ & Q'_{22} & Q'_{26} \\ \text{(symm.)} & & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Zum Beispiel ist

$$Q'_{11} = Q_{11} c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{22} s^4$$

#### Hygrothermische Beanspruchung

$$\{\varepsilon'\} = [T_\varepsilon] \cdot \{\varepsilon\} = [T_\varepsilon] \cdot ([S] \cdot \{\sigma\} + \{\varepsilon_H\}) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [T_\sigma] \cdot \{\sigma\} = [T_\sigma] \cdot [Q] \cdot (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_H\}) \\ &= [Q'] \cdot (\{\varepsilon'\} - \{\varepsilon_H'\}) \end{aligned} \quad (20)$$

mit

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_H'\} &= [T_\varepsilon] \cdot \{\varepsilon_H\} = [T_\varepsilon] (\Delta T \{\alpha_T\} + \Delta M \{\alpha_M\}) \\ &= \Delta T \{\alpha_T'\} + \Delta M \{\alpha_M'\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\{\alpha_T'\} = (\alpha_{Tx}', \alpha_{Ty}', \alpha_{Txy}')^T \quad (22a)$$

$$\{\alpha_M'\} = (\alpha_{Mx}', \alpha_{My}', \alpha_{Mxy}')^T \quad (22b)$$

#### 4.2.4 Berücksichtigung der Schubspannungen aus Querkraft bei UD-Schichten

Bei Bauteilen mit hoher Schubbeanspruchung infolge Querkraft, z.B. bei gedrungenen Biegeträgern, oder in Lasteinleitungsbereichen sind auch die transversalen Schubspannungen  $\tau_{23}$  und  $\tau_{13}$  zu berücksichtigen.

$$\begin{aligned} \{\sigma'\} &= (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T \\ &= [T_\sigma] \cdot \{\sigma\} = [Q'] \{\varepsilon'\} \end{aligned} \quad (15)$$

with the transformation matrices

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -sc \\ s^2 & c^2 & sc \\ 2sc & -2sc & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \quad (17)$$

and  $s = \sin \alpha$ ,  
 $c = \cos \alpha$ , where:

$$[T_\varepsilon]^{-1} = [T_\sigma]^T \quad (18)$$

Fully expanded ( $Q'_{16}$  and  $Q'_{26} \neq 0!$ ), Equation (15) is

$$\{\sigma'\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ & Q'_{22} & Q'_{26} \\ \text{(symm.)} & & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

For example

$$Q'_{11} = Q_{11} c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{22} s^4$$

#### Hygrothermal loading

$$\{\varepsilon'\} = [T_\varepsilon] \cdot \{\varepsilon\} = [T_\varepsilon] \cdot ([S] \cdot \{\sigma\} + \{\varepsilon_H\}) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [T_\sigma] \cdot \{\sigma\} = [T_\sigma] \cdot [Q] \cdot (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_H\}) \\ &= [Q'] \cdot (\{\varepsilon'\} - \{\varepsilon_H'\}) \end{aligned} \quad (20)$$

where

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_H'\} &= [T_\varepsilon] \cdot \{\varepsilon_H\} = [T_\varepsilon] (\Delta T \{\alpha_T\} + \Delta M \{\alpha_M\}) \\ &= \Delta T \{\alpha_T'\} + \Delta M \{\alpha_M'\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\{\alpha_T'\} = (\alpha_{Tx}', \alpha_{Ty}', \alpha_{Txy}')^T \quad (22a)$$

$$\{\alpha_M'\} = (\alpha_{Mx}', \alpha_{My}', \alpha_{Mxy}')^T \quad (22b)$$

#### 4.2.4 Inclusion of shear stresses from transverse forces in case of UD laminae

In the case of components where high shear stress is found as a consequence of transverse forces – for example, in deep beams or in load introduction areas – the transverse shear stresses  $\tau_{23}$  and  $\tau_{13}$  should be taken into account.



**Mechanische Beanspruchung (faserparalleles KOS)**

Um den Einfluss der transversalen (senkrecht zur Oberfläche wirkenden) Schubbeanspruchung auf die Schnittkräfte und Verformungen des Laminates untersuchen zu können, muss Gleichung (5) um Zeilen, die die Beziehung zwischen den transversalen Schubspannungen und Schubverformungen herstellen, erweitert werden. Sie lauten für die Spannungs-Verzerrungsbeziehung nach Umordnung von  $\tau_{21}$

$$\{\sigma\} = [Q] \{\varepsilon\} \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{21} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}$$

mit  $Q_{44} = G_{\perp\perp}$ ,  $Q_{55} = G_{\parallel\parallel} = Q_{66}$

**Mechanical loading (parallel-to-fibre COS)**

To make it possible to investigate the influence of the transverse (working perpendicularly with respect to the surface) shear stress on the section forces and strains of the laminate, lines must be added to Equation (5) which express the relationship between transverse shear stresses and shear strains. For the stress/strain relationship following rearrangement of  $\tau_{21}$ , these are

$$\{\sigma\} = [Q] \{\varepsilon\} \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{21} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}$$

with  $Q_{44} = G_{\perp\perp}$ ,  $Q_{55} = G_{\parallel\parallel} = Q_{66}$

**Mechanische Beanspruchung (gedrehtes KOS)**

Hier sind die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen

$$\{\sigma\} = [Q'] \{\varepsilon'\} = [T_\sigma] [Q] [T_\sigma]^T \{\varepsilon'\} \tag{24}$$

heranzuziehen mit

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & 2sc & 0 & 0 \\ sc & -sc & (c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \tag{25}$$

In Ausnahmefällen – wie der Auswertung von Werkstoff-Probekörperergebnissen – kann es notwendig sein, die Schichten eines Laminates Schicht für Schicht räumlich zu erfassen.

**Mechanical loading (rotated COS)**

Here the stress/strain relationships

$$\{\sigma\} = [Q'] \{\varepsilon'\} = [T_\sigma] [Q] [T_\sigma]^T \{\varepsilon'\} \tag{24}$$

are to be enlisted whereby

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & 2sc & 0 & 0 \\ sc & -sc & (c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \tag{25}$$

In exceptional cases – such as the evaluation of results from material test specimens – it may be necessary to cover the laminae of a laminate three-dimensionally for each lamina individually.

**4.3 Räumlich beanspruchte Schichten**

**4.3.1 Mechanische Beanspruchung (faserparalleles KOS)**

Für die Modellierung der räumlich beanspruchten **UD-Schicht** wird das Werkstoffgesetz auf den räumlichen Fall erweitert, sodass analog Gleichung (2) bis Gleichung (11) geschrieben wird

$$\{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\} \text{ bzw. } \{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \tag{26}$$

und ausführlicher in üblicher technischer Schreibweise ( $i = 1, 2, 3$  Koordinatenrichtungen) der so genannte Verzerrungszustandsvektor

$$\{\varepsilon\} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{21})^T \tag{27}$$

**4.3 Laminae subject to three-dimensional loading**

**4.3.1 Mechanical loading (parallel-to-fibre COS)**

For the purpose of modelling the **UD lamina** under three-dimensional loading, the three-dimensional equations are added to the constitutive law which, analogously to Equation (2) to Equation(11), yields

$$\{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\} \text{ or } \{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \tag{26}$$

and more fully in the usual technical notation ( $i = 1, 2, 3$  coordinate directions) the so-called strain state vector

$$\{\varepsilon\} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{21})^T \tag{27}$$

bzw. der Spannungszustandsvektor

$$\{\sigma\} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T \quad (28a)$$

In Matrizen-Schreibweise ( $j = 1$  bis 6 Zeilen oder Spalten)  $\sigma_j \equiv \{\sigma\}$  schreibt sich letzterer

$$\{\sigma\} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)^T \quad (28b)$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix in Gleichung (26) lautet

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{\parallel}} & \frac{-\nu_{\parallel\perp}}{E_{\perp}} & \frac{-\nu_{\parallel\perp}}{E_{\perp}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}} & \frac{1}{E_{\perp}} & \frac{-\nu_{\perp\parallel}}{E_{\perp}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}} & \frac{-\nu_{\perp\parallel}}{E_{\perp}} & \frac{1}{E_{\perp}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{\perp\perp}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{\perp\parallel}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{\perp\parallel}} \end{bmatrix} \quad (29)$$

(symm.)

transversal-isotrop

mit

$$G_{\perp\perp} = \frac{E_{\perp}}{2(1 + \nu_{\perp\perp})} \quad (30)$$

Die Vektoren der Temperatur- und Feuchteausdehnungskoeffizienten im räumlichen Fall sind

$$\{\alpha_T\} = (\alpha_{T\parallel}, \alpha_{T\perp}, \alpha_{T\perp}, 0, 0, 0)^T \quad (31a)$$

$$\{\alpha_M\} = (\alpha_{M\parallel}, \alpha_{M\perp}, \alpha_{M\perp}, 0, 0, 0)^T \quad (31b)$$

sodass die allgemeinen Verzerrungs-Spannungs-Beziehungen ausgeschrieben lauten (Gleichung (32))

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{21} \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{Bmatrix} + \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_{T\parallel} \\ \alpha_{T\perp} \\ \alpha_{T\perp} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \Delta M \begin{Bmatrix} \alpha_{M\parallel} \\ \alpha_{M\perp} \\ \alpha_{M\perp} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Eine **G-Schicht** hat maximal neun voneinander unabhängige Elastizitätskonstanten. Diese Anzahl reduziert sich auf sechs, falls in W(Kett)- und F(Schuss)-Richtung gleich viel Fasern liegen, da  $E_W = E_F$  und  $G_{F3} = G_{W3}$ , und  $\nu_{3W} = \nu_{3F}$

In Berücksichtigung ungleicher Faserflächengewichte in Kett- und Schussrichtung,  $(x_W, x_F, x_3)$ -KOS, ergibt sich somit für die Nachgiebigkeitsmatrix  $[S]$

and the stress state vector

$$\{\sigma\} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})^T \quad (28a)$$

In matrix (contracted) notation ( $j = 1$  to 6 rows or columns)  $\sigma_j \equiv \{\sigma\}$  the latter will be written

$$\{\sigma\} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)^T \quad (28b)$$

The compliance matrix in Equation (26) is

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{\parallel}} & \frac{-\nu_{\parallel\perp}}{E_{\perp}} & \frac{-\nu_{\parallel\perp}}{E_{\perp}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}} & \frac{1}{E_{\perp}} & \frac{-\nu_{\perp\parallel}}{E_{\perp}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}} & \frac{-\nu_{\perp\parallel}}{E_{\perp}} & \frac{1}{E_{\perp}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{\perp\perp}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{\perp\parallel}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{\perp\parallel}} \end{bmatrix} \quad (29)$$

(symm.)

transversely isotropic

where

$$G_{\perp\perp} = \frac{E_{\perp}}{2(1 + \nu_{\perp\perp})} \quad (30)$$

In the 3D case the vectors of the coefficients of expansion for temperature and moisture are

$$\{\alpha_T\} = (\alpha_{T\parallel}, \alpha_{T\perp}, \alpha_{T\perp}, 0, 0, 0)^T \quad (31a)$$

$$\{\alpha_M\} = (\alpha_{M\parallel}, \alpha_{M\perp}, \alpha_{M\perp}, 0, 0, 0)^T \quad (31b)$$

which means that the general strain/stress relationships written in full will be (Equation 32)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{21} \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{Bmatrix} + \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_{T\parallel} \\ \alpha_{T\perp} \\ \alpha_{T\perp} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \Delta M \begin{Bmatrix} \alpha_{M\parallel} \\ \alpha_{M\perp} \\ \alpha_{M\perp} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

A **WF lamina** may not have more than nine mutually independent elastic constants. This number will fall to six should there be an equal number of fibres in the W (warp) and F (fill) directions since  $E_W = E_F$  and  $G_{F3} = G_{W3}$ , and  $\nu_{3W} = \nu_{3F}$

Taking into consideration unequal fibre weight in the warp and fill directions,  $(x_W, x_F, x_3)$  COS, this yields the following for the compliance matrix  $[S]$

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_W} & -\frac{\nu_{WF}}{E_F} & -\frac{\nu_{W3}}{E_F} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_F} & -\frac{\nu_{F3}}{E_F} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \text{(symm.)} & & & \frac{1}{G_{F3}} & 0 & 0 \\ \boxed{\text{orthotrop (auch als rhombisch anisotrop bezeichnet)}} & & & & \frac{1}{G_{W3}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{WF}} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_W} & -\frac{\nu_{WF}}{E_F} & -\frac{\nu_{W3}}{E_F} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_F} & -\frac{\nu_{F3}}{E_F} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \text{(symm.)} & & & \frac{1}{G_{F3}} & 0 & 0 \\ \boxed{\text{orthotropic (also called rhombically anisotropic)}} & & & & \frac{1}{G_{W3}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{WF}} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Als Anwendungsbeispiele (Werkstoff CFK) seien die entsprechenden Werte für eine UD-Schicht und für ein nicht „ausgeglichenes Gewebe“ (Schuss und Kette mit unterschiedlichen Fasermengen) angegeben:

- UD-Schicht ( $\varphi = 0,6$ )  
 $E_{||} = 140000 \text{ MPa}$ ;  $E_{\perp} = 10000 \text{ MPa}$ ;  
 $G_{\perp||} = 5500 \text{ MPa}$ ;  
 $\nu_{\perp||} = 0,3$  ;  $\nu_{\perp\perp} = 0,4$
- G-Schicht ( $\varphi = 0,6$ )  
 $E_W = 110000 \text{ MPa}$ ;  $E_F = 35000 \text{ MPa}$ ;  
 $E_3 = 11000 \text{ MPa}$ ;  
 $G_{F3} = 4500 \text{ MPa}$ ;  $G_{W3} = 5000 \text{ MPa}$ ;  
 $G_{WF} = 5500 \text{ MPa}$ ;  
 $\nu_{FW} = 0,07$ ;  $\nu_{3W} = 0,25$ ;  $\nu_{3F} = 0,08$

As application examples (material: CFRP) the corresponding values for a UD lamina and for a “balanced fabric” (where warp and fill have different fibre quantities) should be given:

- UD-Schicht ( $\varphi = 0,6$ )  
 $E_{||} = 140000 \text{ MPa}$ ;  $E_{\perp} = 10000 \text{ MPa}$ ;  
 $G_{\perp||} = 5500 \text{ MPa}$ ;  
 $\nu_{\perp||} = 0,3$  ;  $\nu_{\perp\perp} = 0,4$
- G-Schicht ( $\varphi = 0,6$ )  
 $E_W = 110000 \text{ MPa}$ ;  $E_F = 35000 \text{ MPa}$ ;  
 $E_3 = 11000 \text{ MPa}$ ;  
 $G_{F3} = 4500 \text{ MPa}$ ;  $G_{W3} = 5000 \text{ MPa}$ ;  
 $G_{WF} = 5500 \text{ MPa}$ ;  
 $\nu_{FW} = 0,07$ ;  $\nu_{3W} = 0,25$ ;  $\nu_{3F} = 0,08$

### 4.3.2 Mechanische Beanspruchung einer UD-Schicht (gedrehtes KOS)

Bei Drehung einer räumlich beanspruchten UD-Schicht werden analog Gleichung (14) und Gleichung (24)

$$\{\varepsilon'\} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})^T = [T_{\varepsilon}] \{\varepsilon\} \quad (34a)$$

$$\{\sigma'\} = [T_{\sigma}] [C] [T_{\sigma}]^T \{\varepsilon'\} = [C'] \{\varepsilon'\} \quad (34b)$$

die Transformationsmatrizen

$$[T_{\sigma}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ sc & -sc & 0 & 0 & 0 & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$[T_{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 2sc & -2sc & 0 & 0 & 0 & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \quad (36)$$

### 4.3.2 Mechanical loading of a UD lamina (rotated COS)

In the case of rotation of a UD lamina under three-dimensional loading, analogously to Equation (14) and Equation (24)

$$\{\varepsilon'\} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})^T = [T_{\varepsilon}] \{\varepsilon\} \quad (34a)$$

$$\{\sigma'\} = [T_{\sigma}] [C] [T_{\sigma}]^T \{\varepsilon'\} = [C'] \{\varepsilon'\} \quad (34b)$$

the transformation matrices

$$[T_{\sigma}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ sc & -sc & 0 & 0 & 0 & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$[T_{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 2sc & -2sc & 0 & 0 & 0 & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \quad (36)$$

herangezogen, wobei wiederum gilt [Lek63]

$$\begin{aligned} [T_\sigma]^{-1} &= [T_\epsilon]^T \\ [T_\epsilon]^{-1} &= [T_\sigma]^T \end{aligned} \quad (18)$$

#### 4.4 Einfluss von Beanspruchungsarten/-dauer

##### 4.4.1 Kurzzeitbeanspruchung

Kurzzeitbeanspruchung bedeutet, dass die Last von Null zügig und monoton bis zum Bruch gesteigert wird. Unter zügig ist ein Zeitraum von einigen Sekunden bis wenigen Minuten zu verstehen. Die meisten Werkstoffkennwerte – und damit die Dimensionierungsgrundlage für FKV – wurden unter Kurzzeitbeanspruchung ermittelt.

##### 4.4.2 Ruhende Langzeitbeanspruchung

Bei ruhender Langzeitwirkung einer Last zeigen Werkstoffe mit viskoelastischem Verhalten eine Verformungszunahme, die bei zu hoch angelegter Last (bewirkte Beanspruchung  $\sigma \approx 0,5R_m$ ) zum Bruch führt; bei konstant gehaltener Verzerrung relaxieren die Spannungen. Von den im Allgemeinen zwei Komponenten der Schicht, nämlich Faser und Matrix, darf die Faser – sofern es sich um anorganische Fasern handelt – als nicht kriechgefährdet angenommen werden. Dem in der Regel nichtlinear-viskoelastischen Verhalten der Matrix muss jedoch sowohl bei thermoplastischen als auch bei duromeren Matrices Aufmerksamkeit geschenkt werden.

In einer Schicht, die in einem Laminat eingebettet ist, kommt es zu Lastumlagerungen von der Matrix auf die Faser und zwischen den Fasern.

Die Kriechgefährdung der drei verschiedenen Schicht-Typen hängt von der Fasernanordnung ab. Grundsätzlich ist die UD-Schicht bei Beanspruchung in Faserrichtung am wenigsten und quer dazu am meisten von allen Schichttypen kriechgefährdet.

Bei einem Laminat, das UD-Schichten oder G-Schichten mit mindestens drei Richtungen enthält (statisch bestimmtes Netzwerk) ist bei „nicht“-kriechender Faser unter Zug kein (aufwändiger) Kriechnachweis nötig. Bei Druck und Biegung ist der Einfluss größer, da die Last immer über „Matrixbrücken“ geleitet wird.

Bei einer M-Schicht ist Kriechen ein wesentliches Problem für alle Belastungen Zug, Druck und Biegung.

##### Viskoelastisches Kriechen der UD-Schicht und M-Schicht

Im technischen Bereich dürfen aufgrund der funktionalen Anforderungen an das Bauteil keine hohen Dehnungen auftreten. Die erlaubten Kriech-Dehnun-

are applied, whereby once again [Lek63]

$$\begin{aligned} [T_\sigma]^{-1} &= [T_\epsilon]^T \\ [T_\epsilon]^{-1} &= [T_\sigma]^T \end{aligned} \quad (18)$$

#### 4.4 Influence of loading type and duration

##### 4.4.1 Short-term load

Short-term loading means that the load is increased rapidly and monotonically from zero to failure. By rapidly we mean a time period extending from a few seconds to a few minutes. Most characteristic values for materials (and therefore the basis for dimensioning FRP) have been obtained under conditions of short-term loading.

##### 4.4.2 Long-term static load

When subjected to long-term static stress, materials with viscoelastic properties exhibit an increase in strain which results in failure, when an excessive load is applied (stress created  $\sigma \approx 0,5R_m$ ). When the strain is kept constant, the stresses relax. Of the two (in most cases) components of the lamina – namely, fibres and matrix – the fibres (should these be inorganic fibres) must be assumed not to be at risk of creep. However, attention must be paid to what are usually the non-linear viscoelastic properties of the matrix, whether the latter be a thermoplastic or a thermoset matrix.

In a lamina which is embedded in a laminate, load redistribution from the matrix to the fibres and between the fibres will occur.

The threat of creep occurring in the three different types of lamina depends on the arrangement of the fibres. Basically, of all the lamina types, the UD lamina is the least endangered by creep when stress is in the fibre direction and the most endangered when stress is across the fibre direction.

In the case of a laminate which contains UD laminae or WF laminae with at least three directions (statically defined network) no (complicated) creep verification is required for “non”-creeping fibres under tensile loading. There is a stronger influence with compression and bending since the load is always transferred via “matrix bridges”.

In the case of an M lamina, creep is a major problem for all kinds of stress – tensile, compressive and bending.

##### Viscoelastic Creeping of the UD lamina and M lamina

In the technical area, functional requirements do not permit large strains in the structural part. The permitted creep strains usually lie in the viscoelastic do-

gen liegen daher in der Regel im viskoelastischen Bereich. Damit lässt sich das im folgenden Abschnitt betrachtete viskoelastische Kriechverhalten ähnlich zu den Gleichungen der CLT für elastisches Verhalten, also quasi-elastisch formulieren.

Im Falle der **UD-Schicht** sind in der Nachgiebigkeitsmatrix [S] die vier voneinander unabhängigen Kriechfunktionen  $\Phi_{ij}$  entsprechend

$$\begin{aligned} S_{11} &\Rightarrow \Phi_{11} = 1/E_{\parallel}(t, T, \sigma_0) \\ S_{22} &\Rightarrow \Phi_{22} = 1/E_{\perp}(t, T, \sigma_0) \\ S_{12} &\Rightarrow \Phi_{12} = -\nu_{\perp\parallel}/E_{\perp}(t, T, \sigma_0) \\ S_{66} &\Rightarrow \Phi_{66} = 1/G_{\perp\parallel}(t, T, \sigma_0) \end{aligned} \quad (37a-d)$$

einzusetzen. Die Kriechfunktionen sind abhängig von den Parametern Temperatur  $T$ , anliegender Spannung  $\sigma_0$  und Feuchte  $M$  (im Weiteren als konstanter Parameter betrachtet). Quasielastisch sind die Kriechfunktionen  $\Phi_{ij}$  unabhängig vom Beanspruchungsniveau  $\sigma_0$ .

Relevant für das Kriechen sind  $\Phi_{22}$ ,  $\Phi_{12}$  und  $\Phi_{66}$ . Diese Funktionen können auf UD-Schicht-Niveau mit zwei Langzeitmessungen am Querkzug-Probekörper ( $\Phi_{22} = \varepsilon_x/\sigma_0$ ,  $\Phi_{12} = \varepsilon_y/\sigma_0$ ) und einer am  $\pm 45^\circ$ -Zug-Probekörper ( $\Phi_{66} = [2\varepsilon_x((1 - \varepsilon_y)/\varepsilon_x)]/\sigma_0$ ) direkt gewonnen werden.

Da aber eher Messungen an Matrices vorliegen, wird angestrebt, die  $\Phi_{ij}$  näherungsweise auf mikromechanischem Niveau mit den entsprechenden Formeln für  $E_{\parallel}$ ,  $E_{\perp}$ ,  $G_{\perp\parallel}$  und  $\nu_{\perp\parallel}$  zu ermitteln. Für eine nicht-kriechende, anisotrope Faser (z.B. C-Faser) liegen nach *Puck* und *Förster* [Schü05] folgende mikromechanischen Gleichungen vor

$$E_{\parallel} = E_f \cdot \varphi + E_m(1 - \varphi) \cong E_f \quad (38a-d)$$

$$E_{\perp} = \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \left( \frac{1 + 0,85\varphi^2}{(1 - \varphi)^{1,25} + \varphi \cdot E_m/(E_{f\perp} \cdot (1 - \nu_m^2))} \right)$$

$$G_{\perp\parallel} = G_m \cdot (1 + 0,4\varphi^{0,5}) / ((1 - \varphi)^{1,45} + \varphi \cdot G_m/G_{f\perp\parallel})$$

$$\nu_{\perp\parallel} = \nu_{f\perp} \cdot \varphi + \nu_m(1 - \varphi)$$

mit  $G_m = E_m/(2 + 2\nu_m)$  für  $0,25 \leq \varphi \leq 0,65$ . Die drei verwendeten, nicht-messbaren Faserwerte lassen sich aus vorhandenen UD-Schichtwerten rückwärts ermitteln. Zu bestimmen sind somit nur noch  $E_m$  und  $\nu_m$ .

Ziel ist es nun, alle drei Kriechfunktionen auf die zu messende Kriechfunktion  $\Phi_m$  der einachsigen beanspruchten Matrix mittels der Gleichungen

main. Therefore, the viscoelastic creep behaviour – described in the following section can be formulated quasi-elastically in a similar way to the CLT equations for elastic behaviour.

In the case of a UD lamina, the four mutually independent creep functions  $\Phi_{ij}$

$$\begin{aligned} S_{11} &\Rightarrow \Phi_{11} = 1/E_{\parallel}(t, T, \sigma_0) \\ S_{22} &\Rightarrow \Phi_{22} = 1/E_{\perp}(t, T, \sigma_0) \\ S_{12} &\Rightarrow \Phi_{12} = -\nu_{\perp\parallel}/E_{\perp}(t, T, \sigma_0) \\ S_{66} &\Rightarrow \Phi_{66} = 1/G_{\perp\parallel}(t, T, \sigma_0) \end{aligned} \quad (37a-d)$$

are to be inserted into the compliance matrix [S]. These creep functions are depending on the parameters temperature  $T$ , applied stress  $\sigma_0$  and moisture  $M$  (further considered constant). Quasi-elastic creep functions  $\Phi_{ij}$  are independent of the stress level  $\sigma_0$ .

Relevant for creeping are  $\Phi_{22}$ ,  $\Phi_{12}$  and  $\Phi_{66}$ . These functions can be obtained on UD lamina level directly by two long-term measurements on a transverse tensile specimen ( $\Phi_{22} = \varepsilon_x/\sigma_0$ ,  $\Phi_{12} = \varepsilon_y/\sigma_0$ ) and the third one with the  $\pm 45^\circ$  tensile specimen ( $\Phi_{66} = [2\varepsilon_x((1 - \varepsilon_y)/\varepsilon_x)]/\sigma_0$ ).

Since, however, it is measurements relating to matrices which tend to be available, an effort is made to determine approximate values for  $\Phi_{ij}$  on the micromechanical level by using the corresponding formulae for  $E_{\parallel}$ ,  $E_{\perp}$ ,  $G_{\perp\parallel}$  and  $\nu_{\perp\parallel}$ . For a non-creeping anisotropic fibre (e.g. C fibre) following *Puck* and *Förster* [Schü05] the following micromechanical equations are proposed

$$E_{\parallel} = E_f \cdot \varphi + E_m(1 - \varphi) \cong E_f \quad (38a-d)$$

$$E_{\perp} = \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \left( \frac{1 + 0,85\varphi^2}{(1 - \varphi)^{1,25} + \varphi \cdot E_m/(E_{f\perp} \cdot (1 - \nu_m^2))} \right)$$

$$G_{\perp\parallel} = G_m \cdot (1 + 0,4\varphi^{0,5}) / ((1 - \varphi)^{1,45} + \varphi \cdot G_m/G_{f\perp\parallel})$$

$$\nu_{\perp\parallel} = \nu_{f\perp} \cdot \varphi + \nu_m(1 - \varphi)$$

with  $G_m = E_m/(2 + 2\nu_m)$  for  $0,25 \leq \varphi \leq 0,65$ . The three non-measurable fibre properties applied can be computed backward. Just  $E_m$  and  $\nu_m$  remain to be determined.

The aim is to trace all creep functions back to the creep function  $\Phi_m$  of the uni-axially stressed matrix

$$\begin{aligned} \varepsilon_m(t, T, \sigma_0) &= \varepsilon_m^{in} (1 + \varepsilon_m^{cr}(t, T, \sigma_0) / \varepsilon_m^{in}) \\ &= \varepsilon_m^{in} \cdot E_m^{in} \cdot \Phi_m(t, T, \sigma_0) = \varepsilon_m^{in} \cdot \tilde{\Phi}_m \\ &= \sigma_0 \cdot \Phi_m = \sigma_0 / E_m(t, T, \sigma_0) \end{aligned} \quad (39a)$$

zurückzuführen, womit  $E_m = 1 / \Phi_m$  gilt, siehe Bild 6. Für den rechnerischen Übergang auf die zweiachsig beanspruchte Schicht wird als zweite Größe die zeitabhängige Querkontraktionszahl benötigt. Diese lässt sich unter der Annahme von Volumenkonstanz mit folgender Beziehung

$$v_m(t, T, \sigma_0) \approx 0,5 \left( 1 - \frac{[1 - 2v_m^0]}{\tilde{\Phi}_m(t, T, \sigma_0)} \right) \quad (39b)$$

genügend genau abschätzen [Med81], sodass alle zeitveränderlichen Größen in den Gleichungen (37) bekannt sind.

Zur (näherungsweisen) Abbildung der Kriechkurven  $\Phi$  (Bild 7) werden unterschiedliche Ansatzfunktio-

$$\begin{aligned} \varepsilon_m(t, T, \sigma_0) &= \varepsilon_m^{in} (1 + \varepsilon_m^{cr}(t, T, \sigma_0) / \varepsilon_m^{in}) \\ &= \varepsilon_m^{in} \cdot E_m^{in} \cdot \Phi_m(t, T, \sigma_0) = \varepsilon_m^{in} \cdot \tilde{\Phi}_m \\ &= \sigma_0 \cdot \Phi_m = \sigma_0 / E_m(t, T, \sigma_0) \end{aligned} \quad (39a)$$

outlining  $E_m = 1 / \Phi_m$ , see Figure 6. What is needed as second variable when moving up to the biaxially stressed lamina is the time-dependent Poisson's ratio. Assuming constant volume, it can be estimated with adequate precision by means of the following relation [Med81]

$$v_m(t, T, \sigma_0) \approx 0,5 \left( 1 - \frac{[1 - 2v_m^0]}{\tilde{\Phi}_m(t, T, \sigma_0)} \right) \quad (39b)$$

which means that all time-varying variables in Equation (37) are known.

For an approximate mapping of the creep curves  $\Phi$  (Figure 7) different approaches like rheological

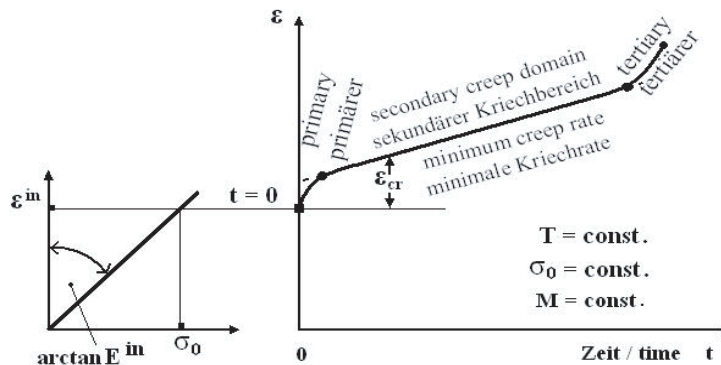


Bild 6. Definitionen beim Kriechen  
Einachsrig:  $\varepsilon(t, T, \sigma^{in}) = \sigma^{in} \cdot \Phi = \varepsilon^{in} E^{in} \Phi = \varepsilon^{in} \cdot \tilde{\Phi}$   
 $\tilde{\Phi}$  ist die normierte Kriechfunktion,  $\sigma^{in} \equiv \sigma_0$

Figure 6. Definitions in the case of creep  
Uni-axial:  $\varepsilon(t, T, \sigma^{in}) = \sigma^{in} \cdot \Phi = \varepsilon^{in} E^{in} \Phi = \varepsilon^{in} \cdot \tilde{\Phi}$   
 $\tilde{\Phi}$  is the normalised creep function,  $\sigma^{in} \equiv \sigma_0$

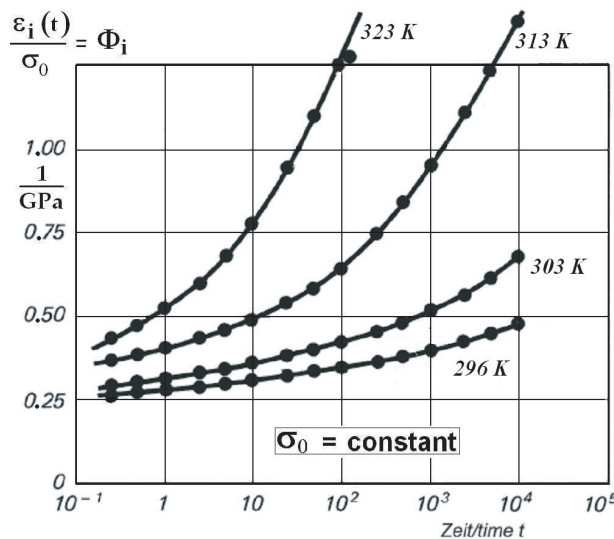


Bild 7. Einzelkriechkurven einer Matrix  
 $\varepsilon_i(t, T_i, \sigma_0) = \sigma_0 \cdot \Phi_i(t, T_i)$

Figure 7. Individual creep curves of a matrix  
 $\varepsilon_i(t, T_i, \sigma_0) = \sigma_0 \cdot \Phi_i(t, T_i)$

nen, wie rheologische Modelle oder Potenzansätze, verwendet. Hierzu sei auf die Fachliteratur verwiesen, wie [Abo91]. Ansätze dieser Art sind der von Findley  $\epsilon = \epsilon^{in} + c_1 \cdot (t/t_1)^{c_2}$  oder der einfache Potenzreihenansatz  $\epsilon = c_1 \cdot (t/t_1)^{c_2}$  mit der Bezugszeit  $t_1$  (z.B. 1 h) dimensionlos gemacht.

Im Falle der **M-Schicht** werden die beiden veränderlichen Schichtebengrößen  $E$  und  $\nu$  direkt gemessen.

**Temperatur-Zeit-Analogie (Masterkurven)**

Da beim Deformationsverhalten von viskoelastischen Werkstoffen hohe Temperaturen gleiche Effekte wie Langzeit bewirken, kann – im Falle sich thermo-rheologisch einfach verhaltender Werkstoffe – die so genannte Temperatur-Zeit-Analogie angewandt werden (siehe Bild 8 und [Abo91]), eine Testzeit einsparende empirische Vorgehensweise.

Mit Deformationsmessungen bei kurzen Prüfzeiten (10 h bis 100 h) und verschiedenen Temperaturniveaus (unterhalb Glasumwandlungstemperatur) sind daher Aussagen über das Langzeitverhalten von viskoelastisch isotropen Matrices möglich und auch für die M-Schicht, die viskoelastisch quasi-isotrop ist. Bei M-Schichten handelt es sich in der Regel um thermo-rheologisch einfache Werkstoffe (analog amorphe Thermoplaste, unverstärkte Duromere), sodass zur Erzielung so genannte Masterkurven nur Achsverschiebungen (shift) parallel zur Zeitachse erforderlich werden (Bild 9). Bei thermo-rheologisch komplexerem Verhalten, wie bei Thermoplasten (PP, PE) oder GFK/Duromeren, muss neben der Horizontal- noch eine Vertikalverschiebung durchgeführt werden. Die Wirkung des Shift-Faktors  $a_T(T)$  in

models or power function models are utilised. The reader is referred to the specific literature like [Abo91]. Approaches of this kind are the one of Findley  $\epsilon = \epsilon^{in} + c_1 \cdot (t/t_1)^{c_2}$  or the simple power law function  $\epsilon = c_1 \cdot (t/t_1)^{c_2}$  with the reference time  $t_1$  (appropriate 1h) providing a dimensionless formulation.

In case of the **M lamina** the two varying in-plane properties  $E$  and  $\nu$  are directly measured.

**Temperature/time analogy (master curves)**

Since high temperatures have the same effect on the deformation behaviour of viscoelastic materials as long time periods – in case of thermo-rheologically simply behaving materials – the temperature/time analogy may be applied (Figure 8 and [Abo91]), being an empirical, test time saving approach.

This means that with long-term deformation measurements over short testing periods (10 h up to 100 h) and at different temperature levels (below glass transition temperature) it is possible to predict the long-term behaviour of viscoelastically isotropic matrices and even for the M lamina which is viscoelastically quasi-isotropic. With M laminae we are usually concerned with materials which behave in a thermo-rheologically simple manner (as amorphous thermoplastics, non-reinforced thermosets) such that axial relocations are only required parallel to the time axis (Figure 9). In case of a more complex thermo-rheological behaviour, such as with thermoplastics (PP, PE) or GFRP/thermosets, besides the horizontal shift a vertical shift has to be performed [Lew91]. The shift factor  $a_T(T)$  in Figure 8 acts via  $\log(t/a_T)$ .

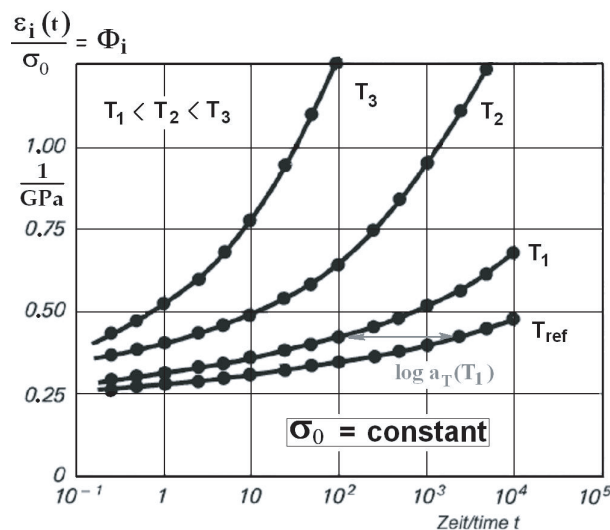


Bild 8. Darstellung des Prinzips der Temperatur-Zeit-Analogie, log a<sub>T</sub> ist Shift Faktor

Figure 8. Principle of the temperature/time analogy, log a<sub>T</sub> is shift factor

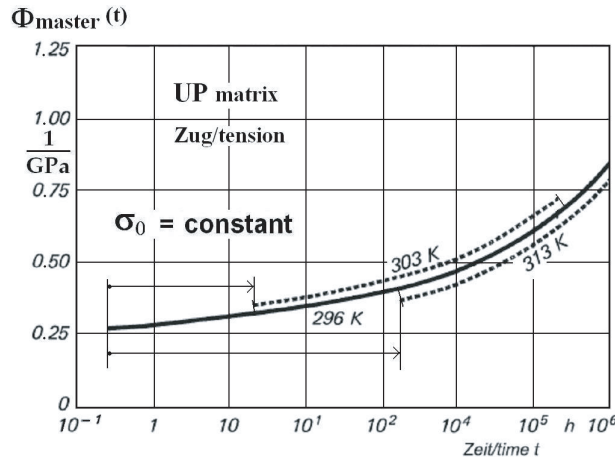


Bild 9. Kriech-Masterkurve der Matrix nach Anwendung der Temperatur-Zeit-Analogie auf gemessene Kriechkurvensätze

$$\epsilon_{\text{master}} = \sigma_0 \cdot \Phi_{\text{master}}$$

Figure 9. Creep master curve of matrix due to application of temperature/time analogy to a measured set of creep curves

$$\epsilon_{\text{master}} = \sigma_0 \cdot \Phi_{\text{master}}$$

Bild 8 erfolgt über  $\log(t/a_T)$ . Für die Referenzkurve gilt  $a_T = 1$ .

Mit  $\Phi = \epsilon/\sigma_0$  erfolgte eine Normierung der Kriechwerte auf verschiedenen Spannungsniveaus (Bild 8) [Gie81; Kna88].

For the reference curve  $a_T = 1$  is valid.

With  $\Phi = \epsilon/\sigma_0$ , a normalization of the creep values to different stress levels was carried out (Figure 8) [Gie81; Kna88].

#### Zeitstandfestigkeit von G-Faser-UD-Schichten

Trotz des an sich günstigen Kriechverhaltens von Glasfasern zeigen G-Faser-UD-Schichten das Phänomen der Zeitstandfestigkeit, auch statische Ermüdung genannt. Dieses tritt bei genügend hoher faserparalleler Langzeitbeanspruchung ( $\sigma_1 > (0,6...0,7) \cdot R_{||}^t$ ) auf. Statistisch verteilte Einzelfaserbrüche, die im Bauteil schon bei niedrigem Lastniveau vorhanden sind, führen auf Grund des viskoelastischen Verhaltens der Matrix zum fortschreitenden Versagen von Faserbündeln, das schließlich mit dem Totalversagen der UD-Schicht endet.

Bei Bauteilen aus G-Faser-UD-Schichten und insbesondere bei zusätzlicher Medieneinwirkung (Feuchte, Chemikalien) ist der statischen Ermüdung infolge faserparalleler Last unbedingt Augenmerk zu schenken und sind entsprechende versuchstechnische Abklärungen unerlässlich. Im Falle von C-Faser-UD-Schichten ist die Beanspruchbarkeit gegen statische Ermüdung höher als bei G-Faser-UD-Schichten.

#### Static fatigue of glass fibre UD laminae

Despite glass fibre having what are actually favourable creep properties, glass-fibre UD laminae nevertheless are affected by static fatigue. This occurs when long-term parallel-to-fibre stress is at a high enough level ( $\sigma_1 > (0,6...0,7) \cdot R_{||}^t$ ). Randomly distributed failures of individual fibres, which are already present in the component at a low level of loading, lead – due to the viscoelastic properties of the matrix – to the progressive failure of fibre bundles and this finally ends with the total failure of the UD lamina.

In the case of components made of glass-fibre UD laminae and particularly when there is an additional influence from media (moisture, chemicals), attention should always be paid to the static fatigue resulting from parallel-to-fibre stress and a corresponding experimental clarification is indispensable. In the case of carbon-fibre UD laminae, the capability of withstanding static fatigue is greater than with glass-fibre UD laminae.

#### 4.4.3 Schwingbeanspruchung

Die Betrachtung der veränderlichen Langzeitbeanspruchung einer isolierten Schicht bzw. ihrer Schwingfestigkeit macht für die Schicht allein wenig Sinn, da der bedeutende Einfluss der im Laminat benachbarten Schichten auf die Schwingfestigkeit dabei nicht berücksichtigt wird (siehe Abschnitt 5.3.2).

#### 4.4.3 Cyclic load

There is little sense in considering the variable long-term stress on an isolated lamina or its fatigue strength as the important influence by adjacent laminae in the laminate on the lamina fatigue strength is not considered in this case (see Section 5.3.2).



Eine Ausnahme bilden Bauteile, die ausschließlich aus lasttragenden UD-Schichten aufgebaut sind, wie z.B. GFK-Blattfedern [Goe89]. An solchen – vorwiegend durch faserparallele Spannungen beanspruchten – Bauteilen lässt sich generell folgendes Versagensverhalten der UD-Schicht (GFK) bei Schwingbelastung (Biegebeanspruchung mit dem Spannungsverhältnis  $R = 0,1$ , siehe auch Abschnitt 5.4.2) beobachten [Kni99a; Kni99b]:

- Entstehung einzelner, voneinander unabhängiger Einzelfaserbrüche weit unterhalb der FB-Grenze
- Matrixbrüche (in Form von Matrixrissen senkrecht zur Faser an den Enden der gebrochenen Fasern), Grenzflächenbrüche (parallel zu den Fasern verlaufende Risse und unter  $45^\circ$  zu den Fasern geneigte Matrixbrüche) und Ablösungen der Fasern von der Matrix (Debonding)
- Entstehung einiger koordinierter Faserbrüche in Nachbarfasern um den Einzelfaserbruch
- Ausweitung der koordinierten Faserbrüche zu Faserbruch-Clustern
- Entstehung und Wachstum von Delaminationen, die von Faserbruch-Clustern ausgehen

Die Variation des Faservolumenanteils der UD-Schicht zeigt, dass sich das Versagensverhalten bei Schwingbelastung nicht prinzipiell ändert, dass aber der Mikrorissfortschritt bei reduziertem Faservolumenanteil (Reduktion von 60 % bis 65 % auf 45 % bis 55 %) wahrscheinlich auf Grund des damit vergrößerten Abstandes der Fasern deutlich langsamer verläuft und die Lebensdauer bei gleicher faserparalleler Dehnung um Größenordnungen gesteigert werden kann.

#### 4.4.4 Stoßbeanspruchung

Beanspruchungen mit sehr hoher Geschwindigkeit nennt man Stoßbeanspruchung. Hier kommt es im Bauteil zu zeitlich und örtlich veränderlichen Spannungszuständen auf Grund sich ausbreitender und wechselwirkender Stoßwellen.

Stoßbeanspruchung tritt an FKV-Bauteilen häufig unbeabsichtigt, z.B. als Steinschlag auf. In der Regel wird dieser Beanspruchung durch schadenstolerante Konstruktion entgegengewirkt.

#### 4.5 Festigkeitskriterien

Im Laminat erfahren die Schichten fast immer einen mehrachsigen Spannungszustand. In der Regel sind aber nur Festigkeitswerte der Schicht aus Versuchen mit einachsiger Zug- und Druckbeanspruchung sowie mit reiner Schubbeanspruchung bekannt (Tabelle 1). Aus diesen wenigen gemessenen Festig-

An exception to this is the case of components composed exclusively of load-bearing UD lamina, such as GFRP leaf springs [Goe89]. In components of this kind, which are subject predominantly to stresses running parallel to the fibres, the following failure behaviour of the UD lamina (GFRP) may be observed with cyclic stress (bending stress with the stress ratio  $R = 0,1$  (see also Section 5.4.2) [Kni99a; Kni99b]:

- Occurrence of individual, mutually independent single fibre fracture far below the FF limit
- Matrix fractures (in the form of matrix cracks transverse to the fibre at the ends of the fractured fibres), interfacial fractures (cracks running parallel to the fibres and matrix fractures inclined at less than  $45^\circ$  to the fibres), and detachment of the fibres from the matrix (debonding)
- Occurrence of some coordinated single fibre failures in fibres adjacent to the already fractured fibres
- Expansion of the coordinated fibre failures into fibre failure clusters
- Occurrence and growth of delamination areas which spread out from fibre failure clusters

The variation in the fibre volume content of the UD lamina indicates that failure behaviour does not change in principle under cyclic stress but that micro crack propagation is markedly slower with a reduced fibre volume content (reduced from 60 % to 65 % to 45 % to 55 %) – this probably being ascribable to the consequent greater spacing between the fibres – while its lifetime can be increased by several orders of magnitude, assuming parallel-to-fibre strain is the same.

#### 4.4.4 Impact load

Load which occurs at a very high speed is termed impact load. Due to the spread and interaction of the shock waves, temporally and spatially variable stress states are created in the component.

Impact stress on FRP components is frequently accidental, such as impact by particles, for example. As a rule this kind of loading is considered by the so-called damage tolerant design.

#### 4.5 Strength criteria

In a laminate the laminae experience in almost all cases a multiaxial stress state. However, in the normal case the only strength values available for the lamina are those obtained from testing in uniaxial tensile and compressive stress or with pure shear stress (Table 1). On the basis of these few measured strength values

keitswerten muss auf die zum Schicht-Versagen führenden mehrachsigen Spannungszustände geschlossen werden. Dazu benutzt man Versagenskriterien. Sie beschreiben, wie verschiedene Spannungen beim Zustandekommen des Versagens zusammenwirken.

Wenn das Versagen durch Erschöpfen der Festigkeit eintritt, spricht man von *Festigkeitskriterien*. Da FKV normalerweise durch spröden Bruch versagt, sind die in Betracht kommenden Festigkeitskriterien genau genommen *Bruchkriterien*.

#### 4.5.1 Allgemeines

Auf Grund der in Bild 1 bis Bild 4 skizzierten Vorstellung eines Laminates aus „homogenisierten“ Schichten könnte, wie es in der Anfangsphase der Faserverbundkonstruktion üblich war, ein pauschales Versagenskriterium – z. B. nach *Tsai/Wu* – angewandt werden, das nur anzeigt, dass ein Versagen in der Schicht eintritt, aber nicht, welcher Art das Versagen ist. In Abschnitt 4.6.1 wird auf Gefahren hingewiesen, die sich aus einem unkritischen Anwenden solcher Kriterien ergeben können.

Bei der rechnerischen Ermittlung der zum Versagen führenden Spannungen des Berechnungselements „Schicht“ ist es nötig, dessen Idealisierung zu einem Verbund, den man sich als homogenes, orthotropes Kontinuum vorstellt, insofern aufzugeben, als ein Versagen zwischen den Fasern (*Zwischenfaserbruch*, ZFB) von einem Bruch der Fasern (*Faserbruch*, FB) unterschieden wird. Unter ZFB wird ein „makroskopischer“ Riss verstanden, der eine UD-Schicht auf ihrer ganzen Dicke durchtrennt, aber jeweils an Nachbarschichten mit anderer Faserorientierung – soweit vorhanden – gestoppt wird. Unter FB wird das Brechen einer sehr großen Anzahl von Elementarfaseren verstanden, durch das eine Schicht in einem Makrobereich ihre Tragfähigkeit in Faserrichtung einbüßt. Bei der Berechnung bleiben jedoch die in die Festigkeitskriterien einzusetzenden Spannungen, wie in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt, auf das homogenisierte Berechnungselement Schicht bezogen.

Seit den 60er Jahren wurde eine große Anzahl von Festigkeitskriterien entwickelt [Hin04], aber erst seit Anfang der 90er Jahre hat es auf dem Gebiet der experimentellen Absicherung wesentliche Fortschritte gegeben. In der Berechnungspraxis besteht gegenwärtig noch eine große Unsicherheit bezüglich der Auswahl und Anwendung geeigneter Festigkeitskriterien. Die folgenden Ausführungen sollen dazu beitragen, die Situation zu verbessern, indem der Problemkreis „Festigkeitsanalyse von FKV“ grundlegend erläutert wird.

conclusions must be arrived at regarding the multi-axial stress states which will lead to lamina failure. For this purpose, failure criteria are employed. These criteria describe how various stresses interact in bringing about failure.

When failure occurs as the result of depletion of strength, the term *strength criteria* is used. Since FRP normally fails due to brittle fracture, the relevant strength criteria are more precisely referred to as *fracture criteria*.

#### 4.5.1 General comments

On the basis of the concept of a laminate consisting of “homogenized” laminae as is shown in Figure 1 to Figure 4, it would be possible, as was usual in the initial period of fibre composite design, to apply a generalized or global failure criterion – such as the *Tsai/Wu* failure criterion, for example – which only indicates that a failure occurs in the lamina but not what kind of failure this is. Section 4.6.1 draws attention to the dangers which may arise from an uncritical application of such criteria.

In a theoretical calculation of the stress leading to failure of the “lamina” as element of the calculation, it will be necessary to eschew idealizing it as a composite imagined as a homogeneous, orthotropic continuum inasmuch as a distinction is drawn between fracture between the fibres (IFF or *inter-fibre fracture*) and a fracture of the fibres (FF or *fibre fracture*). IFF should be understood as a macroscopic crack running through the entire thickness of the layer, however is stopped at the neighboring layers, as far as these exist. FF is understood as breaking of a large amount of elementary fibres causing the loss of load bearing capacity in the fibre direction of a macroscopic area of the affected layer. However, here the stresses which are to be included in the strength criteria, will still be related to the lamina as a homogenized calculation element, as indicated in the preceding sections.

Since the 1960s a large number of strength criteria has been developed [Hin04] but it is only since the beginning of the 1990s that major advances have been made as regards backing the criteria up by experiment. In current analytical procedures there is still a great deal of uncertainty in the selection and application of suitable strength criteria. In what follows the intention is to make a contribution towards improving the situation by providing an in-depth explanation of the problem area of “strength analysis of FRP”.

Eingehendere Information findet sich in [Puc96a; Fle03; Schü05; Kno07].

More detailed information can be found in [Puc96a; Fle03; Schü05; Kno07].

**UD-Schicht**

Weil die beiden grundsätzlich verschiedene Bruchtypen sehr unterschiedliche Auswirkungen auf das Tragverhalten von Laminaten haben, müssen praxisorientierte und realitätsnahe Bruchkriterien *Faserbruch* (FB) und *Zwischenfaserbruch* (ZFB) in einer UD-Schicht unterscheiden (Bild 10). Während ZFB bei der Dimensionierung des Laminates erkannt werden muss, aber unter Umständen toleriert werden kann, ist FB meistens gleichbedeutend mit dem Verlust der Tragfähigkeit des Laminates.

**UD lamina**

Since the two essentially different fracture types have very different effects on the load-carrying capacity of laminates, it is necessary for practice-oriented and realistic strength criteria to distinguish between *fibre fracture* (FF) and *inter-fibre fracture* (IFF) in a UD lamina (Figure 10). While IFF must be taken into account when dimensioning the laminate although it can under certain circumstances be tolerated, FF, on the other hand, is in most cases equivalent to the loss of the load-bearing capacity of the laminate.

Die so genannten *Pauschal-* oder *Global-Versagenskriterien* unterscheiden nicht zwischen FB und ZFB, sondern liefern nur die Information „Versagen“. Damit fehlen die notwendigen Anhaltspunkte für eine zielstrebige Verbesserung des Tragverhaltens des Laminates.

The so-called *generalized* or *global failure criteria* do not distinguish between FF and IFF, instead merely supply the information “failure does occur”. This means that the guiding information required for improvement focussing on the load-carrying properties of the laminate is lacking.

Obwohl die Unterscheidung von FB und ZFB mikromechanischen Vorstellungen entspringt, kann für die Bruchanalyse das in Bild 1 bis Bild 4 skizzierte makromechanische Modell mit homogenisierten Schichten beibehalten werden, denn auch das Durchtrennen einer *ganzen* Schicht durch einen ZFB ist ein makromechanischer Vorgang.

Although the distinction between FF and IFF derives from micromechanical concepts, the macromechanical model with homogenized laminae which is shown in Figure 1 to Figure 4 may be retained since even the fracture of an *entire* lamina by IFF is still a macromechanical event.

Das theoretische Unterscheiden von FB und ZFB wird dadurch ermöglicht, dass gleichzeitig *zwei voneinander unabhängige* Kriterien benutzt werden, in

Distinguishing theoretically between FF and IFF is made possible by the fact that *two mutually independent* criteria in which stresses and strengths of the ho-

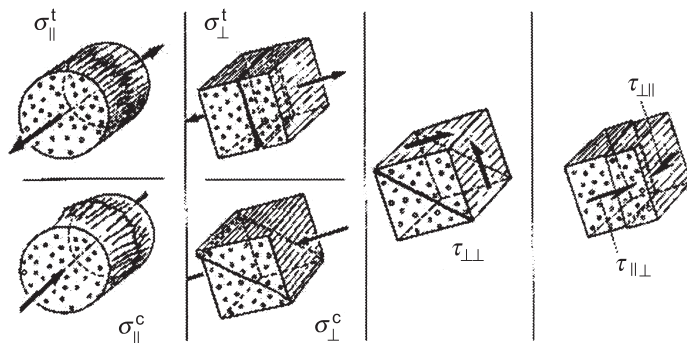


Bild 10. Basis-Beanspruchungen der UD-Schicht

Figure 10. Basic stressings in the UD lamina

$\sigma_{||}$  = Längsbeanspruchung  
 $\sigma_{\perp}$  = Querbeanspruchung

$\sigma_{||}$  = longitudinal stressing  
 $\sigma_{\perp}$  = transverse stressing

**Anmerkung:** Bei Längs- und Querbeanspruchung sind Zugbeanspruchung <sup>t</sup> und Druckbeanspruchung <sup>c</sup> zu unterscheiden.

**Note:** In longitudinal and transverse stressing a distinction must be drawn between tensile stressing <sup>t</sup> and compressive stressing <sup>c</sup>.

$\tau_{\perp\perp}$  = Quer/Quer-Schubbeanspruchung  
 $\tau_{||\perp}$  = Quer/Längs-Schubbeanspruchung

$\tau_{\perp\perp}$  = transverse/transverse shear stressing  
 $\tau_{||\perp}$  = transverse/longitudinal shear stressing

FB wird durch  $\sigma_{||}$ -Beanspruchung bewirkt. Die übrigen Beanspruchungen bewirken ZFB auf faserparallelen Ebenen. Im Bild sind die Bruchebenen angegeben, die sich bei Sprödbruchverhalten einstellen. (Die Schubbeanspruchung  $\tau_{||\perp}$  kann keinen Bruch in ihrer Wirkebene erzeugen, weil dabei Fasern abgescher werden müssten. Vorher tritt ZFB durch die gleich hohe  $\tau_{||\perp}$ -Beanspruchung ein.)

FF is caused by  $\sigma_{||}$  stressing. The remaining stressings bring about IFF on parallel-to-fibre planes. The figure shows the fracture planes which occur with brittle fracture behaviour. (The shear stressings  $\tau_{||\perp}$  cannot bring about a fracture in its action plane as fibres would then need to be sheared off. IFF will occur first due to the  $\tau_{||\perp}$  stressing of equal magnitude.)

denen Spannungen und Festigkeiten der homogenisierten UD-Schicht erscheinen.

Ein Festigkeitskriterium für die UD-Schicht wird allgemein folgendermaßen mit Spannungen und Festigkeitsgrößen formuliert:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}, R_\sigma, R_\tau) \leq 1 \quad (40)$$

Alle Festigkeitsgrößen werden stets als positive Werte angegeben.

Wenn Gleichung (40)  $F = 1$  ergibt, wird sie *Bruchbedingung* genannt. Sie stellt sich im Spannungsraum als eine Fläche dar, die so genannte *Bruchgrenzfläche*, die alle ertragbaren, das heißt gerade noch nicht zum Bruch führenden Spannungszustände einhüllt. Wird für einen Spannungszustand der Zahlenwert  $F = 1$ , so bedeutet dies, dass jegliche Spannungssteigerung zum Bruch führt. Beispielsweise ergibt sich für FB aus dem Festigkeitskriterium mit  $F = 1$  die *Bruchbedingung*

$$F = \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^t} = 1 \text{ bzw. } F = \frac{\sigma_1}{(-R_{\parallel}^c)} = 1 \quad (41)$$

Ergibt sich  $F > 1$  heißt dies, dass die Bruchgrenze überschritten ist.

Wenn der betrachtete Spannungszustand eine Kombination aus drei Spannungen ist, z.B. aus  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ , stellt sich die Bruchgrenzfläche als Oberfläche eines dreidimensionalen Körpers dar (Bild 11). An diesem lassen sich FB und ZFB zugeordnete Flächen unterscheiden.

Oft genügt es, bei ZFB-Untersuchungen nur das Zusammenwirken von  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  zu betrachten. Kombinationen von nur zwei Spannungen, die zum Bruch führen, stellen ebene Schnitte durch den mehrdimensionalen Bruchgrenzkörper dar. Ein solcher Schnitt

mogenized lamina appear are being used simultaneously.

A strength criterion for the UD lamina is generally formulated with stresses and strength parameters as follows:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}, R_\sigma, R_\tau) \leq 1 \quad (40)$$

All strength parameters are always inserted as positive values.

If Equation (40) results in  $F = 1$ , it is termed the *fracture condition*. In the stress space it appears as a surface – the so-called *fracture limit surface* which envelopes all sustainable stress states – in other words, those which are just not able to bring about fracture. When a numerical value of  $F = 1$  occurs for a stress state, this indicates that any increase in stress will result in fracture. For example, in the case of FF from the strength criterion with  $F = 1$  the following *fracture condition* arises:

$$F = \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^t} = 1 \text{ bzw. } F = \frac{\sigma_1}{(-R_{\parallel}^c)} = 1 \quad (41)$$

If  $F > 1$ , this means the fracture limit has been exceeded.

If the stress state under consideration is a combination of three stresses,  $\sigma_1, \sigma_2$  and  $\tau_{21}$ , for example, the fracture envelope will appear as the surface of a three-dimensional body (Figure 11). Here surfaces to be assigned to FF and IFF may be distinguished.

It is often sufficient in IFF analyses to consider only the interaction of  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$ . Combinations of two stresses which result in fracture represent plane sections through the multidimensional fracture body. One such section – for the  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  combination of

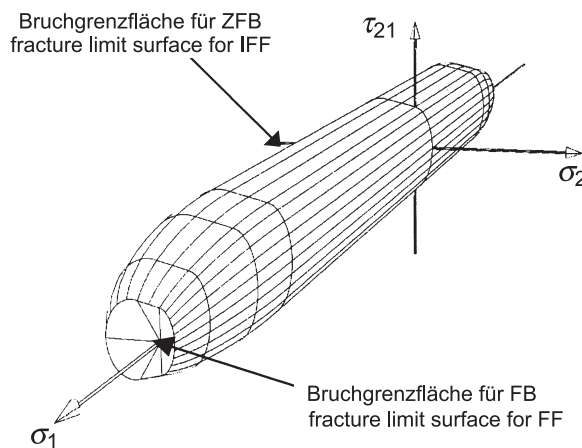


Bild 11. Bruchkörper für einen  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand, die so genannte „Puck'sche Bruch-Zigarre“ [Puc 69]

Figure 11. Fracture body for a  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$  stress state, the so-called "Puck's fracture cigar" [Puc 69]

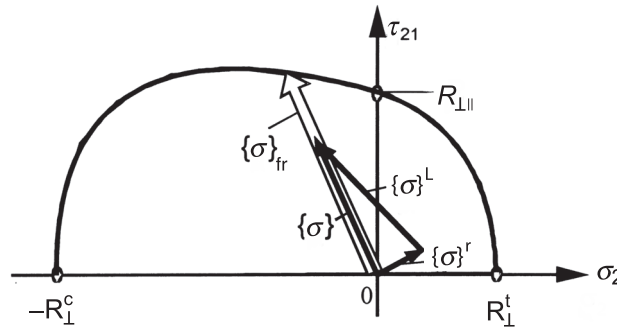


Bild 12.  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurve. Spannungsvektor  $\{\sigma\}$ , zusammengesetzt aus dem Eigenspannungsvektor  $\{\sigma\}^r$  und dem lastbedingten Spannungsvektor  $\{\sigma\}^L$ . Die Anstrengung  $f_E$  ist das Verhältnis der Länge von  $\{\sigma\}$  zur Länge des Vektors  $\{\sigma\}_{fr}$  der zum Bruch führenden Spannungen.

Figure 12.  $(\sigma_2, \tau_{21})$  fracture curve. Stress vector  $\{\sigma\}$  composed of the residual stress vector  $\{\sigma\}^r$  and the load-determined stress vector  $\{\sigma\}^L$ . The stress exposure  $f_E$  is the ratio of the length of  $\{\sigma\}$  and the length of the vector  $\{\sigma\}_{fr}$  of the stresses leading to fracture.

ist in Bild 12 für die  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungskombination gezeigt. Die entsprechende ZFB-Bedingung erscheint hierin als Bruchgrenzkurve oder kurz *Bruchkurve*.

Bruch tritt ein, wenn der Spannungszustandsvektor mit seiner Spitze die Bruchgrenzfläche bzw. Bruchgrenzkurve berührt (Bild 12,  $\{\sigma\}_{fr}$ ).

Wenn Eigenspannungen berücksichtigt werden, setzen sich der Eigenspannungszustand  $\{\sigma\}^r$  und der lastbedingte Spannungszustand  $\{\sigma\}^L$  vektoriell zum resultierenden Spannungszustandsvektor  $\{\sigma\}$  zusammen.

Allgemein versteht man unter der *Anstrengung*  $f_E$  das Verhältnis der Länge des Vektors  $\{\sigma\}$  der auftretenden Spannungen zur Länge des zugehörigen Bruchvektors  $\{\sigma\}_{fr}$ , der dieselbe Richtung wie der Vektor  $\{\sigma\}$  hat (Bild 12). Der Kehrwert  $f_E^{-1}$  wird als *Streckungsfaktor*  $f_s$  bezeichnet. Wichtige Hinweise finden sich in Abschnitt 5.5.3.

Die Spannung  $\sigma_1$  beansprucht bei einer UD-Schicht vorwiegend die Fasern und weniger die Matrix und die Faser/Matrix-Grenzflächen (dies gilt bei  $\sigma_1$ -Druckspannung nicht in gleichem Maße wie bei  $\sigma_1$ -Zugspannung). Deshalb tritt in einem FB-Kriterium für eine UD-Schicht die Spannung  $\sigma_1$  allein oder zumindest mit stark erhöhtem Gewicht gegenüber den übrigen Spannungen auf. Bei einem ZFB-Kriterium der UD-Schicht verhält es sich umgekehrt; in ihm erfahren die übrigen Spannungen eine stärkere Gewichtung als  $\sigma_1$ , oder  $\sigma_1$  fehlt sogar ganz.

**G-Schicht**

Bei der G-Schicht mit zwei zueinander senkrechten Faserrichtungen können Zug- oder Druckspannungen  $\sigma_w, \sigma_f$  in den Faserrichtungen von Kette (warp) bzw. Schuss (fill) Faserbrüche bewirken. Eine Schub-

stresses – is shown in Figure 12. The corresponding IFF condition appears in this as fracture limit curve, or *fracture curve* for short.

Fracture will occur when the peak of the stress state vector touches the fracture limit surface or the fracture curve respectively (Figure 12,  $\{\sigma\}_{fr}$ ).

When residual stresses are taken into account, the residual stress state  $\{\sigma\}^r$  and the load-determined stress state  $\{\sigma\}^L$  are combined vectorially to supply the resulting stress state vector  $\{\sigma\}$ .

In general what is understood by *stress exposure*  $f_E$  for short, is the ratio between the length of the vector  $\{\sigma\}$  of the stresses occurring and the length of the corresponding fracture vector  $\{\sigma\}_{fr}$  which has the same direction as the vector  $\{\sigma\}$  (Figure 12). The reciprocal  $f_E^{-1}$  is called *stretch factor*  $f_s$ . Important information can be found in Section 5.5.3.

In a UD lamina the stress  $\sigma_1$  predominantly loads the fibres and less so the matrix and the interfaces of the matrix and fibres (with  $\sigma_1$  compressive stress this does not apply to the same extent as with  $\sigma_1$  tensile stress). For this reason the stress  $\sigma_1$  will appear alone in an FF criterion for a UD lamina, or at least more heavily weighted with regard to the other stresses. The reverse is true in an IFF criterion for the UD lamina: here the other stresses are given greater weighting than  $\sigma_1$ , or  $\sigma_1$  may even be entirely absent.

**WF lamina**

In the case of a WF lamina with two mutually perpendicular fibre directions, tensile or compressive stresses  $\sigma_w, \sigma_f$  may bring about fibre fracture in the fibre directions of warp or fill. A shear stress  $\tau_{WF}$  on

spannung  $\tau_{WF}$  bewirkt hingegen nur eine fortschreitende Zerstörung der Matrix und der Haftung der Faser/Matrix-Grenzflächen bei progressiver Zunahme der Schubverformung  $\gamma_{WF}$ .

Bei Beanspruchung einer G-Schicht durch  $\sigma_W$  und/oder  $\sigma_F$  treten normalerweise schon lange vor Erreichen der Faserbruchgrenze viele feine ZFB-Risse parallel zu Fasern auf. Da sie jedoch durch die Fasern der jeweils anderen Richtung überbrückt werden, verursachen die ZFB keinen Totalbruch.

Gelegentlich betrachtet man bei der Bruchanalyse eines Laminates, das neben UD-Schichten auch G-Schichten enthält, nicht nur die UD-Schicht sondern auch die G-Schicht als homogenes, orthotropes Kontinuum. In diesem Fall müssen aus Belastungsversuchen an der G-Schicht außer den Faserbruchgrenzen auch die „ZFB-Grenzen“ bekannt sein, die sich im Belastungsversuch durch beginnende Rissbildung bemerkbar machen.

**M-Schicht**

Modellhaft kann man sich eine M-Schicht als aus einer Vielzahl regellos in der Schichtebene orientierter kleiner stabförmiger UD-Schicht-Elemente aufgebaut vorstellen. Bei makroskopischer Betrachtung ist eine klare Unterscheidung von FB und ZFB nicht möglich. Das Bruchgeschehen ist durch Rissbildung entlang der Fasern und etwas später einsetzendes Brechen einzelner Faserbündel gekennzeichnet. Der Totalbruch tritt nach einer progressiven Verformungszunahme durch eine Häufung der Brüche von Faserbündeln ein.

Soll bei der Bruchanalyse eines Laminates, das auch M-Schichten enthält, deren Mittragen berücksichtigt werden, so müssen die quasi-isotropen Verformungseigenschaften und Festigkeiten der M-Schicht bekannt sein.

**4.5.2 Bruchbedingungen für UD-Schichten**

**Alle Festigkeitswerte (auch die Druckfestigkeiten) sind in die folgenden Bruchkriterien als positive Werte einzusetzen.**

**Faserbruchbedingungen**

Für UD-Schichten, insbesondere solche aus GFK, wurde für FB bisher vorwiegend die folgende einfache Bruchbedingung benutzt:

$$\frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^t} = 1 \text{ für } \sigma_1 > 0 \tag{42}$$

$$\frac{\sigma_1}{(-R_{\parallel}^c)} = 1 \text{ für } \sigma_1 < 0$$

the other hand, will only cause progressive destruction of the matrix and of the adhesion of fibre/matrix interfaces as shear deformation  $\gamma_{WF}$  progressively increases.

When a WF lamina experiences  $\sigma_W$  and/or  $\sigma_F$  stress, a great many fine IFF cracks parallel to the fibres will normally form even long before the fibre fracture limit is reached. Total fracture is not, however, caused by the IFF as the cracks are bridged by the fibres running in the other direction.

From time to time one considers in fracture analysis a laminate which contains WF laminae in addition to UD laminae, not only the UD lamina but also the WF lamina as a homogeneous, orthotropic continuum. In this case, loading tests must be carried out on the WF lamina to determine not only the fibre fracture limits but also the “IFF limits” which reveal themselves in testing by cracks starting to form.

**M lamina**

For the purposes of a model, one may imagine a M lamina as being made up of a large number of small rod-like UD lamina elements randomly oriented in the lamina plane. At the macroscopic level a clear distinction between FF and IFF is not possible. The fracture event is characterized by cracks forming along the fibres and, somewhat later, by the breaking of individual fibre bundles. Following a progressive increase in strain, total fracture occurs in the form of an amassment of fractures of fibre bundles.

If a fracture analysis of a laminate which also contains M laminae is to take their contribution into consideration, then the quasi-isotropic strain properties and strengths of the M lamina must be known.

**4.5.2 Fracture conditions for UD laminae**

**All strength values (even compressive strengths) should be input into the following fracture criteria as positive values.**

**Fibre fracture conditions**

Until now the following very simple fracture condition has mainly been used for UD laminae, particularly those made of GFRP:

$$\frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^t} = 1 \text{ for } \sigma_1 > 0 \tag{42}$$

$$\frac{\sigma_1}{(-R_{\parallel}^c)} = 1 \text{ for } \sigma_1 < 0$$

Eine verfeinerte, mikromechanische Betrachtung zeigt, dass es für den FB eigentlich nicht auf die Verbundspannung  $\sigma_1$ , sondern auf die Spannung  $\sigma_{1f}$  der Fasern ankommt. Die Spannung in den Fasern hängt nämlich nicht nur von  $\sigma_1$ , sondern wegen der Querkontraktionseffekte auch von  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  ab. Dies macht sich besonders bemerkbar, wenn ein hydrostatischer Spannungszustand vorliegt. Die unter Berücksichtigung eines Einflusses von  $\sigma_2$  hergeleiteten Bruchbedingungen liefern aber für einen  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand im Vergleich zu Gleichung (42) nur um wenige Prozent abweichende Ergebnisse. Mikromechanische und experimentelle Untersuchungen haben gezeigt, dass es sich beim FB unter Druckspannung  $\sigma_1 < 0$  häufig um ein Schub-Knicken der in der Matrix elastisch gebetteten Fasern handelt. Dieses kann durch gleichzeitig mit  $\sigma_1$  auftretende Schubspannungen  $\tau_{21}$  und  $\tau_{31}$  begünstigt werden [Puc96a; Pin06].

Inwieweit die ausgeprägte Festigkeitsanisotropie von Kohlenstofffasern und Aramidfasern das Verhalten bei FB beeinflusst, ist noch nicht hinreichend geklärt. In [Har98] wird für CFK ein FB-Kriterium benutzt, bei dem die ausnutzbare Faserfestigkeit bis auf etwa den halben Wert absinkt, wenn quer zur Faser eine Dehnung auftritt, die gleich hoch ist wie die Dehnung in Faserrichtung, aber ein entgegengesetztes Vorzeichen hat. Wenn dies zuträfe, befände man sich mit Gleichung (42) teilweise auf der unsicheren Seite. Die Klärung dieser Frage ist zurzeit Gegenstand der Forschung. Bisher vorliegende Ergebnisse [Fis03; Man07] deuten darauf hin, dass die Effekte wesentlich schwächer sind als in [Har98] angenommen.

### Zwischenfaserbruchbedingungen

ZFB in der UD-Schicht wird im Wesentlichen durch die Spannungen  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ,  $\tau_{23}$ ,  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{21}$  hervorgerufen, weil durch diese auf faserparallelen Ebenen wirkenden Spannungen direkt die Matrix und die Faser/Matrix-Grenzfläche beansprucht werden (Bild 3).

Eine Beanspruchung durch  $\sigma_1$  dehnt Fasern und Matrix in gleichem Maße. Die erheblich steiferen Fasern nehmen dabei den weit überwiegenden Teil der in Faserrichtung wirkenden Kraft auf, aber auch die Matrix wird beansprucht. Bei den nachfolgenden Bruchbedingungen ist allgemein vorausgesetzt, dass die Bruchdehnung der Matrix erheblich größer ist als diejenige der Fasern. Trotzdem wird in den meisten ZFB-Bedingungen ein gewisser Einfluss von  $\sigma_1$ -Spannungen auf den ZFB angenommen.

### Ebene Spannungszustände

Bei ebenen  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszuständen wurde bislang für eine Abschätzung der ZFB-Gefahr von UD-Schichten häufig die folgende ZFB-Bedingung angewandt [HSB], (Bild 13):

A more precise, micromechanical examination reveals that as regards FF it is actually not the composite stress  $\sigma_1$  which matters but rather the stress  $\sigma_{1f}$  of the fibres. The stress in the fibres does not in fact depend solely on  $\sigma_1$  but also, due to Poisson's ratio effects, on  $\sigma_2$  and  $\sigma_3$ . This has a remarkable influence especially when a hydrostatic stress state exists. However, fracture conditions obtained when an influence from  $\sigma_2$  was taken into account in a  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -stress combination, supply results which differ by only a few percent in comparison with Equation (42). Micromechanical and experimental investigations have moreover demonstrated that shear buckling of the fibres elastically embedded in the matrix (kinking) is frequently what is involved in the case of FF under a compressive stress  $\sigma_1 < 0$ . This can be encouraged by shear stresses  $\tau_{21}$  and  $\tau_{31}$  which occur simultaneously with  $\sigma_1$  [Puc96a; Pin06].

To what extent the marked strength anisotropy of carbon fibres and aramid fibres affects behaviour in the case of FF has not yet been adequately explained. In [Har98] a FF criterion is used for CFRP whereby the useable fibre strength drops to around half its value when strain transverse to the fibre occurs which is equal to the strain in the direction of the fibres but has the opposite sign. Should this describe the real situation, then Equation (42) would sometimes lead to results on the uncertain side. Current research is concerned with clarification of this question. Results so far obtained [Fis03; Man07] seem to indicate that the effects are considerably weaker than was assumed to be the case in [Har98].

### Interfibre fracture conditions

IFF in the UD lamina is essentially caused by stresses  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ,  $\tau_{23}$ ,  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{21}$  since the matrix and the fibre/matrix-interface are affected directly by these stresses which act on planes parallel to the fibres (Figure 3).

A  $\sigma_1$  stress elongates the fibres and the matrix to the same extent. Here the fibres, which are considerably stiffer, absorb by far the greater part of the load acting in the direction of the fibres, however the matrix is also loaded to some extent. In the fracture conditions which follow it is assumed that the ultimate elongation of the matrix is considerably greater than that of the fibres. Nevertheless a certain influence of  $\sigma_1$  stresses on IFF is assumed in most IFF conditions.

### Two-dimensional stress states

In the case of two-dimensional  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$  stress states the following IFF condition has frequently been used to date for estimating the risk of IFF occurring in UD laminae [HSB] (Figure 13):

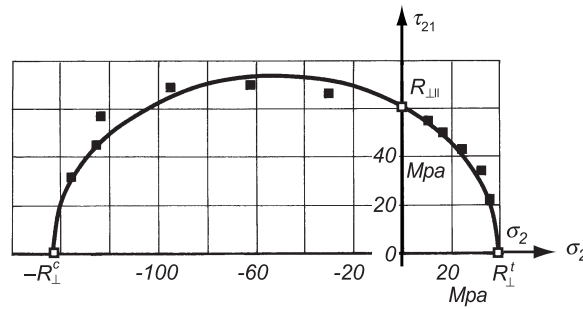


Bild 13. Bruchkurve nach Gleichung (43); Versuchspunkte für GFK-UD-Schichten (E-Glas/Araldite CY232/HY951) [Kna72]

Figure 13. Fracture curve according to Equation (43); test points for GFRP UD laminae (low-alkali glass/Araldite CY232/HY951) [Kna72]

$$F = \frac{\sigma_2^2}{R_{\perp}^t \cdot R_{\perp}^c} + \left( \frac{1}{R_{\perp}^t} - \frac{1}{R_{\perp}^c} \right) \sigma_2 + \left( \frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 = 1 \quad (43)$$

$$F = \frac{\sigma_2^2}{R_{\perp}^t \cdot R_{\perp}^c} + \left( \frac{1}{R_{\perp}^t} - \frac{1}{R_{\perp}^c} \right) \sigma_2 + \left( \frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 = 1 \quad (43)$$

In vielen Bruchbedingungen wie auch in Gleichung (43) treten die Spannungsterme sowohl linear ( $L$  = Summe der linearen Terme) als auch quadratisch ( $Q$  = Summe der quadratischen Terme) auf. In einem solchen Fall stellt bei  $F \neq 1$  der Wert der Funktion  $F$  in der Bruchbedingung **nicht** die Anstrengung dar. Der sich für die Funktion  $F$  ergebende Zahlenwert wird oft als „failure index“ (Wert des Bruchkriteriums) bezeichnet. Die Anstrengung  $f_E$  (siehe Bild 12) ergibt sich in diesem Fall aus

In many fracture conditions, as also in Equation (43), the stress terms occur not only in linear form ( $L$  = sum of linear terms) but also quadratically ( $Q$  = sum of quadratic terms). In such a case the value of the function  $F$  of the fracture condition does in case of  $F \neq 1$  **not** represent the stress exposure  $f_E$ . The numerical value obtained for the function  $F$  is often referred to as the “fracture index” (value of the fracture criterion). In this case the stress exposure  $f_E$  (see Figure 12) is obtained from

$$f_E = \frac{1}{2} \left( L + \sqrt{L^2 + 4Q} \right) \quad (44)$$

$$f_E = \frac{1}{2} \left( L + \sqrt{L^2 + 4Q} \right) \quad (44)$$

Der Wert der Funktion  $F$ , der so genannten Bruchfunktion, auf der linken Seite einer Bruchbedingung bzw. eines Bruchkriteriums ist nur dann gleich der Anstrengung  $f_E$ , wenn  $F$  bezüglich der Spannungen homogen vom Grad 1 ist, was z. B. für die Bruchfunktion in Gleichung (45) bis Gleichung (47) der Fall ist (Homogen vom Grad 1 heißt, dass ein Vorfaktor bei den Spannungen, z. B.  $(f_E)^{-1}$  als Vorfaktor von  $F$  ausgeklammert werden kann). Eine ausführliche Darstellung dieser wichtigen mathematischen Zusammenhänge zur richtigen Berechnung der Werkstoffanstrengung  $f_E$  und des Streckungsfaktors  $f_S^L$  der lastebedingten Spannungen findet sich in [Puc96a; Kno07], siehe auch Abschnitt 5.5.3.

The value of the function  $F$  – the so-called failure function – on the left-hand side of a failure condition or of a failure criterion will not then be equal to the stress exposure  $f_E$  unless  $F$  with respect to the stresses is homogeneous in the first degree. This is in fact the case with the fracture functions in Equation (45) to Equation (47), for example. (Homogeneous in the first degree means that in the stresses a pre-factor can be factored out: for example  $(f_E)^{-1}$  as a pre-factor of  $F$ ). A detailed description of these important mathematical relationships which relate to a correct calculation of the stress exposure  $f_E$  and the stretch factor  $f_S^L$  of the load-determined stresses will be found in [Puc96a; Kno07], see also Section 5.5.3).

Generell wird die Anwendung einer neuen Generation von ZFB-Kriterien empfohlen. Es sind dies so genannte **wirkebenebezogene Bruchkriterien**, deren Basis im nächsten Abschnitt erläutert wird. Sie lassen sich für den hier betrachteten Fall der ebenen  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung in Form von drei mit  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  formulierten ZFB-Bedingungen darstellen, die aus den allgemeinen für räumliche Spannungszustände entwickelten, Gleichung (54) und Gleichung (55), herleit-

In general the application of a new generation of IFF criteria is recommended. These are the so-called **action-plane related fracture criteria** whose basis will be explained in the next section. As regards the case under examination here which concerns two-dimensional  $(\sigma_2, \tau_{21})$  loading, they may be expressed in the form of three IFF conditions formulated with  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  and which can be derived from the general Equation (54) and Equation (55) which were devel-



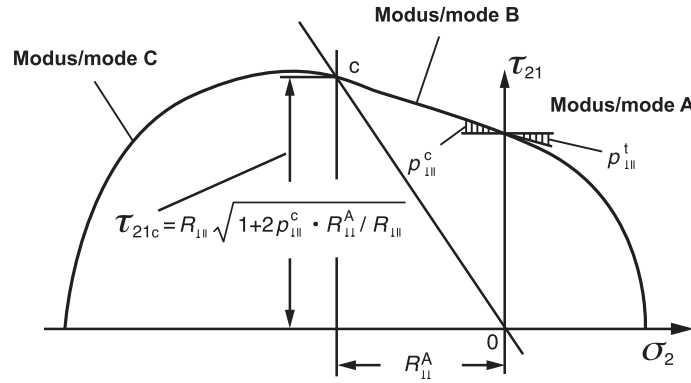


Bild 14. Bruchmodi an der  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurve  
Die Bruch-Modi A und B führen zu geraden ZFB ( $\theta_p = 0^\circ$ ), beim Modus C treten schräge ZFB auf ( $\theta_p = 0^\circ$  bis  $\pm 55^\circ$ ); siehe auch Bild 16 und Gleichung (96). Durch den Punkt c ist die Grenze zwischen Modus B und Modus C gekennzeichnet.

Figure 14. Fracture modes on the  $(\sigma_2, \tau_{21})$  fracture curve  
Fracture modes A and B result in “straight” IFF ( $\theta_p = 0^\circ$ ) while oblique IFF occur with mode C ( $\theta_p = 0^\circ$  to  $\pm 55^\circ$ ); see also Figure 16 and Equation (96). The boundary between mode B and mode C is denoted by point c.

bar sind. Gleichung (45), Gleichung (46) und Gleichung (47) gelten je für einen bestimmten Abschnitt der  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurve (Bild 14).

Für Modus A ( $\sigma_2 \geq 0$ ):

$$f_E |_{\theta_{fp} = 0^\circ} = \frac{1}{R_{\perp\perp}} \left[ \sqrt{\left(\frac{R_{\perp\perp}}{R_{\perp\perp}^t} - p_{\perp\perp}^t\right)^2 \sigma_2^2 + \tau_{21}^2} + p_{\perp\perp}^t \sigma_2 \right] = 1 \quad (45)$$

für Modus B:

$$f_E |_{\theta_{fp} = 0^\circ} = \frac{1}{R_{\perp\perp}} \left( \sqrt{\tau_{21}^2 + (p_{\perp\perp}^c \sigma_2)^2} + p_{\perp\perp}^c \sigma_2 \right) = 1 \quad (46)$$

für Modus C:

$$f_E |_{\theta_{fp} \text{ n. Gl. (96)}} = \frac{\tau_{21}^2}{4(R_{\perp\perp} + p_{\perp\perp}^c R_{\perp\perp}^A)^2} \cdot \frac{(-R_{\perp\perp}^c)}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{(-R_{\perp\perp}^c)} = 1 \quad (47)$$

Die hierin enthaltenen Größen  $p_{\perp\perp}^t$  und  $p_{\perp\perp}^c$  sind Neigungen der  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurve an der Stelle  $\sigma_2 = 0$ , siehe Bild 14 und Bild 16. Die in Gleichung (47) enthaltene Größe  $R_{\perp\perp}^A$  ist der Bruchwiderstand einer faserparallelen Wirkebene gegen ihren Bruch infolge einer in ihr wirkenden  $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung. Für die Anwendung in Gleichung (47) muss dieser mit Gleichung (48) berechnet werden.

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp\perp}}{2p_{\perp\perp}^c} \left( \sqrt{1 + 2p_{\perp\perp}^c \frac{R_{\perp\perp}}{R_{\perp\perp}}} - 1 \right) \quad (48)$$

Welche der drei Gleichungen (45) bis (47) im Einzelfall anzuwenden ist, geht aus Bild 14 hervor. Es muss geprüft werden, in welchem der drei Abschnitte, Modus A, B, C, der Vektor  $\{\sigma\}_{fr}$  die Bruchkurve trifft.

oped for three-dimensional stresses. Each of Equation (45), Equation (46) and Equation (47) applies to a specific part of the  $(\sigma_2, \tau_{21})$  fracture curve (Figure 14).

For mode A ( $\sigma_2 \geq 0$ ):

$$f_E |_{\theta_{fp} = 0^\circ} = \frac{1}{R_{\perp\perp}} \left[ \sqrt{\left(\frac{R_{\perp\perp}}{R_{\perp\perp}^t} - p_{\perp\perp}^t\right)^2 \sigma_2^2 + \tau_{21}^2} + p_{\perp\perp}^t \sigma_2 \right] = 1 \quad (45)$$

For mode B:

$$f_E |_{\theta_{fp} = 0^\circ} = \frac{1}{R_{\perp\perp}} \left( \sqrt{\tau_{21}^2 + (p_{\perp\perp}^c \sigma_2)^2} + p_{\perp\perp}^c \sigma_2 \right) = 1 \quad (46)$$

For mode C:

$$f_E |_{\theta_{fp} \text{ Equ. (96)}} = \frac{\tau_{21}^2}{4(R_{\perp\perp} + p_{\perp\perp}^c R_{\perp\perp}^A)^2} \cdot \frac{(-R_{\perp\perp}^c)}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{(-R_{\perp\perp}^c)} = 1 \quad (47)$$

The variables  $p_{\perp\perp}^t$  and  $p_{\perp\perp}^c$  contained in these are the slopes of the  $(\sigma_2, \tau_{21})$  fracture curve at the location  $\sigma_2 = 0$  (see Figure 14 and Figure 16). The variable  $R_{\perp\perp}^A$  which is contained in Equation (47) is the fracture resistance of an action plane parallel to the fibre direction against its fracture due to  $\tau_{\perp\perp}$  stressing acting on it. For the application in Equation (47) this resistance must be calculated by Equation (48).

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp\perp}}{2p_{\perp\perp}^c} \left( \sqrt{1 + 2p_{\perp\perp}^c \frac{R_{\perp\perp}}{R_{\perp\perp}}} - 1 \right) \quad (48)$$

Which of the three Equations (45) to (47) should be applied in an individual case may be deduced from Figure 14. A check should be made to see in which of the three sections – modes A, B or C – the vector  $\{\sigma\}_{fr}$  intersects the fracture curve.

*Räumliche Spannungszustände*

In Krafteinleitungsbereichen, an freien Rändern und in stark gekrümmten Laminaten können die *interlaminaren* Spannungen  $\sigma_3, \tau_{32}, \tau_{31}$  etwa die gleiche Größe erreichen wie die *intralaminaren* Spannungen  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$ . Dann sind räumliche ZFB-Bedingungen erforderlich.

In den 80er Jahren wurde die einfach anwendbare *Puck/Knaust-ZFB-Bruchbedingung* entwickelt, Gleichung (49), [Puc92a].

$$\frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2 \sigma_3 + 3 \tau_{23}^2}{R_{\perp}^t R_{\perp}^c} + \left(\frac{1}{R_{\perp}^t} - \frac{1}{R_{\perp}^c}\right)(\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{\tau_{21}^2 + \tau_{31}^2}{R_{\perp\parallel}^2} + F(\sigma_1) = 1 \tag{49}$$

Sie enthält ebenso wie Gleichung (43) noch eine physikalisch nicht begründbare Abhängigkeit der Festigkeit im Druckbereich von der Quer-Zugfestigkeit  $R_{\perp}^t$  und umgekehrt auch der Festigkeit im Zugbereich von der Quer-Druckfestigkeit  $R_{\perp}^c$ .

Der (Zusatz-)Term  $F(\sigma_1)$  dient dazu, einen möglichen Einfluss von  $\sigma_1$  auf den ZFB zu berücksichtigen. Damit die ZFB-Analyse auf der sicheren Seite bleibt, ist dies zu empfehlen, wenn Spannungszustände behandelt werden müssen, bei denen  $\sigma_1$  bei Erreichen der ZFB-Grenze den Wert von etwa 50 % der faserparallelen Festigkeit  $R_{\parallel}^t$  bzw.  $R_{\parallel}^c$  überschreitet, siehe Bild 11 und Bild 15 sowie Anhang A1.2. Als Zusatzterm wurde in [Puc92a] vorgeschlagen:

$$F(\sigma_1) = \frac{1}{R_{\parallel\text{IFF}}^t \cdot R_{\parallel\text{IFF}}^c} \sigma_1^2 + \left(\frac{1}{R_{\parallel\text{IFF}}^t} - \frac{1}{R_{\parallel\text{IFF}}^c}\right) \sigma_1 \tag{50}$$

Die Größen  $R_{\parallel\text{IFF}}^t$  und  $R_{\parallel\text{IFF}}^c$  sind fiktive Spannungen, die rein rechnerisch allein, das heißt ohne Mitwirkung anderer Spannungen wie  $\sigma_2, \tau_{21}$  usw., einen ZFB bewirken würden. Im Experiment sind solche hohen  $\sigma_1$ -Spannungen nicht realisierbar, weil vorher

*Three-dimensional stress states*

In load introduction areas, at free edges and in strongly curved laminates, the *interlaminar* stresses  $\sigma_3, \tau_{32}, \tau_{31}$  can reach approximately the same magnitudes as the *intralaminar* stresses  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$ . When this occurs, three-dimensional IFF conditions will be required.

In the 1980s the simple-to-use *Puck/Knaust IFF fracture condition* (Equation (49)) was developed [Puc92a].

$$\frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2 \sigma_3 + 3 \tau_{23}^2}{R_{\perp}^t R_{\perp}^c} + \left(\frac{1}{R_{\perp}^t} - \frac{1}{R_{\perp}^c}\right)(\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{\tau_{21}^2 + \tau_{31}^2}{R_{\perp\parallel}^2} + F(\sigma_1) = 1 \tag{49}$$

Like Equation (43) it still contains a physically not justified dependence of the strength in the compression range on the transverse tensile strength  $R_{\perp}^t$  and conversely a dependence of the strength in the tension range on the transverse compressive strength  $R_{\perp}^c$ .

The (additional) term  $F(\sigma_1)$  is used for taking into account a possible influence of  $\sigma_1$  on IFF. To keep the IFF analysis on the safe side this is to be recommended when stress states need to be treated where  $\sigma_1$  exceeds a value of about 50 % of the parallel-to-fibre strength  $R_{\parallel}^t$  or  $R_{\parallel}^c$  when the IFF limit is reached, see Figure 11 and Figure 15 and also Annex A1.2. In [Puc92a] the following is suggested as an additional term:

$$F(\sigma_1) = \frac{1}{R_{\parallel\text{IFF}}^t \cdot R_{\parallel\text{IFF}}^c} \sigma_1^2 + \left(\frac{1}{R_{\parallel\text{IFF}}^t} - \frac{1}{R_{\parallel\text{IFF}}^c}\right) \sigma_1 \tag{50}$$

The variables  $R_{\parallel\text{IFF}}^t$  and  $R_{\parallel\text{IFF}}^c$  are imaginary stresses which would purely theoretically bring about an IFF on their own, in other words, without any contribution from other stresses such as  $\sigma_2, \tau_{21}$  and so on. It is not possible to realize  $\sigma_1$  stresses of this magnitude

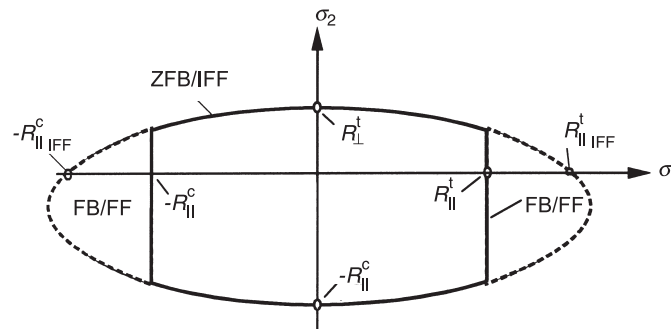


Bild 15.  $(\sigma_1, \sigma_2)$ -Bruchkurve nach Gleichung (49) für ZFB und Gleichung (42) für FB

Figure 15.  $(\sigma_1, \sigma_2)$  fracture curve according to Equation (49) for IFF and Equation (42) for FF

FB eintritt (Bild 15). Als Anhaltswerte können dienen:

$$R_{\parallel\text{IFF}}^t \approx (1,3 \text{ bis } 1,5)R_{\parallel}^t \quad (51)$$

$$R_{\parallel\text{IFF}}^c \approx (1,3 \text{ bis } 1,5)R_{\parallel}^c \quad (52)$$

Die ZFB-Anstrengung  $f_{E\text{IFF}}$  wird durch Anwenden von Gleichung (44) auf die Bruchbedingung, Gleichung (49), errechnet.

Anfang der 90er Jahre begann die Entwicklung *realitätsnäherer ZFB-Bedingungen* [Puc96a bis Puc98], die auf einer physikalischen Basis aufbauen. Sie basieren im Wesentlichen auf den Vorstellungen von A. Coulomb und O. Mohr; B. Paul [Pau61] und Z. Hashin [Has80] über die Ausbildung von Bruchebenen beim Spröbruch.

Die neuen Bruchkriterien werden **wirkebenebezogene Bruchkriterien** genannt. Sie unterscheiden sich von allen bisher gebräuchlichen Bruchkriterien dadurch, dass sie zunächst nicht mit den Spannungen  $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$  formuliert werden, sondern mit den Spannungen  $\sigma_n, \tau_{nt}$  und  $\tau_{n1}$ , die auf faserparallelen Schnittebenen wirken, die um einen Winkel  $\theta$  gegen die Dickenrichtung der Schicht geneigt sind, Bild 16. Die dort auftretenden Spannungen errechnen sich mit Hilfe der folgenden Transformation:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n(\theta) \\ \tau_{nt}(\theta) \\ \tau_{n1}(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc & 0 & 0 \\ -sc & sc & (c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{Bmatrix} \quad (53)$$

mit  $c = \cos \theta$  und  $s = \sin \theta$

Die neuen Kriterien ermöglichen erstmalig Aussagen über die Richtung der Bruchebene (siehe Gleichung (96)). Diese sind für die Bruchfolgenabschätzung sehr wichtig. Je nach Spannungszustand und Anwendungsfall können einige Formen des ZFB zulässig sein, andere dagegen nicht. Dies hängt vom Bruchwinkel  $\theta_{fp}$  ab.

Wenn die Normalspannung  $\sigma_n$  eine Zugspannung ist, unterstützt sie die Schubspannungen  $\tau_{nt}$  und  $\tau_{n1}$  dabei, den ZFB zu erzeugen. Hingegen erschwert sie den durch die Schubspannungen  $\tau_{nt}$  und  $\tau_{n1}$  bewirkten ZFB, wenn sie eine Druckspannung ist. Deshalb werden je nach der Fall-Unterscheidung  $\sigma_n \geq 0$  bzw.  $\sigma_n < 0$  gesonderte Gleichungen für die ZFB-Anstrengung angewandt. Die schnitwinkelabhängige Anstrengung  $f_E(\theta)$  errechnet sich mit einem sehr anpassungsfähigen 7-Parameter-Modell abhängig von

experimentally as FF will occur first (Figure 15). The following may serve as approximations:

$$R_{\parallel\text{IFF}}^t \approx (1,3 \text{ to } 1,5)R_{\parallel}^t \quad (51)$$

$$R_{\parallel\text{IFF}}^c \approx (1,3 \text{ to } 1,5)R_{\parallel}^c \quad (52)$$

The IFF stress exposure  $f_{E\text{IFF}}$  is calculated by applying Equation (44) to the fracture condition, Equation (49).

At the start of the 1990s work began on developing *IFF conditions closer to reality* [Puc96a to Puc98] which were grounded in a physical basis. They are essentially based on the ideas of A. Coulomb und O. Mohr; B. Paul [Pau61] and Z. Hashin [Has80] regarding the development of fracture planes due to brittle fracture.

The new fracture criteria are termed **action-plane fracture criteria**. Where they differ from all other fracture criteria previously in common use is that they are not initially formulated with the stresses  $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$  but instead with the stresses  $\sigma_n, \tau_{nt}$  and  $\tau_{n1}$  which act on parallel-to-fibre section planes inclined at an angle of  $\theta$  with respect to the thickness direction of the lamina (Figure 16). The stresses which occur here are calculated with the aid of the following transformation:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n(\theta) \\ \tau_{nt}(\theta) \\ \tau_{n1}(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc & 0 & 0 \\ -sc & sc & (c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{Bmatrix} \quad (53)$$

where  $c = \cos \theta$  and  $s = \sin \theta$

These new criteria make it possible for the first time to make statements regarding the direction of the fracture plane (see Equation (96)). These are of great importance in estimating the consequences of failure. Depending on the stress state and the application case, some forms of IFF may be permissible, others on the other hand will not. This depends on the fracture angle  $\theta_{fp}$ .

When the normal stress  $\sigma_n$  is a tensile stress, it assists the shear stresses  $\tau_{nt}$  and  $\tau_{n1}$  in bringing about IFF. On the other hand, should it be a compressive stress it will impede the IFF brought about by the shear stresses  $\tau_{nt}$  and  $\tau_{n1}$ . For this reason, depending on the case distinction of  $\sigma_n \geq 0$  or  $\sigma_n < 0$ , separate equations will be used for IFF stress exposure. The intersection-angle-dependent stress exposure  $f_E(\theta)$  is calculated in the following way using a very adaptable 7-parameter model depending on whether  $\sigma_n \geq 0$  or  $\sigma_n < 0$  written

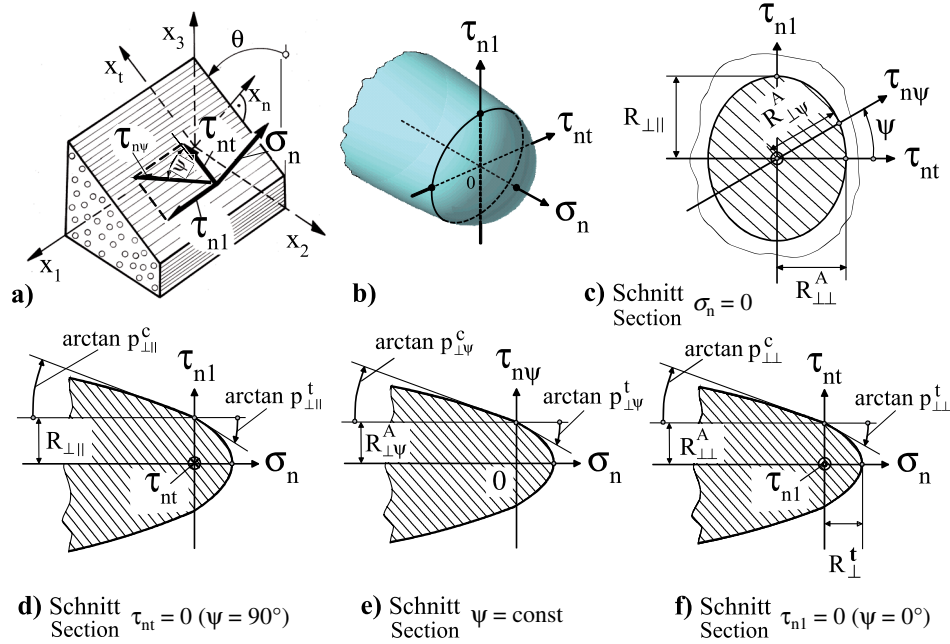


Bild 16. a) Wirkebenespannungen  $\sigma_n$ ,  $\tau_{nt}$ ,  $\tau_{n1}$  und b) Masterbruchkörper nach Gleichung (54) bis Gleichung (58). Der Masterbruchkörper ist eindeutig bestimmt durch seinen Querschnitt c) bei  $\sigma_n = 0$  und die Längsschnitte d) und f) bei  $\tau_{nt} = 0$  und  $\tau_{n1} = 0$ .

Figure 16. a) Action-plane stresses  $\sigma_n$ ,  $\tau_{nt}$ ,  $\tau_{n1}$  and b) master fracture body according to Equation (54) to Equation (58). The master fracture body is uniquely defined by its cross-section c) at  $\sigma_n = 0$  and its longitudinal sections d) and f) at  $\tau_{nt} = 0$  and  $\tau_{n1} = 0$ .

$\sigma_n \geq 0$  bzw.  $\sigma_n < 0$  mit den Abkürzungen  $\sigma_n(\theta) = \sigma_n$ ;  $\tau_{nt}(\theta) = \tau_{nt}$  und  $\tau_{n1}(\theta) = \tau_{n1}$  folgendermaßen:

with the abbreviations  $\sigma_n(\theta) = \sigma_n$ ;  $\tau_{nt}(\theta) = \tau_{nt}$ ;  $\tau_{n1}(\theta) = \tau_{n1}$ :

Für  $\sigma_n \geq 0$ :

For  $\sigma_n \geq 0$ :

$$f_E(\theta) = \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{R_{\perp}^t} - \frac{p_{\perp}^t}{R_{\perp}^A} \right) \sigma_n \right]^2 + \left( \frac{\tau_{nt}}{R_{\perp}^A} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{n1}}{R_{\perp}^t} \right)^2} + \frac{p_{\perp}^t}{R_{\perp}^A} \sigma_n \quad (54)$$

$$f_E(\theta) = \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{R_{\perp}^t} - \frac{p_{\perp}^t}{R_{\perp}^A} \right) \sigma_n \right]^2 + \left( \frac{\tau_{nt}}{R_{\perp}^A} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{n1}}{R_{\perp}^t} \right)^2} + \frac{p_{\perp}^t}{R_{\perp}^A} \sigma_n \quad (54)$$

Für  $\sigma_n < 0$ :

For  $\sigma_n < 0$ :

$$f_E(\theta) = \sqrt{\left( \frac{\tau_{nt}}{R_{\perp}^A} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{n1}}{R_{\perp}^t} \right)^2 + \left( \frac{p_{\perp}^c}{R_{\perp}^A} \sigma_n \right)^2} + \frac{p_{\perp}^c}{R_{\perp}^A} \sigma_n \quad (55)$$

$$f_E(\theta) = \sqrt{\left( \frac{\tau_{nt}}{R_{\perp}^A} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{n1}}{R_{\perp}^t} \right)^2 + \left( \frac{p_{\perp}^c}{R_{\perp}^A} \sigma_n \right)^2} + \frac{p_{\perp}^c}{R_{\perp}^A} \sigma_n \quad (55)$$

mit  $\frac{p_{\perp}^t}{R_{\perp}^A} = \frac{p_{\perp}^t}{R_{\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp}^t}{R_{\perp}^t} \sin^2 \psi$  (56a)

where  $\frac{p_{\perp}^t}{R_{\perp}^A} = \frac{p_{\perp}^t}{R_{\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp}^t}{R_{\perp}^t} \sin^2 \psi$  (56a)

$$\frac{p_{\perp}^c}{R_{\perp}^A} = \frac{p_{\perp}^c}{R_{\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp}^c}{R_{\perp}^t} \sin^2 \psi \quad (56b)$$

$$\frac{p_{\perp}^c}{R_{\perp}^A} = \frac{p_{\perp}^c}{R_{\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp}^c}{R_{\perp}^t} \sin^2 \psi \quad (56b)$$

$$\cos^2 \psi = 1 - \sin^2 \psi = \frac{\tau_{nt}^2}{\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2} \quad (57)$$

$$\cos^2 \psi = 1 - \sin^2 \psi = \frac{\tau_{nt}^2}{\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2} \quad (57)$$

$$R_{\perp}^A = \frac{R_{\perp}^c}{2(1 + p_{\perp}^c)} \quad (58)$$

$$R_{\perp}^A = \frac{R_{\perp}^c}{2(1 + p_{\perp}^c)} \quad (58)$$

Gleichung (54) und Gleichung (55) beschreiben für den Grenzfall  $f_E(\theta) = 1$ , das heißt als Bruchbedingungen, den so genannten *Master-Bruchkörper* im  $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum, der im Halbraum  $\sigma_n > 0$  einem El-

For the limiting case (the “fracture condition”) where  $f_E(\theta) = 1$ , Equation (54) and Equation (55) describe the so-called *master fracture body* in  $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$  space. In the half-space  $\sigma_n > 0$  it resembles an ellip-

lipsoid und im Halbraum  $\sigma_n < 0$  einem Paraboloid ähnelt, Bild 16. Bestimmend für Form und Größe des Masterbruchkörpers sind sein elliptischer Querschnitt bei  $\sigma_n = 0$  und die Neigungen (an der Stelle  $\sigma_n = 0$ ) seiner Längsschnitte für die Verhältnisse  $\tau_{n1}/\tau_{nt} = \tan \psi = 0$  und  $\infty$ . Die Bedeutung der in Gleichung (54) und Gleichung (55) enthaltenen Parameter geht aus Bild 16 hervor.

Bei der Wahl der Neigungsparameter  $p_{\perp\parallel}^t, p_{\perp\parallel}^c, p_{\perp\perp}^t, p_{\perp\perp}^c$  müssen unbedingt bestimmte Grenzen eingehalten werden [Kop00]. Die Neigungsparameter haben zwar keinen starken Einfluss auf die errechneten Spannungen beim Bruch, jedoch werden bei Nichtbeachtung der Grenzen unter Umständen unrichtige Bruchwinkel berechnet. Sofern keine experimentellen Erfahrungen vorliegen, werden folgende Werte empfohlen [Puc02a]:

Tabelle 2. Empfohlene Zahlenwerte für die Neigungsparameter; detaillierte Diskussion in [Puc02a]

	$p_{\perp\parallel}^c$	$p_{\perp\parallel}^t$	$p_{\perp\perp}^t = p_{\perp\perp}^c$
<b>GFK</b>	0,25	0,30	0,20 bis 0,25
<b>CFK</b>	0,30	0,35	0,25 bis 0,30

Für die Bruchebenen-Suche mit Hilfe der Gleichung (54) bzw. Gleichung (55) berechnet man die schnittwinkelabhängige ZFB-Anstrengung einer großen Anzahl ( $\approx 180$ ) von Schnitten unter Winkeln  $\theta$  in einem Bereich  $\theta = -90^\circ$  bis  $\theta = 90^\circ$ . Die Schnittenebene mit der höchsten Anstrengung ist die zu erwartende Bruchebene. Der zugehörige Bruchwinkel ist  $\theta_{fp}$ . Mit der Kenntnis des Zahlenwertes der höchsten schnittwinkelabhängigen Anstrengung

$$[f_E(\theta)]_{\max} = f_E |_{\theta = \theta_{fp}}$$

lässt sich dann auch ohne weiteres der zum ZFB führende Bruchspannungszustand  $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})_{fr}$  angeben. Dazu müssen alle in die Gleichung (53) eingegebenen vorhandenen Spannungen  $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$  durch  $f_E |_{\theta = \theta_{fp}}$  dividiert oder mit dem Streckungsfaktor  $f_S |_{\theta = \theta_{fp}}$  multipliziert werden.

Der Bruchwinkel  $\theta_{fp}$  ist eine für die Beurteilung der Gefährlichkeit des Bruchgeschehens wichtige Zusatzinformation (siehe Abschnitt 5.2.3). Die wirkenebenebezogenen Bruchkriterien weisen z.B. auf eine Delaminationsgefahr hin, wenn mit ihnen ein Bruchwinkel  $\theta_{fp} \approx 90^\circ$  oder bei  $\sigma_2$ -Druckbeanspruchung ein Bruchwinkel  $|\theta_{fp}| > 45^\circ$  (Modus C) errechnet wird.

Bei allgemein räumlichen Spannungszuständen erfolgt die Bruchwinkelsuche numerisch, wie soeben beschrieben. Für den ebenen Spannungszustand  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$  lassen sich jedoch mit Hilfe der

soid and in the half-space  $\sigma_n < 0$  it resembles a paraboloid (Figure 16). Decisive for the form and size of the master fracture body are its elliptical cross-section at  $\sigma_n = 0$  and the slopes (at the point  $\sigma_n = 0$ ) of its longitudinal sections for the relations  $\tau_{n1}/\tau_{nt} = \tan \psi = 0$  and  $\infty$ . The meaning of the parameters contained in Equation (54) and Equation (55) is evident from Figure 16.

It is essential that certain limits be observed when selecting the slope parameters  $p_{\perp\parallel}^t, p_{\perp\parallel}^c, p_{\perp\perp}^t, p_{\perp\perp}^c$  [Kop00]. Although the slope parameters do not have a great influence on the stresses calculated, if the limits are not complied with, incorrect angles of the fracture plane may under certain circumstances be obtained. If no experimental experience is available, the following values are recommended [Puc02a]:

Table 2. Recommended values for slope parameters. A detailed discussion will be found in [Puc02a]

	$p_{\perp\parallel}^c$	$p_{\perp\parallel}^t$	$p_{\perp\perp}^t = p_{\perp\perp}^c$
<b>GFRP</b>	0,25	0,30	0,20 to 0,25
<b>CFRP</b>	0,30	0,35	0,25 to 0,30

For searching the fracture plane with the aid of Equation (54) or Equation (55) the angle-dependent stress exposure  $f_E(\theta)$  for IFF of a large number ( $\approx 180$ ) of intersections may be calculated under angle  $\theta$  within a range  $\theta = -90^\circ$  to  $\theta = 90^\circ$ . The section plane with the greatest stress exposure  $f_E(\theta)$  is the fracture plane to be expected. The corresponding angle of the fracture plane is  $\theta_{fp}$ . If the numerical value of the greatest angle-dependent stress exposure

$$[f_E(\theta)]_{\max} = f_E |_{\theta = \theta_{fp}}$$

is known, then the  $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})_{fr}$  fracture stress leading to IFF can be stated without further ado. Here all of the existing stresses  $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$  which have been input into Equation (53) must be divided by  $f_E |_{\theta = \theta_{fp}}$  or multiplied by the stretch factor  $f_S |_{\theta = \theta_{fp}}$ .

The angle of the fracture plane  $\theta_{fp}$  is an item of important additional information in assessing the risk of failure occurring (see Section 5.2.3). For example, the action-plane fracture criteria indicate a danger of delamination when an angle of fracture plane of  $\theta_{fp} \approx 90^\circ$  or under  $\sigma_2$  compressive stress an angle of fracture plane of  $|\theta_{fp}| > 45^\circ$  (Mode C) is calculated using them.

In the case of quite general three-dimensional stress states finding the angle of the fracture plane is performed numerically, as has just been described. As regards the two-dimensional  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -stress state,

Gleichung (54) und Gleichung (55) unter der Annahme, dass die „Parameterkopplung“  $p_{\perp\perp}^c \cdot R_{\perp\parallel}^c = p_{\perp\parallel}^c \cdot R_{\perp\perp}^A$  angewandt werden darf, die einfachen analytischen Lösungen Gleichung (45) bis Gleichung (47) angeben, so dass sich in diesem Fall eine numerische Bruchwinkelsuche erübrigt, siehe auch Gleichung (96). In diesem Fall muss aber  $R_{\perp\perp}^A$  wegen der Parameterkopplung nach Gleichung (48) berechnet werden.

Wenn man auf die Benutzung der analytischen Lösungen verzichtet, hat man bei der Parameterwahl etwas größere Freiheit ( $p_{\perp\perp}^c$  ist dann nicht mit  $p_{\perp\parallel}^c$  gekoppelt). Man kann dann  $R_{\perp\perp}^A$  aus Gleichung (58) mit einem in Grenzen [Puc02a] frei gewählten Wert für  $p_{\perp\perp}^c$  bestimmen, siehe auch Tabelle 2. In diesem Fall muss allerdings auch für den ebenen Spannungszustand bei Modus B und C die Bruchwinkelsuche numerisch durchgeführt werden. Die Wahl von  $p_{\perp\perp}^c$  beeinflusst den Verlauf der  $(\sigma_1, \tau_{21})$ -Bruchkurve im Modus B und C nur sehr geringfügig [Puc96a]. Man wird deshalb in den allermeisten Fällen die „Parameterkopplung“ anwenden, um mit den einfachen Gleichungen (45) bis (47) rechnen zu können.

**Wichtig:** Damit man bei ZFB-Untersuchungen auf der sicheren Seite bleibt, sollte man auch bei den wirkebenebezogenen ZFB-Bedingungen einen möglichen Einfluss von  $\sigma_1$  auf den ZFB in Rechnung stellen, wenn bei Erreichen der ZFB-Grenze gleichzeitig relativ hohe  $\sigma_1$ -Spannungen auftreten. Ein sehr anpassungsfähiges Rechenmodell ist in Anhang A1.2 beschrieben.

#### 4.5.3 G-Schicht

Wenn eine von der UD-Schicht abweichende Faserstruktur vorliegt (z.B. bei Wickelstrukturen mit Überkreuzungen, Geweben, geflochtenen Faserstrukturen), sind die bisher angegebenen Bruchbedingungen nicht mehr uneingeschränkt anwendbar.

##### *Ebene Spannungszustände*

Eine empfehlenswerte Bruchbedingung für die orthotrope Schicht aus Gewebe ist nicht bekannt. Ein Grund dafür liegt darin, dass praktisch keine mehrachsigen Bruchfestigkeitsdaten für eine Validierung einer Bruchbedingung vorliegen.

Zur einfachen Bewertung von 2-D- und eventuell 3-D-Spannungszuständen einer G-Schicht mit zwei zueinander senkrechten Faserrichtungen kann man sich der Vorgehensweise in [Puc96a] bedienen. Dort wird die G-Schicht als Laminat aus UD-Schichten entsprechend den Fasermengen in Kett- und Schussrichtung modelliert, siehe hierzu auch Abschnitt 4.6.2.

the simple analytical solutions of Equation (45) to Equation (47) may be cited, having been obtained with the help of Equation (54) and Equation (55) while assuming that application of the “coupling of parameters”  $p_{\perp\perp}^c \cdot R_{\perp\parallel}^c = p_{\perp\parallel}^c \cdot R_{\perp\perp}^A$ , is permissible. In such a case there will be no need for a numerical search for the angle of the fracture plane (see also Equation (96)). The parameter coupling means that in this case  $R_{\perp\perp}^A$  must be calculated according to Equation (48).

If one dispenses with using analytical solutions, there will be a somewhat greater freedom of choice as regards parameters (since  $p_{\perp\perp}^c$  will not then be coupled with  $p_{\perp\parallel}^c$ ). In this case  $R_{\perp\perp}^A$  from Equation (58) can then be determined using a freely chosen (within limits [Puc02a]) value for  $p_{\perp\perp}^c$ . In this case, however, the angle of the fracture plane must be found by numerical search even for the two-dimensional stress state in mode B and C. The value selected for  $p_{\perp\perp}^c$  will only determine to a very minor extent the course of the  $(\sigma_1, \tau_{21})$  fracture curve in mode B and C [Puc96a]. For this reason, “parameter coupling” will be used in the great majority of cases in order to allow calculation using the simple Equations (45) to (47).

**Important:** To remain on the safe side in IFF investigations, a possible influence of  $\sigma_1$  on IFF should be taken into account even in the action-plane IFF conditions if relatively high  $\sigma_1$  stresses occur simultaneously when the IFF limit is reached. An easily adaptable calculation model is presented in Annex A1.2.

#### 4.5.3 WF lamina

If there is a fibre structure present which differs from that of the UD lamina (such as filament-wound structures with cross-overs, woven fabrics, braided fibre structures, for example) it will no longer be possible to apply the fracture conditions we have provided without limitations.

##### *Two-dimensional stress states*

We do not know of a failure condition which can be recommended for the orthotropic lamina made of fabric. One reason is, that there are actually no multi-axial strength data available for a validation of a fracture condition.

The procedure mentioned in [Puc96a] may serve for making a simple evaluation of 2D and possibly of 3D stress states in a WF lamina which has two fibre orientations which are perpendicular to each other. Here the WF lamina is modelled as a laminate consisting of UD lamina corresponding to the quantities of fibres in the warp and fill directions (in this connection see also Section 4.6.2).

*Räumliche Spannungszustände*

Für eine grobe Abschätzung der Gefahr interlamina- rer Brüche infolge einer interlaminaren Zugspannung  $\sigma_3$  und interlaminarer Schubspannungen  $\tau_{3W}$  und  $\tau_{3F}$  ist näherungsweise folgende Bedingung für inter- laminaren Bruch anwendbar:

$$\frac{\tau_{3W}^2 + \tau_{3F}^2}{R_{\tau_3}^2} + \frac{\sigma_3}{R_{\sigma_3}} = 1 \quad \text{für } \sigma_3 > 0 \quad (59)$$

$R_{\tau_3}$  und  $R_{\sigma_3}$  sind experimentell ermittelte interlami- nare Festigkeiten. Für eine interlaminare Druckspan- nung ( $\sigma_3 < 0$ ) entfällt in Gleichung (59) der Term mit  $\sigma_3$ .

Auf die besondere Problematik der Bruchgefahr in- folge interlaminarer Spannungen wird im Ab- schnitt 5.1.3 näher eingegangen.

**4.5.4 M-Schicht**

*Ebene Spannungszustände*

Im Gegensatz zu UD-Schichten und G-Schichten kann hier bei ebenen Spannungszuständen in der Schichtebene vereinfacht wie bei isotropen Werkstof- fen mit der Hauptnormalspannung und der maxima- len Schubspannung gearbeitet werden. Brauchbar ist die Bruchbedingung der maximalen Hauptnormal- zugspannung  $\sigma_I = R^t$  oder  $\sigma_{II} = R^t$  im Fall *normal- spannungsbedingter* Zug-Bruch. Im Fall *schub-span- nungsbedingter* Bruch (wie unter  $\sigma^c$ ) sind bei sprö- dem Verhalten der M-Schicht näherungsweise die Bruchbedingungen

$$\begin{aligned} |\tau_{\max}| &= 0,5 |\sigma_I - \sigma_{II}| = 0,5 R^c, \\ \sigma_I &= -R^c \text{ oder } \sigma_{II} = -R^c \end{aligned} \quad (60)$$

entsprechend einer hexagonalen Bruchkurve gemäß Bild 17 ansetzbar [Säh93].

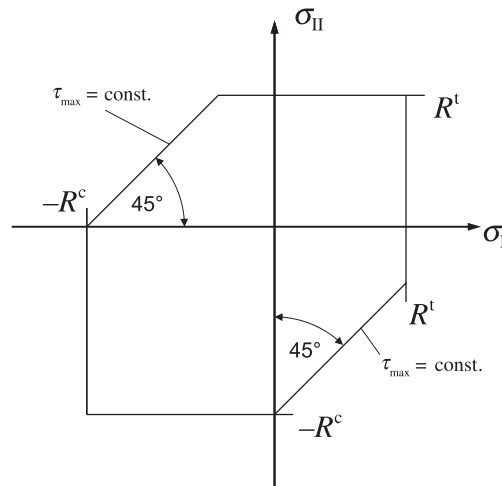


Bild 17. Bruchkurve der M-Schicht für ebene Spannungszu- stände ( $\sigma_I$  und  $\sigma_{II}$  sind die in der Schichtebene wirkenden Hauptnormalspannungen).

*Three-dimensional stress states*

To make a rough assessment of the danger of inter- laminar fractures as the result of interlaminar tensile stress  $\sigma_3$  and interlaminar shear stresses  $\tau_{3W}$  and  $\tau_{3F}$  the following approximative condition for interlami- nar fracture may be used:

$$\frac{\tau_{3W}^2 + \tau_{3F}^2}{R_{\tau_3}^2} + \frac{\sigma_3}{R_{\sigma_3}} = 1 \quad \text{for } \sigma_3 > 0 \quad (59)$$

$R_{\tau_3}$  and  $R_{\sigma_3}$  are interlaminar strengths obtained by experiment. In the case of interlaminar compressive stress ( $\sigma_3 < 0$ ) the term with  $\sigma_3$  is omitted from Equation (59).

Section 5.1.3 provides a more detailed treatment of the special problems involved in the risk of fracture as the result of interlaminar stresses.

**4.5.4 M lamina**

*Two-dimensional stress states*

In contrast to UD laminae and WF laminae, here a simplified approach, like that for isotropic materials, is possible in the case of two-dimensional stress states in the lamina plane, using the principal normal- stress and the maximum shear stress. In the case of fracture caused by normal stress, the failure condition of the maximum principal tensile stress  $\sigma_I = R^t$  or  $\sigma_{II} = R^t$  is useful. In the case of fracture caused by shear stress (as under  $\sigma^c$ ), on the other hand, if the M lamina has brittle properties, then the fracture condi- tions

$$\begin{aligned} |\tau_{\max}| &= 0,5 |\sigma_I - \sigma_{II}| = 0,5 R^c, \\ \sigma_I &= -R^c \text{ or } \sigma_{II} = -R^c \end{aligned} \quad (60)$$

corresponding to a hexagonal fracture curve as shown in Figure 17 may be applied as approximations [Säh93].

Figure 17. Fracture curve of the M lamina for two-dimensional stress states ( $\sigma_I$  and  $\sigma_{II}$  are the principal normal-stresses in the plane of the lamina).

Zur Bestimmung der ZFB-Grenze sind statt  $R^t$  bzw.  $\tau_{\max}$  die Spannungen  $R_{\text{IFF}}$  bzw.  $\tau_{\text{IFF}}$  an der Rissbildungsgrenze einzusetzen.

#### *Räumliche Spannungszustände*

Die M-Schicht ist bei räumlichen Spannungszuständen als eine in der Schichtebene isotrope Schicht zu betrachten.

#### **4.5.5 Einzusetzende Festigkeitswerte**

Die Bruchkriterien für FB und ZFB können prinzipiell – falls der Bruchmechanismus derselbe bleibt – für verschiedene Beanspruchungsarten, wie z.B. monotone Laststeigerung bis zum Bruch, ruhende Langzeitbeanspruchung oder Schwingbeanspruchung, angewandt werden. Man muss nur die zur jeweiligen Beanspruchungsart zugehörigen Festigkeiten einsetzen; siehe Abschnitt 5.3.

#### **4.6 Anwendung von Berechnungsprogrammen**

Es gibt Berechnungsprogramme, bei denen die Eigenschaften von Schichten basierend auf so genannten mikromechanischen Formeln aus den Eigenschaften von Fasern und Matrix berechnet werden (siehe VDI 2014 Blatt 2). Die so berechneten Werkstoffdaten sollten nur dann verwendet werden, wenn eigene experimentell ermittelte Daten oder publizierte Daten vom gleichen oder zumindest sehr ähnlichem Faser/Matrix-Typ nicht zur Verfügung stehen.

Die gleichen Eingabedaten für die Schicht können zur Berechnung von Laminaten mittels Laminatberechnungsprogrammen (siehe Abschnitt 5.5.1) und von FKV-Bauteilen z.B. mittels FEM (siehe Abschnitt 5.5.2) benutzt werden. Für die Berechnung des Laminates mit „analytischen“ Programmen oder FEM-Schalenelementen benötigt man nur die Eigenschaften in der Schichtebene (siehe „2D“ in Tabelle 1). Die Verwendung von orthotropen Volumenelementen z.B. im Zuge einer FEM-Analyse bedingt die Verwendung aller 3-D-Eingabedaten.

Bei der Eingabe von Schicht-Daten sind die in Abschnitt 4 gegebenen Erläuterungen zu berücksichtigen. Es werden hier nur einige Hinweise mit direktem Bezug zu Berechnungsprogrammen aufgezeigt.

##### **4.6.1 UD-Schicht**

###### **Querkontraktionszahl**

Als Querkontraktionszahl wird üblicherweise die größere ( $\nu_{\perp\parallel}$ ) angegeben, die kleinere errechnet sich dann nach Gleichung (6). Welche der beiden in das jeweilige Berechnungsprogramm eingegeben wird, ist leider uneinheitlich und muss von Fall zu Fall geprüft werden.

To determine the IFF limit, the stresses  $R_{\text{IFF}}$  or  $\tau_{\text{IFF}}$  should be applied at the crack formation boundary instead of  $R^t$  or  $\tau_{\max}$ .

#### *Three-dimensional stress states*

With three-dimensional stress states the M lamina is to be regarded as a lamina which is isotropic in the lamina plane.

#### **4.5.5 Strength values to be used**

The strength criteria for FF and IFF can in principle be used – provided the failure mechanism remains the same – for various kinds of loading conditions, such as a monotonic increase in load until failure occurs, static long-term load, or cyclic load. It is only necessary to apply the strengths values corresponding to the type of loading; see Section 5.3.

#### **4.6 Application of calculation programs**

Calculation programs are available which on the basis of so-called micromechanical formulae calculate the properties of laminae from the properties of the fibres and matrix (see VDI 2014 Part 2). Material data calculated in this way should only be used if one's own data obtained by experiment or published data for the same, or at least for a very similar, fibre-matrix type are not available.

The same input data for the lamina can be used for the analysis of both laminates by using a laminate analysis program (see Section 5.5.1) or FRP components using FEM (see Section 5.5.2). If the laminate is analysed using “analytical” programs or FEM shell elements, only the properties in the lamina plane will be required (2D in Table 1). If orthotropic volume elements are used – for example, as part of an FEM – then all 3D input data will have to be used.

The explanations provided in Section 4 should be taken into account when inputting lamina data. At this point only a limited amount of information with direct relevance to calculation programs will be provided.

##### **4.6.1 UD lamina**

###### **Poisson's ratio**

As regards Poisson's ratio, it is normally the larger ( $\nu_{\perp\parallel}$ ) which is given while the smaller will then be calculated using Equation (6). As to which of the two values will be input into the calculation program there is unfortunately no uniform procedure and this will have to be decided on a case by case basis.



### Nicht-Linearität

Die Eigenschaften einer UD-Schicht sind in Faserichtung faserdominiert, und das Verformungsverhalten kann in guter Näherung als linear-elastisch angenommen werden. Quer zur Faserrichtung sind die Eigenschaften matrixdominiert, und das Verformungsverhalten besonders bei Druck  $\sigma_2$  und Schub  $\tau_{21}$  ist nicht mehr linear-elastisch. Der Verlauf der matrixdominierten Spannungs-Verzerrungs-Kurve ist bei größeren Verzerrungen degressiv, das heißt, es kann korrekterweise nicht mit konstanten Moduln  $E_{\perp}$  und  $G_{\perp\parallel}$  gerechnet werden, sondern es werden zweckmäßigerweise Sekantenmoduln benutzt, siehe Abschnitt 5.2.2. Sofern im Berechnungsprogramm Sekantenmoduln nicht als Funktion der Spannung eingegeben werden können, sollten gemittelte Sekantenmoduln eingesetzt werden (z.B. der Mittelwert aus Modul bei Belastungsbeginn und Sekantenmodul bei Erreichen der jeweiligen Festigkeit oder der Sekantenmodul bei Betriebslast). Sofern eine Berechnung mit Anfangsmoduln durchgeführt wird, werden die Spannungen  $\sigma_1$  in der Regel geringfügig zu niedrig,  $\sigma_2$  und insbesondere  $\tau_{21}$  aber teilweise erheblich zu hoch berechnet; die matrixdominierten Spannungen „laufen“ zugunsten der faserdominierten „davon“. Es werden bei einer Berechnung mit Anfangsmoduln (geringfügig) unterschätzte FB- aber teilweise deutlich zu hohe ZFB-Anstrengungen berechnet.

### Festigkeitskriterien

Das in vielen FEM-Programmen implementierte Tsai/Wu-Kriterium unterscheidet die grundverschiedenen Bruchformen FB und ZFB nicht, das heißt es berücksichtigt nicht die inhomogene Beschaffenheit einer UD-Schicht, sondern behandelt diese nicht nur – wie allgemein üblich – bei der Spannungsanalyse, sondern auch bezüglich des Bruchverhaltens wie einen homogenen anisotropen Stoff. Man nennt Kriterien dieser Art – es gibt neben dem Tsai/Wu-Kriterium noch eine Reihe ähnlicher Kriterien – daher „Pauschalbruchkriterien“. Der gravierendste Nachteil des Tsai/Wu-Kriteriums ist, dass im  $(\sigma_1, \sigma_2)$ -Druck/Druck-Bereich Ergebnisse erhalten werden, die wahrscheinlich sehr weit auf der unsicheren Seite liegen [Har93; Puc96a]. Im ungünstigsten Fall errechnet sich bei einem Verhältnis  $\sigma_1/\sigma_2$ , wie es bei einem isotensoidisch ausgelegten Außendruckbehälter auftritt, ein Bruch erst bei einer Spannung  $|\sigma_1|$ , die 2,5-mal höher ist als die faserparallele Festigkeit  $R_{\parallel}^c$ . Dies erscheint sehr unrealistisch [Puc96b].

Es sollten unbedingt FB- und ZFB-unterscheidende Kriterien angewandt werden, um die Effizienz bei der Bauteilentwicklung zu steigern. Sofern diese im ver-

### Non-linearity

The properties of a UD lamina are fibre-dominated in the fibre direction and the strain behaviour can with a good approximation be taken as being linear-elastic. Transversely to the fibre direction the properties are dominated by the matrix and the deformation behaviour, particularly in the case of compressive  $\sigma_2$  and shear  $\tau_{21}$ , is no longer linear-elastic. The course of the matrix-dominated stress-strain curve is degressive at greater strain levels. In other words, analysis cannot be correctly performed using constant moduli  $E_{\perp}$  and  $G_{\perp\parallel}$ , secant moduli are more appropriately used instead, see Section 5.2.2. In cases where secant moduli cannot be input into the calculation program as a function of the stress, averaged secant moduli should be used (for example, the mean value of the modulus at the start of loading and the secant modulus at lamina fracture stresses or the secant modulus under the normal operating load). When an analysis is carried out using initial-state moduli, the stresses  $\sigma_1$  will as a rule be slightly too low while  $\sigma_2$  and in particular  $\tau_{21}$  will sometimes be calculated considerably too high – the matrix-dominated stresses will tend to “run away” in favour of the fibre-dominated stresses. When initial-state moduli are used, the FF stress exposure will be calculated as (slightly) too low, however the IFF stress exposure as sometimes much too high.

### Strength criteria

The Tsai/Wu criterion which is implemented in many FEM programs does not distinguish between the failure types FF and IFF which are fundamentally different. In other words, it does not take into account the heterogeneous nature of a UD lamina but instead treats it as a homogeneously isotropic material not only in stress analysis – as is the normal procedure everywhere – but also as regards its fracture behaviour. For this reason, criteria of this kind – and there is a whole series of similar criteria in addition to the Tsai/Wu criterion – are termed “global failure criteria”. The most serious disadvantage of the Tsai/Wu criterion is that it delivers results in the  $(\sigma_1, \sigma_2)$  compression-compression range which probably fall a very long way on the unsafe side [Har93; Puc96a]. In the worst case, when there is a  $\sigma_1/\sigma_2$  ratio such as obtained with a vessel of isotensoid design and loaded by external pressure analysis will state that failure only occurs at stress  $|\sigma_1|$  which is 2,5 times greater than the parallel-to-fibre strength  $R_{\parallel}^c$ . This appears very unrealistic [Puc96b].

It is essential that criteria which distinguish between FF and IFF should be used if the efficiency in component development is to be improved. In the event that

wendeten FEM-Programm nicht implementiert sind, kann der Berechner folgendermaßen vorgehen:

- Die oben aufgeführten neuen Kriterien können in den meisten FEM-Programmen über eine Schnittstelle implementiert werden, oder
- durch die Anwendung des Tsai/Wu-Kriteriums in zwei getrennten Rechengängen können behelfsweise die Ergebnisse des FB-Kriteriums Gleichung (42) und des ZFB-Kriteriums nach *Puck/Knaust* Gleichung (49) erzielt werden. Zur Berechnung von ZFB müssen die faserdominierten Festigkeiten ( $R_{||}^t, R_{||}^c$ ) gemäß Gleichung (51) bzw. Gleichung (52) gesetzt werden. Zur Berechnung von FB müssen alle matrixdominierten Festigkeiten ( $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\perp||}$ ) sehr groß gewählt werden. Einzelheiten können Anhang A3 entnommen werden.

#### 4.6.2 G-Schicht

Die G-Schicht kann auf zweierlei Weise modelliert werden: entweder als Laminat aus 0°- und 90°-UD-Schichten oder, indem  $E_W, E_F$  usw. (vgl. Tabelle 1) verwendet werden. Falls die Modellierung der G-Schicht durch sich kreuzende UD-Schichten erfolgt, ist darauf zu achten, dass z.B. eine Folge aus  $[\pm 45]$ - bzw.  $[0/90]$ -G-Schichten in der Schichtfolge zu ersetzen ist durch  $[+45/-45/-45/+45]$  bzw.  $[0/90/90/0]$ , um möglichst nur geringe, in Wirklichkeit nicht vorhandene, Kopplungssteifigkeiten zu „wecken“.

### 5 Modellierung des Laminates

In diesem Abschnitt wird das Verhalten des Laminates beschrieben. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich die Schicht im Laminat im Wesentlichen so verhält, wie es in Abschnitt 4 beschrieben wurde. Für eine Kurzzeitbeanspruchung ist dies eher zulässig als für eine schwingende Langzeitbeanspruchung.

Ziel der Laminat-Analyse ist die Ermittlung der Spannungen und Verzerrungen in jeder Schicht des Laminates. Um den Steifigkeits-Anteil der Schicht im Laminat zu erhalten, werden die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen vom KOS der Schicht mit Hilfe einer Transformationsmatrix in das Laminat-KOS ( $x, y$ ) „gedreht“. Entsprechend sind die Temperatur- und Feuchteausdehnungskoeffizienten der Schicht zu transformieren, um auch deren anteilige Wirkung im Laminat-Verhalten zu ermitteln [Her98; Roh96]. Die Bewertung der berechneten Spannungen erfolgt für jede Schicht mit Festigkeitskriterien [Puc96a]. Weil im Laminat ZFB-Grenzen überschritten werden können, muss auch das Verhalten der Schicht nach ZFB modelliert werden [Puc96a].

this distinction is not implemented in the FEM program which is being used, the design engineer may proceed as follows:

- The new criteria listed above may be implemented in most FEM programs via an interface, or
- if, as a makeshift, the Tsai/Wu criterion is applied in two separate calculating operations the results for the FF criterion may be obtained as per Equation (42) and for the IFF criterion as per the *Puck/Knaust* Equation (49). In order to calculate the IFF, the fibre-dominated strengths ( $R_{||}^t, R_{||}^c$ ) must be set in accordance with Equation (51) or Equation (52). To calculate FF, all matrix-dominated strengths ( $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\perp||}$ ) will need to be set very high. More detailed information will be found in the Annex A3.

#### 4.6.2 WF lamina

There are two possible ways of modelling the WF lamina: either as a laminate consisting of 0° and 90° UD laminae or by using  $E_W, E_F$  and so on (cf. Table 1). If the WF lamina is modelled using crossing UD laminae, it should be ensured that a sequence of  $[\pm 45]$  or  $[0/90]$ -WF-laminae in the lamina stacking sequence is replaced by  $[+45/-45/-45/+45]$  or  $[0/90/90/0]$  so as to “arouse” the smallest possible coupling stiffnesses, which in reality do not actually exist.

### 5 Modelling the laminate

This section will deal with the behaviour of the laminate. It will be assumed here that the lamina in the laminate basically behaves as was described in Section 4. This is rather more acceptable for short-term loading than for long-term cyclic loading.

The aim of laminate analysis is to determine the stresses and strains in each lamina of the laminate. To find out what proportion of laminate stiffness is due to a particular lamina, the stress/strain relations are “rotated” with the aid of a transformation matrix from the COS of the lamina to the laminate COS ( $x, y$ ). The coefficients of expansion for temperature and moisture of the lamina should be transformed in the corresponding manner in order to determine what effect they have proportionally in the laminate behaviour [Her98; Roh96]. Strength criteria are used in order to evaluate the stresses calculated for each lamina [Puc96a]. Since it is possible that IFF limits could be exceeded in the laminate, it will also be necessary to model how the lamina behaves after IFF [Puc96a].

## 5.1 Ermittlung von Spannungen und Verzerrungen

Die in Abschnitt 5.1.2 beschriebene CLT ist Stand der Technik. Sie wird ergänzt durch die (einfachere) Netztheorie, die besonders bei der Vorauslegung von Laminaten sehr hilfreich ist [Puc96a; Schü05].

Die Entwicklung einer allgemeinen, der CLT ähnlichen Theorie für die Ermittlung räumlicher Spannungszustände von Laminaten ist wünschenswert. Hier ist man zurzeit noch auf FEM-Analysen angewiesen.

### 5.1.1 Netztheorie

Die Modellvorstellung der Netztheorie beruht darauf, dass allein das Faser-„Netz“ die äußeren Lasten aufnimmt, wobei Membranbeanspruchung vorausgesetzt wird. Nur die Fasern übertragen Zug- oder Druckkräfte. Bei den Druckkräften wird angenommen, dass die Matrix, obwohl sie nicht an der Lastaufnahme beteiligt ist, die Fasern ausreichend gegen Ausknicken stützt. Auf Grund dieser groben Vereinfachung ergibt sich meistens eine „statisch bestimmte“ Rechnung, das heißt, die Kraftverteilung auf die einzelnen Schichten folgt allein aus Gleichgewichtsbedingungen. Dadurch wird die Netztheorie sehr einfach, und sie ist daher gut für den Laminat-Entwurf geeignet. Da ein Laminat nach Möglichkeit so konstruiert werden sollte, dass die Fasern den Großteil der äußeren Lasten tragen, ist es vorteilhaft, durch die Netztheorie zu einer entsprechenden Faserorientierung „gezwungen“ zu werden.

Im allgemeinen Fall einer ebenen Beanspruchung geht man zur Ermittlung der beanspruchungsgerechten Faserorientierungen (Schichtwinkel) zweckmäßigerweise folgendermaßen vor: Man ermittelt die beiden senkrecht aufeinander stehenden Hauptnormalkrafttrichtungen. Ein geeignetes Fasernetz ist die  $(0^\circ, 90^\circ)$ -Anordnung, wobei alle Fasern in Richtung der Hauptnormalkräfte orientiert sind und die Fasermengen entsprechend dem Kraftverhältnis gewählt werden. Wenn das Kräfteverhältnis sich während des Betriebs ändert, sind die Fasern der beiden Richtungen nicht mehr gleich hoch beansprucht. Aber wenn die Bruchgrenze noch nicht erreicht wird, kann die gewählte  $(0^\circ, 90^\circ)$ -Faseranordnung auch bei verändertem Kräfteverhältnis die Last aufnehmen.

Statt der  $(0^\circ, 90^\circ)$ -Anordnung kann man auch einen ausgeglichenen Winkelverbund (AWV) wählen, dessen Fasern symmetrisch zu den beiden Hauptnormalkrafttrichtungen verlaufen. Bei diesem schließen die beiden Faserrichtungen mit einer Hauptnormalkrafttrichtung die Winkel  $\beta_1 = +\omega$  und  $\beta_2 = -\omega$  ein. In diesem Fall muss der Winkelbetrag  $\omega$  dem Verhältnis der Hauptnormalkräfte angepasst werden

## 5.1 Determining stresses and strains

The CLT which is described in Section 5.1.2 state of the art. It is supplemented by the (simpler) netting theory which is particularly helpful in preliminary design of laminates [Puc96a; Schü05].

The development of a general theory similar to CLT for determining three-dimensional stress states is desirable. At the present time we must still depend on FEM.

### 5.1.1 Netting theory

The model concept used in netting theory is based upon the assumption that it is the fibre “network” alone which sustains the external loads, and this is assumed to be membrane forces. Only the fibres transmit tensile or compressive forces. In the case of the compressive forces, it is assumed that the matrix, despite not being involved in bearing the load, will provide adequate support against buckling of the fibres. This rough simplification in most cases results in a “statically determinate” calculation – in other words, the distribution of forces over the individual laminae follows solely from equilibrium conditions. This makes netting theory very simple and therefore eminently suitable for the laminate’s draft design. Since a lamina should if at all possible be designed in such a way that the fibres bear the major part of the external loads, it may be regarded as an advantage that netting theory “forces” a fibre orientation corresponding to this.

In the general case of a two-dimensional loading, the following procedure is a suitable method of determining which fibre orientations (lamina angle) are appropriate to the loading. Firstly the two mutually perpendicular principal normal-stress directions are determined. A suitable fibre network is the  $(0^\circ, 90^\circ)$  arrangement whereby all of the fibres are oriented in the direction of the principal normal forces and the fibre quantities are selected on the basis of the force ratio. Should the force ratio change while the laminate is in service, the fibres in the two directions will not then be stressed to identical levels. But if the failure limit has not yet been reached, the selected  $(0^\circ, 90^\circ)$  arrangement of the fibres will be able to bear the load even when the force ratio changes.

Instead of the  $(0^\circ, 90^\circ)$  arrangement, a balanced angle-ply laminate (BAP) could also be selected whose its fibres run symmetrically with the two principal normal-stress directions. Here the two fibre directions and one principal normal-stress direction enclose the angles  $\beta_1 = +\omega$  and  $\beta_2 = -\omega$ . In such a case the value of the angle  $\omega$  must be adapted to the ratio of the principal normal forces ( $\omega = 54,75^\circ$  for

( $\omega = 54,75^\circ$  für  $n_I/n_{II} = 2$ ). Die AWW-Faseranordnung hat gegenüber der  $(0^\circ, 90^\circ)$ -Anordnung den Nachteil, dass sie bei einer Änderung von  $n_I/n_{II}$  während des Betriebs des Bauteils ohne Mitwirkung der Matrix kein Gleichgewicht zwischen den Faserkräften und den äußeren Lasten herstellen kann.

Ein Fasernetz mit drei verschiedenen Faserorientierungen kann hingegen *jede* beliebige ebene Beanspruchung ohne Mitwirkung des Harzes (abgesehen von der Stützwirkung gegen Faserausknicken) allein durch Faserzug- und Faserdruckkräfte aufnehmen. Wenn im Betrieb nacheinander verschiedene Beanspruchungsfälle auftreten, kann der Konstrukteur nun so vorgehen, dass er das für den dominierenden Beanspruchungsfall optimale (das heißt insgesamt dünnste) dreischichtige Fasernetz ermittelt (Schichtwinkel und -dicken) und dann überprüft, ob dieses auch die anderen Beanspruchungsfälle erträgt.

**Herleitung der Formeln**

Im allgemeinen Fall eines Fasernetz-Elements mit drei Faserrichtungen (Bild 18) setzen sich die (bekannten) Schnitt-Kraftflüsse des Laminates (zumeist

$n_I/n_{II} = 2$ ). The disadvantage which the BAP arrangement has with respect to the  $(0^\circ, 90^\circ)$  arrangement is that when a change in  $n_I/n_{II}$  occurs when the component is in service it is not possible to achieve an equilibrium between the fibre forces and the external loads without involvement of the matrix.

A fibre network with three different fibre orientations can, on the other hand, bear *any* two-dimensional load case at all without involvement of the matrix (apart from its contribution to preventing fibre buckling) by means of fibre tensile forces and fibre compressive forces alone. If component service involves a succession of different loading cases, the designer may now proceed by first determining the optimum (in other words, the thinnest overall) three-lamina fibre network (lamina angles and thicknesses) for the dominant load case, and then checking to see whether it will also cope with the other load cases.

**Derivation of the formulae**

In the general case of a fibre-network element with three fibre directions (Figure 18) the (known) resultant forces per width (termed section forces) in the

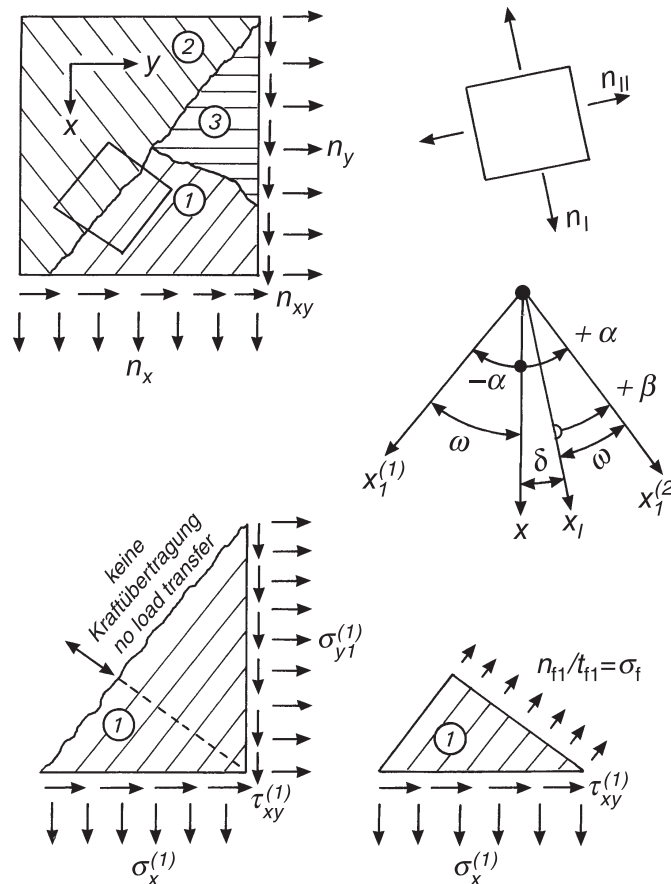


Bild 18. Begriffe, Kräfte und Spannungen im ebenen Fasernetz (nur Größen am positiven Schnittufer eingetragen)

Figure 18. Terms, forces and stresses in the two-dimensional fibre network (quantities entered only on section with positive sign)

Schnittkräfte genannt) aus der Summe der Schicht-Kraftflüsse (vereinfacht Schichtkräfte) zusammen gemäß

$$\{n\} = \sum_1^3 \{n\}_k \quad (61)$$

$$\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_{f1}c_1^2 & +n_{f2}c_2^2 & +n_{f3}c_3^2 \\ n_{f1}s_1^2 & +n_{f2}s_2^2 & +n_{f3}s_3^2 \\ +n_{f1}s_1c_1 & +n_{f2}s_2c_2 & +n_{f3}s_3c_3 \end{Bmatrix} \quad (62)$$

mit  $c_k = \cos \alpha_k$ ,  $s_k = \sin \alpha_k$ ,

das heißt drei Gleichungen stehen sechs Unbekannte ( $3\alpha_k$ ,  $3n_{fk}$ ) gegenüber. Mit der Festlegung der Schichtwinkel  $\alpha_k$  ist das Gleichungssystem nach den Schichtkräfte  $n_{fk}$  auflösbar. Damit sind die Fasermengen in den Schichten aus der Optimierungsbedingung „Gleichmäßige Ausnutzung bzw. Faserverspannung“

$$\sigma_f = n_{f1}/t_{f1} = n_{f2}/t_{f2} = n_{f3}/t_{f3} = \text{const.} \quad (63)$$

eindeutig bestimmbar.

Für die Dimensionierung wird die Faserverspannung mit der Faserfestigkeit verglichen (unterhalb Beulgefahr):

$$\sigma_f \rightarrow R_f^t \text{ oder } R_f^c$$

Aus Gleichung (63) folgt, dass  $\varepsilon_f = \sigma_f/E_f = \text{const.}$  in allen Schichten.

Die Winkelwahl ist optimal, wenn die Dicke des Fasernetzes

$$t_f = t_{f1} + t_{f2} + t_{f3} = \text{Minimum}$$

wird.

Die wirkliche Schicht-Dicke  $t_k$  ist infolge der Matrixvolumenanteils größer als  $t_f$  und somit die Gesamtdicke  $t$  des Laminates ( $t = \sum t_k = \sum t_{fk}/\varphi$ ). Damit kann der Abstand der Schicht von der Bezugs-Ebene mit den nach der Netztheorie ermittelten Dicken abgeschätzt werden.

Falls das Laminat nur zwei Faserrichtungen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  hat, entfällt die dritte Spalte ( $n_{f3}$ ) in Gleichung (62). Mit den gegebenen Schnittkräften  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_{xy}$  sind dann mittels der drei Gleichungen drei Unbekannte bestimmt. In diesem Fall muss eine Faserrichtung, z.B.  $\alpha_1$  (gewichtsoptimal) gewählt werden. Dann ist durch die drei Gleichungen der zweite Richtungswinkel  $\alpha_2$  festgelegt. Mit einem anderen als dem so errechneten Winkel  $\alpha_2$  wäre kein Gleichgewicht herstellbar. Das heißt, dass jede Veränderung des Verhältnisses der Schnittkräfte untereinander eine neue Schichtwinkelzuordnung erfordert.

laminates are composed of the sum of the section forces portions of the laminae (briefly laminae forces) as expressed by

$$\{n\} = \sum_1^3 \{n\}_k \quad (61)$$

$$\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_{f1}c_1^2 & +n_{f2}c_2^2 & +n_{f3}c_3^2 \\ n_{f1}s_1^2 & +n_{f2}s_2^2 & +n_{f3}s_3^2 \\ +n_{f1}s_1c_1 & +n_{f2}s_2c_2 & +n_{f3}s_3c_3 \end{Bmatrix} \quad (62)$$

where  $c_k = \cos \alpha_k$ ,  $s_k = \sin \alpha_k$ .

In other words, three equations involve six unknowns ( $3\alpha_k$ ,  $3n_{fk}$ ). Once the lamina angles  $\alpha_k$  have been determined, the equation system can be solved on the basis of the laminae forces  $n_{fk}$ . This means that the fibre quantities in the laminae can be uniquely determined from the optimization condition of “uniform utilization or fibre stress“.

$$\sigma_f = n_{f1}/t_{f1} = n_{f2}/t_{f2} = n_{f3}/t_{f3} = \text{const.} \quad (63)$$

Dimensioning is performed by comparing the fibre stress with the fibre strength (below the risk of buckling):

$$\sigma_f \rightarrow R_f^t \text{ oder } R_f^c$$

It follows from Equation (63) that  $\varepsilon_f = \sigma_f/E_f = \text{const.}$  in all laminae.

The angle selection is optimum when the thickness of the fibre network is

$$t_f = t_{f1} + t_{f2} + t_{f3} = \text{minimum}$$

As a result of the matrix volume content the real lamina thickness  $t_k$  is greater than  $t_f$  and thus the total thickness  $t$  of the laminate ( $t = \sum t_k = \sum t_{fk}/\varphi$ ). In this way the distance of the lamina from the reference plane can be estimated using the thicknesses determined by the netting theory.

If the laminate only has two fibre directions  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$ , the third column ( $n_{f3}$ ) in Equation (62) will be omitted. With the three section forces given,  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_{xy}$ , the three unknowns are then determined by means of the three equations. In this case one fibre direction must be selected, such as  $\alpha_1$  (selected optimal for weight). The second direction angle  $\alpha_2$  is then determined by the three equations. It would not be possible to create an equilibrium with any other angle than the angle  $\alpha_2$  which was calculated. What this means is that any change in the ratio of section forces would make a new lamina angle arrangement necessary.

Bei der Optimierung ist es sinnvoll, stets mit den Hauptnormalkräften (richtiger: Hauptnormalkraftflüssen) zu arbeiten. Der zugehörige Transformationswinkel  $\delta$ , der das  $(x,y)$ -KOS im mathematisch positiven Sinn in das  $(x_I, x_{II})$ -KOS dreht, ist aus

$$\delta = 0,5 \arctan [2 n_{xy} / (n_x - n_y)] \quad (64)$$

zu errechnen, sodass die Hauptnormalkräfte über (hier:  $c = \cos \delta$ ,  $s = \sin \delta$ )

$$\begin{Bmatrix} n_I \\ n_{II} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{Bmatrix} \quad (65)$$

aus den auf  $x$  und  $y$  bezogenen Schnittkräften ermittelt werden können.

Damit lauten die Gleichgewichtsbedingungen in den Hauptnormalkräften (Bild 18,  $\tilde{c} = \cos \beta$ ,  $\tilde{s} = \sin \beta$ ) für drei Faserorientierungen

$$\begin{Bmatrix} n_I \\ n_{II} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +n_{f1}\tilde{c}_1^2 & +n_{f2}\tilde{c}_2^2 & +n_{f3}\tilde{c}_3^2 \\ +n_{f1}\tilde{s}_1^2 & +n_{f2}\tilde{s}_2^2 & +n_{f3}\tilde{s}_3^2 \\ +n_{f1}\tilde{s}_1\tilde{c}_1 & +n_{f2}\tilde{s}_2\tilde{c}_2 & +n_{f3}\tilde{s}_3\tilde{c}_3 \end{Bmatrix} \quad (66)$$

Sind die Hauptnormalkräfte  $n_I$  und  $n_{II}$  bekannt und die drei Schichtwinkel  $\beta_k$  gewählt, so ist das Gleichungssystem unter Einbeziehung der dritten Gleichung, einer Bedingungsgleichung für den Hauptnormalkraftzustand, eindeutig lösbar. Welcher Schichtaufbau gewichtsoptimal ist, (statt eines Festigkeitsproblems kann auch ein Steifigkeitsproblem vorliegen) ist zu überprüfen.

### Ermittlung optimaler Faserorientierungen für eine ebene Beanspruchung

Bei der Ermittlung des optimalen Fasernetzes muss man, je nach Vorzeichen der Hauptnormalkräfte, zwei Fälle unterscheiden:

#### *$n_I$ und $n_{II}$ mit gleichen Vorzeichen*

Hier sind die Faserrichtungen  $\beta_k$  so zu wählen, dass die  $n_{fk}$  in allen Schichten das gleiche Vorzeichen wie  $n_I$  und  $n_{II}$  haben. Die Dicken der Schichten müssen entsprechend den auftretenden Schichtkräften  $n_{fk}$  so bemessen werden, dass überall die gleiche Faser- spannung herrscht.

Die optimalen zweischichtigen Fasernetze können bei bekannten Hauptnormalkräften unter Einhaltung der Bedingung

It is a good idea in optimization to work at all times with the principal normal forces (or more correct principal normal force flow). The corresponding transformation angle  $\delta$  which rotates the  $(x,y)$  COS in the mathematically positive direction into the  $(x_I, x_{II})$  COS is to be calculated from

$$\delta = 0,5 \arctan [2 n_{xy} / (n_x - n_y)] \quad (64)$$

so that the principal normal forces can be determined from the section forces with respect to  $x$  and  $y$  (here:  $c = \cos \delta$ ,  $s = \sin \delta$ )

$$\begin{Bmatrix} n_I \\ n_{II} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{Bmatrix} \quad (65)$$

This means that the equilibrium conditions for the principal normal forces (Figure 18,  $\tilde{c} = \cos \beta$ ,  $\tilde{s} = \sin \beta$ ) for three fibre orientations will be

$$\begin{Bmatrix} n_I \\ n_{II} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +n_{f1}\tilde{c}_1^2 & +n_{f2}\tilde{c}_2^2 & +n_{f3}\tilde{c}_3^2 \\ +n_{f1}\tilde{s}_1^2 & +n_{f2}\tilde{s}_2^2 & +n_{f3}\tilde{s}_3^2 \\ +n_{f1}\tilde{s}_1\tilde{c}_1 & +n_{f2}\tilde{s}_2\tilde{c}_2 & +n_{f3}\tilde{s}_3\tilde{c}_3 \end{Bmatrix} \quad (66)$$

If the principal normal forces  $n_I$  and  $n_{II}$  are known and the three lamina angles  $\beta_k$  selected, then the equation system, including the third equation (an equation of condition for the principal normal force state), will have one solution. Which lamina lay-up is the best from the point of view of weight (instead of a strength problem there may also be a problem of stiffness) needs to be checked.

### Determining the optimum fibre orientation for a single two-dimensional loading case

Two cases have to be distinguished when determining the optimum fibre network, and these depend on the sign of the principal normal forces:

#### *$n_I$ and $n_{II}$ with the same sign*

Here the fibre directions  $\beta_k$  should be selected such that the  $n_{fk}$  in all laminae have the same sign as  $n_I$  and  $n_{II}$ . The thicknesses of the lamina must be dimensioned in accordance with the lamina forces  $n_{fk}$  occurring in such a way that the same fibre stress applies everywhere.

Where the principal normal forces are known and the following condition is complied with

$$\beta_2 = -\arctan \left[ \frac{n_{II}/n_I}{\tan \beta_1} \right] \quad (67)$$

mit Hilfe folgender Formel ermittelt werden

$$\begin{Bmatrix} n_I \\ n_{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta_1 & \cos^2 \beta_2 \\ \sin^2 \beta_1 & \sin^2 \beta_2 \end{bmatrix} \cdot R_f \begin{Bmatrix} t_{f1} \\ t_{f2} \end{Bmatrix} \quad (68)$$

Gleichung (67) wird von unendlich vielen  $\beta_1/\beta_2$ -Kombinationen erfüllt, sodass ein Winkel  $\alpha_k = \delta + \beta_k$  (bezogen auf das x,y-Laminat-KOS) z.B. nach fertigungstechnischen Gesichtspunkten gewählt werden kann.

*Beispiel:* Zylindrischer Behälter unter Innendruck

Für einen AWW mit  $\beta_1 = +\omega$  und  $\beta_2 = -\omega$  ergibt sich aus

$$\tan \omega = \sqrt{n_{II}/n_I}, n_{f1} = n_{f2} = 0,5 (n_I + n_{II}) \quad (69)$$

$$\omega = \arctan \sqrt{2/1} = 54,75^\circ$$

Völlig gleichwertig bezüglich der Leichtbau-güte wäre aber auch ein Laminat mit doppelt so viel Fasern in Umfangsrichtung wie in Längsrichtung des Zylinders.

Sollen die Faserkräfte  $n_{f1}, n_{f2}$  in den Schichten gleiches Vorzeichen haben, so müssen entsprechende Gleichung (67)  $\beta_1$  und  $\beta_2$  ungleiche Vorzeichen haben. Ungleiche Vorzeichen von  $n_{f1}, n_{f2}$  bedingen gleiches Vorzeichen von  $\beta_1, \beta_2$ .

*$n_I$  und  $n_{II}$  mit ungleichen Vorzeichen*

Hier gibt es nur ein optimales Fasernetz. Die Fasern der Schichten müssen in Richtung der beiden Hauptnormalkräfte orientiert werden, das heißt bezogen auf das I,II-Laminat-KOS mit  $\beta_1 = 0^\circ$  und  $\beta_2 = 90^\circ$ . Prinzipiell tragfähig sind auch hiervon abweichende Faserorientierungen, diese sind dann aber nicht gewichtsoptimal, z.B. Torsionsrohre mit Winkeln  $\omega \neq 45^\circ$  [Puc96a].

**Ermittlung optimaler Faserorientierungen für mehrere ebene Beanspruchungsfälle**

Ein Fasernetz mit zwei Faserrichtungen kann nur *eine* ebene Beanspruchung tragen. Treten aber *verschiedene* ebene Beanspruchungsfälle auf, kann ein zweischichtiges Fasernetz im Allgemeinen nicht alle Beanspruchungen tragen. Es sind nun zwei Vorgehensweisen zu unterscheiden:

1. Das Fasernetz wird für den Hauptbeanspruchungsfall entworfen. Sofern die Nebenbeanspruchungsfälle erheblich geringer sind, können diese

$$\beta_2 = -\arctan \left[ \frac{n_{II}/n_I}{\tan \beta_1} \right] \quad (67)$$

the optimum two-lamina fibre networks can be determined with the aid of this formula

$$\begin{Bmatrix} n_I \\ n_{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta_1 & \cos^2 \beta_2 \\ \sin^2 \beta_1 & \sin^2 \beta_2 \end{bmatrix} \cdot R_f \begin{Bmatrix} t_{f1} \\ t_{f2} \end{Bmatrix} \quad (68)$$

Equation (67) is satisfied by an infinite number of  $\beta_1/\beta_2$  combinations which means that an angle  $\alpha_k = \delta + \beta_k$  (with respect to the x,y-laminate COS) can be picked on the basis of manufacturing technology considerations, for example.

*Example:* Cylindrical container under internal pressure load

For a BAP with  $\beta_1 = +\omega$  und  $\beta_2 = -\omega$

$$\tan \omega = \sqrt{n_{II}/n_I}, n_{f1} = n_{f2} = 0,5 (n_I + n_{II}) \quad (69)$$

$$\omega = \arctan \sqrt{2/1} = 54,75^\circ$$

However, a laminate with twice as many fibres in the cylinder circumferentially as longitudinally would have precisely the same weight.

If the fibre forces  $n_{f1}, n_{f2}$  in the laminae have the same sign, then, in accordance with Equation (67),  $\beta_1$  and  $\beta_2$  must have different signs. Different signs in  $n_{f1}, n_{f2}$  means that  $\beta_1, \beta_2$  must have the same sign.

*$n_I$  and  $n_{II}$  with different signs*

Here there is only one optimum fibre network. The fibres in the laminae must be oriented in the direction of the two principal normal forces – in other words,  $\beta_1 = 0^\circ$  and  $\beta_2 = 90^\circ$  with respect to the I,II laminate COS. Fibre orientations differing from this will also be capable of load-bearing in principle but they will not be optimal as far as weight is concerned – for example, torsion pipes with angles  $\omega \neq 45^\circ$  [Puc96a].

**Determining optimum fibre orientations for several two-dimensional loading cases**

A fibre network with two fibre directions can only bear *one* two-dimensional loading case. However, should *different* two-dimensional loading cases apply, then a two-lamina fibre network will not generally be able to withstand all these cases. Two procedures now need to be distinguished:

1. The fibre network is designed for the dimensioning loading case. If remaining loading cases are markedly smaller, they may be sustainable by the

eventuell von der Matrix ertragen werden. Dies kann man mit der klassischen Laminattheorie (siehe Abschnitt 5.1.2) überprüfen.

2. Sofern auch die Nebenbeanspruchungsfälle von beträchtlicher Größe sind, **müssen** mindestens drei Faserrichtungen vorgesehen werden. Jede ebene Beanspruchung ist mit einem beliebigen dreischichtigen Fasernetz prinzipiell tragbar, nur die notwendige „Faserdicke“ der Schicht ist entsprechend der jeweiligen Beanspruchung verschieden. Dabei wird wiederum gemäß den Vorzeichen vorgegangen:

*n<sub>I</sub> und n<sub>II</sub> mit gleichen Vorzeichen*

Hier würde man eine Schicht in Richtung der größten Hauptnormalkraft orientieren ( $\beta_1 = 0^\circ$ ), die durch einen AWV gemäß Gleichung (67) zu einem dreischichtigen Fasernetz erweitert wird.

*n<sub>I</sub> und n<sub>II</sub> mit ungleichen Vorzeichen*

Hier ist je eine Schicht in Richtung der beiden Hauptnormalkräfte des Hauptbeanspruchungsfalls zu orientieren. Für die günstige Orientierung  $\beta_3$  einer dritten Schicht kann keine konkrete Empfehlung gegeben werden, sie wird sich nach den weiteren Beanspruchungsfällen richten.

**Sonderfall AWV**

Statisch unbestimmtes Fasernetz aus vier Schichten bei symmetrischer Anordnung

$$\beta_1 = -\beta_2 = \omega_1 \text{ und } \beta_3 = -\beta_4 = \omega_2$$

Hier lassen sich die beiden Winkel aus

$$\frac{t_{f1} \sin^2 \omega_1 + t_{f2} \sin^2 \omega_2}{t_f} = \frac{n_{II}}{n_I + n_{II}} \tag{70a}$$

ermitteln. Obige Formel gilt in ihrer Verallgemeinerung

$$\sum_k \frac{t_{fk}}{t_f} \cdot \sin^2 \omega_k = \frac{n_{II}}{n_I + n_{II}} \tag{70b}$$

auch für aus beliebig vielen AWVs aufgebaute Fasernetze.

Es ist bisher in Abschnitt 5.1.1 davon ausgegangen worden, dass das Ziel der Dimensionierung die Ermittlung eines Fasernetzes ist, das unter einer gegebenen Belastung allein die Last aufnimmt. Dieser Zustand wird näherungsweise im Erweichungsbereich der Matrix und im Bereich zwischen fortgeschrittener ZFB-Rissbildung (viele fein verteilte, faserparallele Risse) und Bruch des Laminates erreicht. Mehr kann die Netztheorie nicht leisten.

Wenn eine Verformungsanalyse durchgeführt werden soll, ist es nicht mehr ratsam, das Mittragen der Ma-

trix. This can be checked with the aid of classical laminate theory (see Section 5.1.2).

2. Should the remaining loading cases be of a considerable size, at least three fibre directions **must** be incorporated. Each two-dimensional loading case in principle can be carried by any three-lamina fibre network – only the necessary “fibre thickness” of the lamina differs according to the loading in question. Once more the procedure depends upon the signs:

*n<sub>I</sub> and n<sub>II</sub> with the same sign*

The procedure here would be to orient one lamina in the direction of the greatest principal normal force ( $\beta_1 = 0^\circ$ ) which is expanded into a three-lamina fibre network by a BAP in accordance with Equation (67).

*n<sub>I</sub> and n<sub>II</sub> with different signs*

Here one lamina in each case is to be oriented in the direction of the two principal normal forces of the dimensioning load case. No specific recommendation may be given regarding a suitable orientation  $\beta_3$  of a third lamina; it will depend upon the other loading cases.

**Special case BAP**

A statically indeterminate fibre network consisting of four laminae with the symmetrical arrangement

$$\beta_1 = -\beta_2 = \omega_1 \text{ and } \beta_3 = -\beta_4 = \omega_2$$

Here the two angles can be obtained from

$$\frac{t_{f1} \sin^2 \omega_1 + t_{f2} \sin^2 \omega_2}{t_f} = \frac{n_{II}}{n_I + n_{II}} \tag{70a}$$

The above formula applies also in its generalized form

$$\sum_k \frac{t_{fk}}{t_f} \cdot \sin^2 \omega_k = \frac{n_{II}}{n_I + n_{II}} \tag{70b}$$

to fibre networks made up of any number of BAPs.

It has so far been assumed, as was stated in Section 5.1.1, that the aim of dimensioning is to define a fibre network which by itself would have the appropriate load bearing capacity under a given loading. This state is approximately reached in the temperature caused softening range of the matrix and in the damage state due to advanced IFF cracking (finely distributed parallel fibre cracks) and fracture of the laminate. Netting theory cannot do any more than that.

If a deformation analysis is to be carried out, it is no longer advisable to ignore the contribution made by



trix zu vernachlässigen. Falls das Fasernetz bei mehr als vier Faserrichtungen ohne Symmetrie statisch unbestimmt wird, sodass Formänderungsbeziehungen zwischen den Schichten zur Lösung der Dimensionierungsaufgabe herangezogen werden müssen, benutzt man hierfür die im folgenden Abschnitt 5.1.2 beschriebene klassische Laminattheorie. Mit deren Hilfe wird dann auch eine verfeinerte Festigkeitsanalyse unter Berücksichtigung der Lastübertragung durch die Matrix ermöglicht.

### 5.1.2 Klassische Laminattheorie (CLT)

Im Folgenden wird die Berechnung von Laminaten nach der 2-D-Kontinuumstheorie oder 2-D-Elastizitätstheorie behandelt. Für die 2-D-Kontinuumstheorie wird üblicherweise die Bezeichnung „Klassische Laminattheorie“ (engl. CLT) verwendet. Sie beinhaltet die so genannte Kirchhoff'sche Plattentheorie dünner Schalen und verhilft dazu, die Spannungswerte  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\tau_{21}$  und die zugehörigen Verzerrungswerte  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\gamma_{21}$  in jeder einzelnen Schicht des Laminates zu ermitteln.

Störungen im Bereich der Krafteinleitung, an eingespannten und freien Rändern, die im Allgemeinen schnell abklingen, können mit der klassischen Laminattheorie nicht behandelt werden, da dies in der Regel 3-D-Probleme sind [Her98; Roh96]. Die CLT gilt also lediglich für den ungestörten Bereich.

Es werden folgende Annahmen für das Laminat getroffen:

- Die Platten- bzw. Schalendicke  $t$  ist klein gegenüber den übrigen Abmessungen und die Durchbiegung der Mittelfläche ist klein im Vergleich zu  $t$ .
- Ebenbleiben der Querschnitte (Bernoulli-Hypothese): Ebene Querschnitte senkrecht zur Mittelfläche bleiben auch nach Verformung der Platte (Schale) eben. Damit wird die Platte (Schale) als quer zur Mittelfläche schubstarr angenommen.
- Die Verschiebung senkrecht zur Platten- bzw. Schalenmittelfläche hängt nicht von  $z$  ab.

Diese Annahmen bedingen eine vollkommene Haftung aller  $n$  Schichten aufeinander. Somit kann der Verzerrungsvektor  $\{\varepsilon'\}_k$  in irgendeinem Punkt der Platte (Bild 19) im Abstand  $z_k$  von der Mittelfläche wie folgt geschrieben werden

$$\{\varepsilon'\}_k = \{\varepsilon^0\} + z_k \{\kappa\} \quad (71)$$

wobei  $\{\varepsilon^0\}$  und  $\{\kappa\}$  den Verzerrungsvektor der Mittelfläche bilden und der Index „0“ die Bezugsfläche kennzeichnet, als welche in der Regel die geometrische Mittelfläche gewählt wird. Diese Gleichung ist auch für flachgekrümmte Schalen anwendbar.

the matrix to load-bearing. When there are more than four fibre directions without symmetry, the fibre network becomes statically indeterminate. Then the deformation relations between the laminae will have to be applied in order to obtain a solution for the dimensioning task and the classical laminate theory (described in Section 5.1.2 which follows) is used for this. With the aid of the CLT it is also possible to run a refined strength analysis which takes into account the stresses occurring in the matrix.

### 5.1.2 Classical laminate theory (CLT)

In what follows the concern is with analysis of laminates on the basis of 2D continuum theory or 2D elasticity theory. Normally 2D continuum theory is referred to as classical laminate theory (or CLT for short). It includes the so-called Kirchhoffian plate theory of thin shells and helps determine the stress values  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\tau_{21}$  and corresponding strain values  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\gamma_{21}$  in each individual lamina of the laminate.

Stress concentrations in load introduction areas, at clamped and at free edges, which generally decay rapidly are not covered by classical laminate theory since these are usually 3D problems [Her98; Roh96]. In other words, CLT only applies to the area where such stress concentrations do not occur.

The following assumptions are made about the laminate:

- The plate or shell thickness  $t$  is small with respect to other dimensions and the transverse deflection of the midplane is small compared to  $t$ .
- Cross-sections remain planar (Bernoulli hypothesis): Planar cross-sections originally normal to the middle plane will remain planar even after deformation of the plate (shell). This means that the plate (shell) as normal to the middle plane is assumed to be rigid to shear stresses.
- Translation perpendicularly with respect to the plate or shell middle plane does not depend on  $z$ .

These assumptions presuppose that all of the  $n$  laminae fully adhere to each other. This means that the strain vector  $\{\varepsilon'\}_k$  at any point on the plate (Figure 19) at a distance of  $z_k$  from the middle plane can be expressed as follows

$$\{\varepsilon'\}_k = \{\varepsilon^0\} + z_k \{\kappa\} \quad (71)$$

where  $\{\varepsilon^0\}$  and  $\{\kappa\}$  represent the strain vector of the middle plane and the superscript „0“ denotes the reference surface for which generally the geometric middle plane will be selected. This equation may also be used for curved shallow shells.

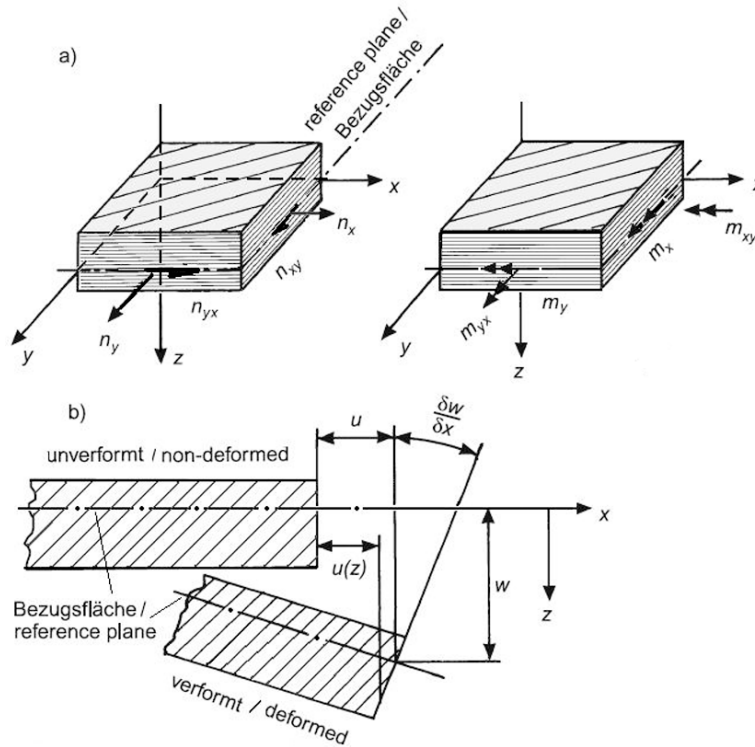


Bild 19. Schnittgrößen und Verformungsgrößen am Laminat-Plattenelement (Im Folgenden wird als Bezugsfläche die geometrische Mittelfläche gewählt.)

- a) Definitionen und KOS des Laminates einer Bauteilwandung
- b) Größen am verformten Element

Figure 19. Section forces, section moments and deformations in the laminate plate element (In what follows the geometrical middle plane has been selected as the reference surface.)

- a) Definitions and COS of the laminate used in a component wall
- b) Variables in the deformed element

**Allgemeine Belastung und Schichtaufbau**

*Mechanische Beanspruchung*

Wie in der Platten-Theorie üblich, werden ein Schnittkraftflussvektor  $\{n^0\}$ , vereinfacht Schnittkraftvektor genannt und ein Schnittmomentenflussvektor  $\{m\}$ , vereinfacht genannt Schnittmomentvektor, definiert (Bild 19, vgl. Bild 4)

$$\{n^0\} = (n_x^0, n_y^0, n_{xy}^0)^T = \int \{\sigma\} dz \quad (72)$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma\}_k dz = \Sigma \int [Q']_k \{\epsilon'\}_k dz$$

(aus Schreib-Vereinfachungsgründen werden die zuvor aufgezeigten Grenzen bei  $\Sigma$  und  $\int$  nicht mehr angegeben)

$$\{m\} = (m_x, m_y, m_{xy})^T = \int \{\sigma\} z dz \quad (73)$$

$$= \Sigma \int \{\sigma\}_k z dz = \Sigma \int [Q']_k \{\epsilon'\}_k z dz$$

Werte für die jeweils drei Schnittgrößen in  $\{n^0\}$  und  $\{m\}$  stammen aus der Bauteilberechnung.

Es werden lineare Elastizitätsgesetze angenommen, sodass aus der Integration die folgenden Schnittgrößen

**General loading and lamina lay-up**

*Mechanical loading*

As is usual in plate theory, a membrane stress resultant per unit length vector  $\{n^0\}$ , shortly called vector of section forces, and a bending stress resultant per unit length vector  $\{m\}$ , shortly called vector of section moments, are defined (Figure 19, cf. Figure 4)

$$\{n^0\} = (n_x^0, n_y^0, n_{xy}^0)^T = \int \{\sigma\} dz \quad (72)$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma\}_k dz = \Sigma \int [Q']_k \{\epsilon'\}_k dz$$

(due to reasons of simplifying typing the above pin-pointed boundaries at  $\Sigma$  and  $\int$  are not indicated anymore)

$$\{m\} = (m_x, m_y, m_{xy})^T = \int \{\sigma\} z dz \quad (73)$$

$$= \Sigma \int \{\sigma\}_k z dz = \Sigma \int [Q']_k \{\epsilon'\}_k z dz$$

Values for each of the three section forces and three section moments in  $\{n^0\}$  and  $\{m\}$  are derived from component analysis.

Linear laws of elasticity are assumed which means that the following section forces/section moments

ßen-Verzerrungsbeziehungen für das Laminat resultieren:

$$\begin{Bmatrix} n^0 \\ m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (74)$$

worin  $[K]$  die Steifigkeitsmatrix des Laminates ist und weiter  $t_k = z_k - z_{k-1}$ ,  $z_{km} = 1/2 (z_k + z_{k-1})$ . Als Untermatrizen ergeben sich die Summenausdrücke:

$$[A] = \Sigma [Q']_k (z_k - z_{k-1}) = \Sigma [Q']_k t_k \quad (75a)$$

(Matrix der Scheiben- oder Dehnsteifigkeiten)

$$[B] = 1/2 \Sigma [Q']_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \Sigma [Q']_k t_k z_{km} \quad (75b)$$

(Matrix der Kopplungssteifigkeiten)

$$[D] = 1/3 \Sigma [Q']_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \Sigma [Q']_k (t_k^3/12 + t_k z_{km}^2) \quad (75c)$$

(Matrix der Platten- oder Biegesteifigkeiten)

In der Regel ist die Belastung gegeben und es wird die inverse Schreibweise zu Gleichung (74) benötigt:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = [K]^{-1} \begin{Bmatrix} n^0 \\ m \end{Bmatrix} \quad (76)$$

Bei Last- mit Randbedingungsvorgabe, z.B.  $\varepsilon_x^0 = 0$  und  $m_y \neq 0$ , sind „gemischte“ (Lastgrößen mit Verzerrungsgrößen) Beziehungen zu betrachten.

### Hygrothermische Beanspruchung

Unter Einbeziehung von Temperatur und Feuchte lauten die Schnittgrößen-Verzerrungsbeziehungen

$$\begin{Bmatrix} n^0 \\ m \end{Bmatrix} = [K] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} n_H^0 \\ m_H \end{Bmatrix} \quad (77)$$

wobei die hygrothermischen „Lastgrößen“

$$\{n_H^0\} = \Sigma (\Delta T_k [Q']_k t_k \{\alpha_T^1\}_k + \Delta M_k [Q']_k t_k \{\alpha_M^1\}_k) \quad (77a)$$

$$\{m_H\} = \Sigma (\Delta T_k [Q']_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \{\alpha_T^1\}_k + \Delta M_k [Q']_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \{\alpha_M^1\}_k) \quad (77b)$$

als bekannt vorliegen.

Bei freier Verformbarkeit des Querschnittes sind unter hygrothermischer Beanspruchung  $\{n^0\}$  und  $\{m\}$  zu Null zu setzen. Dies ergibt nach Auflösung

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = [K]^{-1} \begin{Bmatrix} n_H^0 \\ m_H \end{Bmatrix} \quad (77c)$$

strain relations are obtained for the laminate by integration:

$$\begin{Bmatrix} n^0 \\ m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (74)$$

where  $[K]$  is the stiffness matrix of the laminate and in addition  $t_k = z_k - z_{k-1}$ ,  $z_{km} = 1/2 (z_k + z_{k-1})$ . As sub-matrices this yields the summation expressions:

$$[A] = \Sigma [Q']_k (z_k - z_{k-1}) = \Sigma [Q']_k t_k \quad (75a)$$

(matrix of in-plane stretching or extensional stiffnesses)

$$[B] = 1/2 \Sigma [Q']_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \Sigma [Q']_k t_k z_{km} \quad (75b)$$

(matrix of (bending-stretching) coupling stiffnesses)

$$[D] = 1/3 \Sigma [Q']_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \Sigma [Q']_k (t_k^3/12 + t_k z_{km}^2) \quad (75c)$$

(matrix of the plate or bending stiffnesses)

As a rule the loading is given and the inverse notation to Equation (74) is required

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = [K]^{-1} \begin{Bmatrix} n^0 \\ m \end{Bmatrix} \quad (76)$$

When load and boundary conditions are predefined – for example,  $\varepsilon_x^0 = 0$  and  $m_y \neq 0$  – then “mixed” (load with strain quantities) relationships are to be considered.

### Hygrothermal loading

When temperature and moisture are included, the section forces/section moments strain relations read

$$\begin{Bmatrix} n^0 \\ m \end{Bmatrix} = [K] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} n_H^0 \\ m_H \end{Bmatrix} \quad (77)$$

where the hygrothermal “load variables”

$$\{n_H^0\} = \Sigma (\Delta T_k [Q']_k t_k \{\alpha_T^1\}_k + \Delta M_k [Q']_k t_k \{\alpha_M^1\}_k) \quad (77a)$$

$$\{m_H\} = \Sigma (\Delta T_k [Q']_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \{\alpha_T^1\}_k + \Delta M_k [Q']_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \{\alpha_M^1\}_k) \quad (77b)$$

are known.

With free deformability of the cross-section, under hygrothermal loading  $\{n^0\}$  and  $\{m\}$  are to be set at zero. This yields after resolution

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = [K]^{-1} \begin{Bmatrix} n_H^0 \\ m_H \end{Bmatrix} \quad (77c)$$

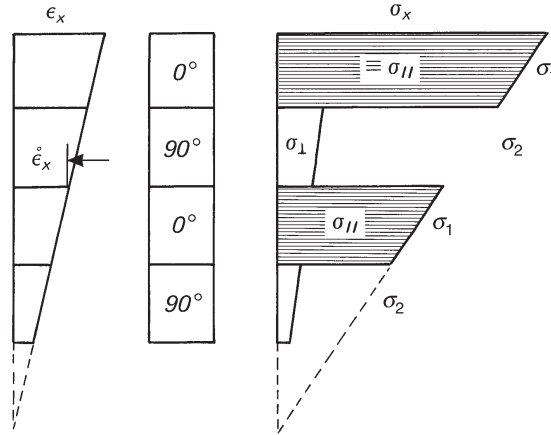


Bild 20. Verzerrungen und Spannungen in den Schichten des Laminates

Figure 20. Stresses and strains in the laminae of the laminate

*Bestimmung der Dehnungen und Spannungen der einzelnen Schicht*

Nach Berechnung der  $\{\varepsilon^0\}$  und  $\{\kappa\}$  der Mittelebene des Laminates können die Spannungen und Verzerrungen in den einzelnen Schichten berechnet werden mit ( $z = z_k$  oder  $z_{k-1}$ , je nachdem, ob die obere oder untere Schichtgrenze gemeint ist)

$$\begin{aligned} \{\varepsilon'\}_k &= [T_{\varepsilon k}]^{-1} (\{\varepsilon^0\} - z\{\kappa\}) \\ \{\sigma'\}_k &= [Q]_k (\{\varepsilon'\}_k - \{\varepsilon'_H\}_k) \\ \{\sigma\}_k &= [T_{\sigma k}]^{-1} \{\sigma'\}_k \end{aligned} \quad (78a-c)$$

Bild 20 zeigt Spannungen und Verzerrungen für ein vierschichtiges unsymmetrisches Laminat, Kreuzverbund genannt.

*Determination of the strains and stresses in the single lamina*

After calculation of  $\{\varepsilon^0\}$  and  $\{\kappa\}$  of the middle plane of the laminate the stresses and strains in the individual laminae can be calculated with  $z = z_k$  or  $z_{k-1}$  (depending on whether the upper or lower lamina boundary is meant)

$$\begin{aligned} \{\varepsilon'\}_k &= [T_{\varepsilon k}]^{-1} (\{\varepsilon^0\} - z\{\kappa\}) \\ \{\sigma'\}_k &= [Q]_k (\{\varepsilon'\}_k - \{\varepsilon'_H\}_k) \\ \{\sigma\}_k &= [T_{\sigma k}]^{-1} \{\sigma'\}_k \end{aligned} \quad (78a-c)$$

Figure 20 shows stresses and strains for a four-laminae asymmetric laminate, a so-called cross-ply laminate.

**Symmetrisches Laminat unter Membrankraftfluss**

In einem symmetrisch aufgebauten Laminat (z.B.  $[0/\pm 45/90]_s$ ) erfahren alle Schichten dieselben Verzerrungen  $\{\varepsilon'\}_k$  wie die geometrische Mittelfläche

$$\{\varepsilon'\}_k = \{\varepsilon^0\} \quad (79)$$

Das heißt Krümmungen treten nur dann auf, falls Schnittmomente vorhanden sind. Gleichung (77) vereinfacht sich zu

$$\{n^0\} = \Sigma \{\sigma'\}_k t_k = [A] \{\varepsilon^0\} - \{n^0_H\} \quad (80)$$

Wärme- und Feuchteausdehnungskoeffizienten des symmetrischen Laminates lassen sich über die Bedingung  $\{n^0\} = 0$  aus Gleichung (80) ermitteln, das heißt aus

$$\{\varepsilon^0\} = [A]^{-1} \{n^0_H\} \quad (81)$$

*Sonderfall:  $\Delta T_k = \Delta T, \Delta M_k = \Delta M$*

Falls über die Wanddicke Temperatur- und Feuchteänderung jeweils gleichbleibend sind, führen die Gleichungen (77a), (81) zu

$$\begin{aligned} \{\alpha^0_T\} &= (\alpha^0_{Tx}, \alpha^0_{Ty}, \alpha^0_{Txy})^T \\ &= [A]^{-1} \Sigma [Q]_k t_k \{\alpha^0_T\}_k \end{aligned} \quad (82a)$$

**Symmetrical laminate with membrane force**

In a laminate with a symmetric lay-up (such as  $[0/\pm 45/90]_s$ ) all laminae will experience the same strains  $\{\varepsilon'\}_k$  as the geometric middle plane

$$\{\varepsilon'\}_k = \{\varepsilon^0\} \quad (79)$$

In other words, curving will not occur unless section moments are present. Equation (77) may be simplified into

$$\{n^0\} = \Sigma \{\sigma'\}_k t_k = [A] \{\varepsilon^0\} - \{n^0_H\} \quad (80)$$

The coefficients of expansion for temperature and moisture of the symmetric laminate can be obtained from Equation (80) by means of the condition  $\{n^0\} = 0$ ; in other words, from

$$\{\varepsilon^0\} = [A]^{-1} \{n^0_H\} \quad (81)$$

*Special case:  $\Delta T_k = \Delta T, \Delta M_k = \Delta M$*

If the temperature and moisture change in each case remains constant through the wall thickness, then with Equations (77a), (81)

$$\begin{aligned} \{\alpha^0_T\} &= (\alpha^0_{Tx}, \alpha^0_{Ty}, \alpha^0_{Txy})^T \\ &= [A]^{-1} \Sigma [Q]_k t_k \{\alpha^0_T\}_k \end{aligned} \quad (82a)$$

und analog

$$\{\alpha^0_M\} = (\alpha^0_{Mx}, \alpha^0_{My}, \alpha^0_{Mxy})^T \quad (82b)$$

wobei die zugehörige Dehnung durch Temperatur und Feuchte der Beziehung

$$\{\varepsilon^o\} = \Delta T \{\alpha_T\} + \Delta M \{\alpha_M\} \quad (83)$$

genügt. Die Schubanteile  $\alpha^o_{Txy}$  und  $\alpha^o_{Mxy}$  werden nur dann Null, wenn neben symmetrischem Schichtaufbau auch ein ausgeglichener Winkelverbund vorliegt, das heißt das Laminat verhält sich als orthotrope Scheibe.

is yielded and analogously

$$\{\alpha^0_M\} = (\alpha^0_{Mx}, \alpha^0_{My}, \alpha^0_{Mxy})^T \quad (82b)$$

where the corresponding expansion due to temperature and moisture satisfies the equation

$$\{\varepsilon^o\} = \Delta T \{\alpha_T\} + \Delta M \{\alpha_M\} \quad (83)$$

The shear components  $\alpha^o_{Txy}$  and  $\alpha^o_{Mxy}$  will then only be Zero when there is a balanced angle-ply laminate in addition to a symmetrical laminate lay-up. This means, the laminate behaves like an orthotropic plate.

**Auswirkung des Schichtaufbaus auf Steifigkeitsmatrix und Verformungsverhalten des Laminates**

Durch „Aufaddition“ der Schichtanteile erhält man die immer symmetrisch aufgebaute Steifigkeitsmatrix  $[K]$  mit den Untermatrizen Scheibensteifigkeitsmatrix  $[A]$ , Plattensteifigkeitsmatrix  $[D]$  und Kopplungssteifigkeitsmatrix  $[B]$ . Letztere koppelt Scheibenwirkungen (Dehnungen  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ , und Schiebung  $\gamma_{xy}$ ) und Plattenwirkungen (Krümmungen  $\kappa_x, \kappa_y$ , und Drillung  $\kappa_{xy}$ ) (siehe Bild 21).

**Effect of the lamina stacking sequence on the stiffness matrix and deformation behaviour**

By “adding up” the lamina portions one obtains the stiffness matrix  $[K]$  (still symmetrical in structure) with these sub-matrices: laminate in-plane stretching stiffness matrix  $[A]$ , bending stiffness matrix  $[D]$ , and bending-stretching coupling stiffness matrix  $[B]$ . The last sub-matrix combines membrane effects (elongation strains  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ , and shear  $\gamma_{xy}$ ) with plate effects (curvatures  $\kappa_x, \kappa_y$ , and twisting  $\kappa_{xy}$ ) (see Figure 21).

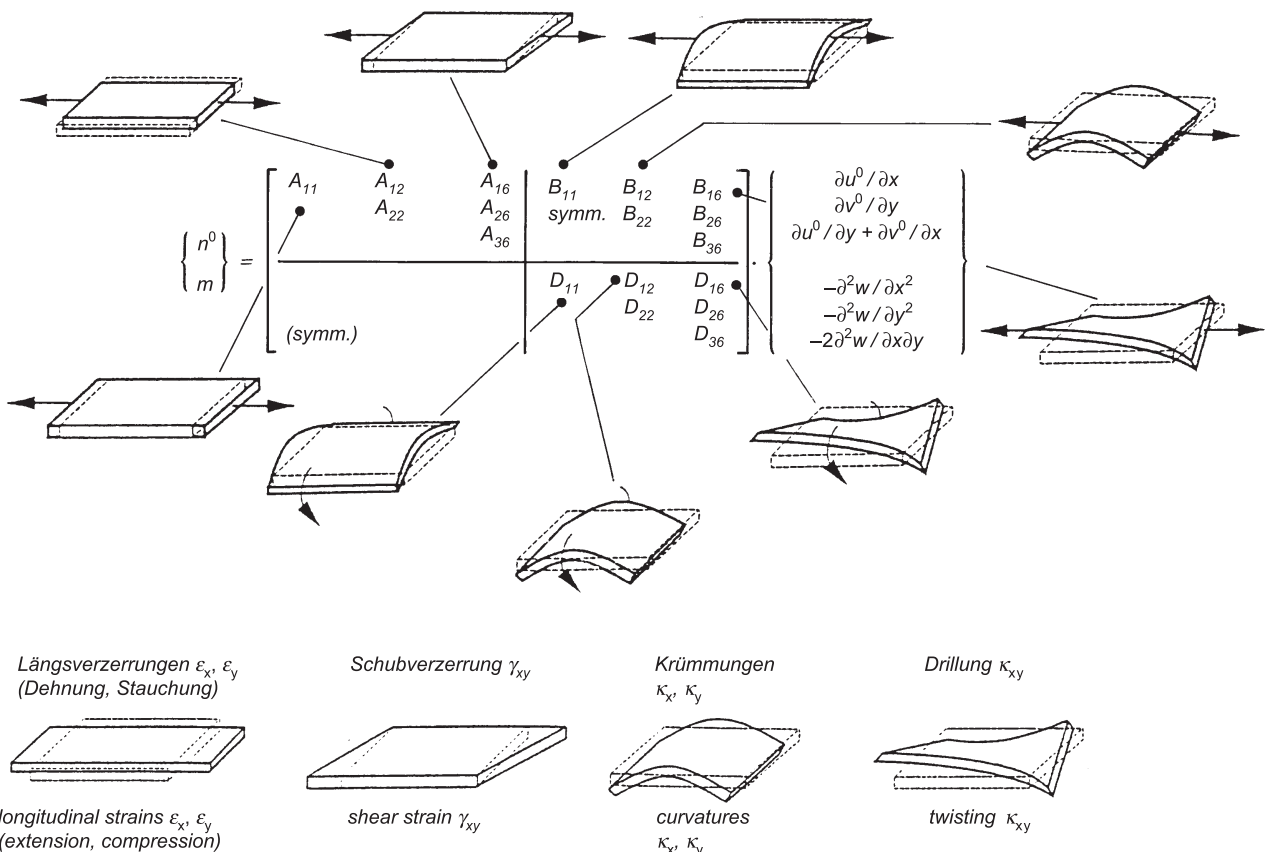


Bild 21. Auswirkungen der Koeffizienten und Darstellung der Verformungen

Figure 21. Effects of the stiffness coefficients and visualisation of deformations

Im allgemeinen anisotropen Fall sind alle Glieder der Laminat-Steifigkeitsmatrix besetzt. Im Spezialfall des asymmetrischen Schichtaufbaus mit Orthotropie  $[+\alpha/-\alpha]$  oder  $[+\alpha/-\alpha/+ \alpha/-\alpha]$  verschwinden die Glieder  $A_{16}$ ;  $A_{26}$ ;  $B_{11}$ ;  $B_{12}$ ;  $B_{22}$ ;  $B_{36}$ ;  $D_{16}$  und  $D_{26}$ . Das Nullwerden der  $A_{16}$ - und  $A_{26}$ -Glieder ist dabei Folge der Orthotropie. Im Spezialfall des symmetrischen Schichtaufbaus mit Orthotropie, auch klassischer oder zentrisch orthotroper Fall genannt, werden die Schubglieder  $A_{16}$  und  $A_{26}$ , die Verwindungsglieder  $D_{16}$  und  $D_{26}$  sowie die ganze Kopplungsmatrix  $[B]$  Null. Kopplungseffekte liegen erstens bei der Scher-Dehnungskopplung vor, wenn  $A_{16}$ ,  $A_{26}$  ungleich Null sind und zweitens bei der Biegungs-Drillungs-Kopplung, wenn  $D_{16}$ ,  $D_{26}$  ungleich Null sind. Im ersten Fall bewirkt eine Normalkraft dann gleichzeitig eine Schiebung (z.B. bei einer UD-Zugprobe mit  $\alpha \neq 0^\circ$  oder  $90^\circ$ ) und im zweiten Fall ein Biegemoment eine Drillung (z.B. ein Laminat-Probekörper mit dem Aufbau  $[+45/-45]_s$ ).

Erreichen die  $B_{ik}$  die Größenordnung der  $A_{ik}$ , so sind die Kopplungseinflüsse allgemein nicht vernachlässigbar. Dieses ist z.B. bei einem zweischichtigen, orthotropen  $[+20/-20]$ -Laminat der Fall. Welchen Zahlenwert die einzelnen Glieder von  $[B]$  und  $[D]$  dabei annehmen – nicht der Einfluss – hängt dabei auch von der Wahl der Bezugsfläche ab; im Allgemeinen wird die geometrische Mittelfläche (Index „<sup>0</sup>“) als Bezugsfläche gewählt. Steifigkeits-Mittelfläche ist dagegen diejenige Fläche, wo die Normalkraft als Resultierende der Normalspannungsverteilung wirkt (Krafteinleitungsbereiche bedingen noch zusätzliche Betrachtungen).

Vom mechanischen Verständnis und von der Rechen-technik her wäre es günstig, die Neutralebene, besser Neutralfläche – falls vorhanden – zu kennen. Die allgemeine Neutralfläche einer Platte z.B. ist dabei diejenige Fläche, für die  $[B] = 0$  wird (wo infolge  $\{m\}$  die Dehnungen  $\epsilon_x$  und  $\epsilon_y$  Null sind), bzw. die es gestattet, Scheiben oder Plattenprobleme voneinander getrennt betrachten zu können. Dies ist aber bei Laminaten z.B. beim folgenden, exzentrisch orthotropen Aufbau  $[0/0/90/0/0/90]$ , nicht einfach [Ash 69] möglich, weil es für die  $(x, z)$ - und die  $(y, z)$ -Ebene jeweils mehrere Neutralflächen gibt. Rechenhilfe wäre aber nur eine gemeinsame Neutralfläche.

Bedeutung kann die Biegungs-Drillungskopplung bei Platten/Schalen (das können auch Flachzugprobekörper sein) mit allgemeinem, anisotropem aber auch schon bei orthotropem Aufbau haben. Bei rotations-symmetrischen FKV-Schalen kommt der Kopplungseffekt aus Symmetriegründen nicht zum Tragen und man kann Platten- und Scheibenproblem getrennt betrachten.

In the general anisotropic case all terms of the laminate stiffness matrix are filled out. In the special case of asymmetrical lay-up with orthotropy  $[+\alpha/-\alpha]$  or  $[+\alpha/-\alpha/+ \alpha/-\alpha]$  the terms  $A_{16}$ ;  $A_{26}$ ;  $B_{11}$ ;  $B_{12}$ ;  $B_{22}$ ;  $B_{36}$ ;  $D_{16}$  and  $D_{26}$  disappear. Here, the zero value of the terms  $A_{16}$  and  $A_{26}$  is a consequence of orthotropy. In the special case of symmetrical lay-up with orthotropy – also called the classic or centrally orthotropic case – the shear terms  $A_{16}$  and  $A_{26}$ , the torsion terms  $D_{16}$  and  $D_{26}$  and also the entire bending-stretching coupling matrix  $[B]$  take the value of Zero. Coupling effects exist, firstly in shear-strain coupling when  $A_{16}$ ,  $A_{26}$  are not equal to Zero, and secondly in bending-twisting coupling when  $D_{16}$ ,  $D_{26}$  are not equal to Zero. In the first case a normal force will then simultaneously cause shear (for example, in a UD tensile specimen with  $\alpha \neq 0^\circ$  or  $90^\circ$ ) and in the second case a bending moment will cause twisting (for example, a laminate test specimen with a lay-up of  $[+45/-45]_s$ ).

Should the  $B_{ik}$  reach the magnitude of the  $A_{ik}$ , then the influences of coupling should in general not be ignored. This will be the case, for example, with a two-laminae, orthotropic  $[+20/-20]$  laminate. What numerical values are here assumed by the terms in  $[B]$  and  $[D]$  – not the influence – will also depend on what is selected as the reference plane. In most cases the geometrical middle plane (superscript “<sup>0</sup>”) is selected as the reference plane. The stiffness middle plane, on the other hand, is the plane where the normal force comes to bear as the resultant of the normal stress distribution (areas of load introduction call for consideration of even more factors).

From the points of view of an understanding of the mechanics and of calculation techniques it would be a good idea to have a better knowledge of the neutral plane or better the neutral surface (if present). The general neutral surface of a plate, for example, is the surface for which  $[B] = 0$  (where as a result of  $\{m\}$  strains  $\epsilon_x$  and  $\epsilon_y$  are zero) or which permits in-plane or laterally loaded plate problems to be considered separately from each other. However, this is not simply possible [Ash 69] with laminates that have the following eccentrically orthotropic structure  $[0/0/90/0/0/90]$ , for example, since there are different neutral surfaces for the  $(x, z)$ - and  $(y, z)$  planes. Only a common neutral surface, however, would be of any help in analysis.

Flexural-torsional coupling can be significant in plates (which can also be flat tensile specimens) or shells with a general, anisotropic or even with an orthotropic structure. In the case of rotationally symmetrical FRP shells the coupling effect disappears for reasons of symmetry and in-plane and laterally loaded plate problems can be considered separately.

### 5.1.3 Interlaminare Spannungen (ILS)

Mit der CLT können nur *intralaminare* Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\tau_{xy}$  direkt berechnet werden. „*Interlaminare*“ Spannungen (ILS)  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$ , und  $\tau_{zy}$  lassen sich auf analytischem Weg allenfalls nachträglich mit Hilfe von Gleichgewichtsbedingungen aus den zuvor ermittelten intralaminaren Schichtspannungen errechnen.

Dies kann grundsätzlich sowohl im Anschluss an eine analytische als auch an eine numerische Berechnung mit der FEA erfolgen. Bei letztgenannter ist für Platten und Schalen mit einer Schlankheit größer als 5–7 **keine** schichtweise Diskretisierung mit Volumenelementen erforderlich, sondern es reichen Schalenelemente und entsprechende Nachlaufprogramme aus [Rol97; Rol98]. Erst unterhalb der genannten Schlankheit sind 3-D-Elemente erforderlich.

Hinweise zur Bewertung von ILS mit Festigkeitskriterien sind in Abschnitt 4.5.3 gegeben.

Zur vertieften Behandlung dieser Thematik werden [Her98; Roh96; Rol00] empfohlen.

#### Allgemeines

Weil ILS gefühlsmäßig und rechnerisch schwer zugänglich sind, haben sich in der Konstruktions- und Berechnungspraxis teilweise falsche Vorstellungen entwickelt. Die Bezeichnung „interlaminar“ verleitet zu einer Fehlinterpretation, und zwar dahingehend, dass ILS nur *zwischen* den Schichten auftreten. Gleichgewichtsbedingungen erfordern aber, dass die ILS auch innerhalb der Schichten wirken. Allerdings erreichen sie oft an den Schichtgrenzen ihre Extremwerte, siehe Bild 22. Auch die weit verbreitete Vor-

### 5.1.3 Interlaminar stresses (ILS)

With CLT only *intralaminar* stresses  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  can be calculated directly. “*Interlaminar*” stresses (ILS)  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$ , and  $\tau_{zy}$  can be calculated analytically (but only posteriori) with the help of equilibrium conditions from the previously determined intralaminar stress field of the lamina.

This may be carried out in continuity of an analytical as well as a numerical computation applying FEA. In case of the latter, for plates and shells with a slenderness larger than 5–7 **no** layer-wise discretisation by volume elements is necessary. Shell elements and corresponding post-procedures are sufficient [Rol97; Rol98]. Below above slenderness, 3D elements have to be used.

Information on evaluating ILS with strength criteria is given in Section 4.5.3.

For a more detailed treatment of this topic, [Her98; Roh96; Rol00] are recommended.

#### General comments

Because ILS are difficult to grasp both instinctively and analytically, some false notions have come into being in the practice of design and analysis. The term “interlaminar” may lead to an incorrect interpretation, namely that ILS only occur *between* the laminae. Equilibrium conditions, however, require that the ILS also have an effect within the laminae. But it is true to say that they often reach their extreme values at the lamina boundaries (see Figure 22). Even the very widespread idea that high ILS in a laminate

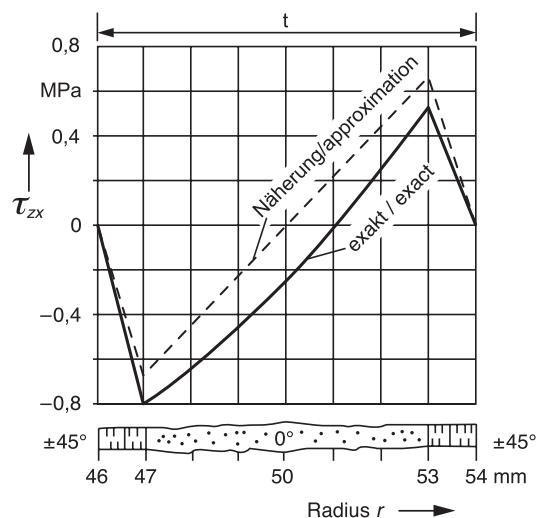


Bild 22. Interlaminare Schubspannungen  $\tau_{zx}$  über dem Radius eines kreiszylindrischen Rohres mit  $[\pm 45/0/\pm 45]$ -Wandaufbau bei Beanspruchung als Kragträger mit Einzellast am freien Ende Die durchgezogenen Linien zeigen die exakte Lösung nach [Jak87], die gestrichelten Linien die Näherung nach [Jak82].

Figure 22. Interlaminar shear stresses  $\tau_{zx}$  over the radius of a regular cylindrical tube with a  $[\pm 45/0/\pm 45]$  wall structure when loaded as a cantilever with a point load at the free end The solid line shows the exact solution given in [Jak87] as the dashed line the approximation as per [Jak82].

stellung, dass hohe ILS in einem Laminat zwischen solchen Schichten auftreten, in denen sehr unterschiedliche *intralaminare* Spannungen herrschen, ist nicht zutreffend. Die Differenz der intralaminaren Spannungen in benachbarten Schichten hat überhaupt keinen Einfluss auf die ILS der betrachteten Schicht. Auch spielt die Höhe der intralaminaren Spannungen in jenem Punkt der benachbarten Schichten, in dem die ILS ermittelt werden sollen, keine Rolle. Maßgebend für die ILS in einem Punkt einer Schicht sind nicht Spannungshöhen sondern die Werte von Spannungsgradienten innerhalb der betrachteten Schicht, die sich beim Fortschreiten in *x*- und *y*-Richtung bei konstanter *z*-Koordinate ergeben. Aus dem Gleichgewicht an einem infinitesimal kleinen Volumenelement mit den Kantenlängen *dx*, *dy*, *dz* ergeben sich folgende Beziehungen, siehe [Pry71]:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) \quad (84a)$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right) \quad (84b)$$

Damit ergeben sich die interlaminaren Schubspannungen  $\tau_{zx}$  bzw.  $\tau_{zy}$  in einem Abstand  $z_2$  von der Bezugsebene des Laminates durch eine Integration, die bei der numerischen Rechnung durch eine Summation ersetzt wird:

$$\begin{aligned} \tau_{zx}(z_2) &= \tau_{zx}(z_1) - \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) dz \quad (85a) \\ &\approx \tau_{zx}(z_1) - \sum_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\Delta \sigma_x}{\Delta x} + \frac{\Delta \tau_{yx}}{\Delta y}\right) \Delta z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{zy}(z_2) &= \tau_{zy}(z_1) - \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right) dz \quad (85b) \\ &\approx \tau_{zy}(z_1) - \sum_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\Delta \sigma_y}{\Delta y} + \frac{\Delta \tau_{xy}}{\Delta x}\right) \Delta z \end{aligned}$$

Hierin sind  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  kleine, aber endliche Elementlängen.

An den Schichtgrenzen im Laminat ändern sich die Gradienten der Schichtspannungen oft erheblich, häufig wechselt dort ihr Vorzeichen, siehe Bild 22.

Als Ausgangsstelle  $z_1$  der Integration wählt man zweckmäßigerweise eine schubspannungsfreie Fläche. Bei rohrförmigen Bauteilen mit einer Belastung durch Axialkraft, Innen- oder Außendruck sowie Torsion kann dies die innere oder die äußere Mantelfläche des Rohres sein. In diesen Fällen ist  $\tau_{zx}(z_1) = \tau_{zy}(z_1) = 0$ .

occur in those laminae where there are great differences in the *intralaminar* stresses is not correct. The difference in the intralaminar stresses in adjacent laminae has no effect whatsoever on the ILS of the lamina under consideration. Neither is there any relevance in the magnitude of the intralaminar stresses at the point in a lamina where the ILS are to be determined. What is of decisive importance to the ILS at a point in a lamina is not the *magnitudes* of the stresses but the values of the stress *gradients* in the lamina in question which arise with progress along the *x* and *y* axes when the *z* coordinate is constant. The following relationships are obtained from the equilibrium at an infinitely small volume element with edge lengths *dx*, *dy*, *dz*, see [Pry71]:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) \quad (84a)$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right) \quad (84b)$$

In this way the interlaminar shear stresses  $\tau_{zx}$  and  $\tau_{zy}$  at a distance  $z_2$  from the reference plane of the laminate are obtained by integration, this being replaced by a summation operation when numerical calculation is carried out:

$$\begin{aligned} \tau_{zx}(z_2) &= \tau_{zx}(z_1) - \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) dz \quad (85a) \\ &\approx \tau_{zx}(z_1) - \sum_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\Delta \sigma_x}{\Delta x} + \frac{\Delta \tau_{yx}}{\Delta y}\right) \Delta z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{zy}(z_2) &= \tau_{zy}(z_1) - \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right) dz \quad (85b) \\ &\approx \tau_{zy}(z_1) - \sum_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\Delta \sigma_y}{\Delta y} + \frac{\Delta \tau_{xy}}{\Delta x}\right) \Delta z \end{aligned}$$

Here  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  are small but finite element lengths.

The gradients of the lamina stresses often change considerably at the lamina boundaries within the laminate and their sign frequently changes there too (see Figure 22).

As the starting point  $z_1$  for the integration it is advisable to select an area free of shear stress. In the case of tubular components subject to loading by axial forces, internal or external pressure, or torsion, this could be the internal or external circumferential surface of the tube. In such cases  $\tau_{zx}(z_1) = \tau_{zy}(z_1) = 0$ .



In der Literatur finden sich gelegentlich Hinweise, die besagen, dass eine dünne „weiche“ Zwischenschicht, die zwischen den Schichten eines Laminates eingefügt wird, unterschiedliche interlaminare Spannungen in den Grenzflächen benachbarter Schichten „ausgleichen“ könne. Dies trifft jedoch nicht zu, wie die oben beschriebenen Zusammenhänge zeigen. Weil in einer „weichen“ Zwischenschicht nur niedrige intralaminare Spannungen herrschen, sind auch deren Gradienten klein. Die zudem noch dünne Zwischenschicht kann deshalb gemäß Gleichung (85a) und Gleichung (85b) eine an ihrer Grenzfläche „ankommende“ interlaminare Schubspannung nur nahezu unverändert in  $z$ -Richtung durch sich hindurchleiten.

Eine wirksame Maßnahme zur *Verminderung* von interlaminaren Schubspannungen besteht jedoch darin, das Laminat aus vielen, relativ dünnen Schichten aufzubauen. Dabei sollten die Faserrichtungen der Schichten dafür sorgen, dass möglichst oft an den Schichtgrenzen die Spannungsgradienten der ILS ihr Vorzeichen wechseln, siehe Bild 22.

#### **ILS in ungestörten Laminat-Bereichen vor der Entstehung von ZFB**

„Ungestörte“ Bereiche sind solche, die weit genug von Krafteinleitungsstellen, Auflagern, Ausschnitten, schroffen Querschnittsänderungen usw. entfernt sind. Hinsichtlich der auftretenden ILS sind vor allem dünn- und dickwandige FKV-Rohre bei den meisten technisch wichtigen Belastungsfällen wie Axialkraft, Innen- oder Außendruck, Torsion, Biegung sowie Temperaturänderung gründlich untersucht worden [Jak82; Jak87]. Bei solchen Bauteilen mit einfacher Geometrie und ohne freie Ränder genügt eine stark vereinfachte Rechnung nach [Jak82]. Sie führt zu der Erkenntnis, dass sogar bei „dickwandigen“ Rohren sowohl bei reiner- als auch bei querkräftbehafteter Biegung die interlaminaren Schubspannungen so klein sind, dass sie keinen nennenswerten Beitrag zur ZFB-Gefahr leisten, siehe Bild 22. Sie bewirken auch keine merkliche Delaminationsgefahr. Dies ändert sich jedoch entschieden, sobald ZFB vom Modus  $\sigma_2 > 0$  entstehen, siehe unten.

An FKV-Rohren mit konstantem Querschnittsaufbau über der Länge entstehen weder bei so genannter axialsymmetrischer Belastung durch Axialkraft noch bei Innen- oder Außendruck interlaminare Schubspannungen. Das Gleiche gilt auch für einen Eigenspannungszustand, der bei einer Temperaturänderung auftritt, die so langsam erfolgt, dass keine nennenswerten Temperatur- und somit auch keine Spannungsgradienten in Axial- und Umfangsrichtung auftreten. Auch bei reiner Torsion bilden sich beispielsweise in

In the literature one may occasionally read that a thin “soft” intermediate lamina which is inserted between the laminae of a laminate can “compensate” for different interlaminar stresses at the interfaces of adjacent laminae. This is not actually true, as the situation described above demonstrates. Since only low intralaminar stresses occur in a “soft” intermediate lamina, their gradients will also be low. For this reason, in accordance with Equation (85a) and Equation (85b), the intermediate lamina, which in addition is also a thin layer, will only be capable of passing an “incoming” interlaminar shear stress through itself and onward in the  $z$  direction with virtually no change.

However, one effective way of *reducing* interlaminar shear stresses is to build up the laminate from a large number of relatively thin laminae. Here the fibre orientations of the laminae should ensure that the stress gradients of the ILS change their sign as often as possible at the lamina boundaries (see Figure 22).

#### **ILS in undisturbed laminate areas before IFF**

“Undisturbed” areas are areas which are located far enough away from load introduction points, support structures, cut-outs, abrupt changes in cross-section, and so on. As regards the ILS which occur, it is primarily thin- and thick-walled FRP tubes which have been thoroughly investigated in most of the loading cases of importance to engineering, such as axial force, internal or external pressure, torsion, bending and temperature change [Jak82; Jak87]. For components with a simple geometry and without free edges, an extremely simplified analysis as per [Jak82] will suffice. This results in the realization that, even in the case of “thick-walled” tubes as well as with pure bending or bending with a shear-force component, the interlaminar shear stresses are so small that they make no contribution worth mentioning to the risk of IFF (see Figure 22). Nor do they result in any noticeable risk of delamination. This does, however, change decisively as soon as IFFs of type  $\sigma_2 > 0$  arise (see next section).

In FRP tubes where the cross-section is constant over the tube length, interlaminar shear stresses do not occur with so-called axially symmetrical loading by axial force nor as the result of internal or external pressure. The same also applies to a state of residual tensile stresses which occurs with a temperature change which takes place so slowly that no temperature gradients worth mentioning – and thus no stress gradients either – occur axially or circumferentially. Even in the case of pure torsion, no interlaminar stresses

einer als kreiszylindrisches FKV-Rohr ausgeführten Drehfeder mit konstantem Querschnitt über der Länge keine interlaminaren Schubspannungen aus.

Bei den für PKW-Drehfedern entwickelten dickwandigen FKV-Rohren [Gar93] mit einem kleinen Durchmesser von etwa 40 mm und einem eher untypischen, jedoch sehr wirksamen zweischichtigen Aufbau mit der relativ großen Schichtdicke von etwa 4 mm kann bei Torsionsbelastung eine interlaminare Normalspannung in Form einer radialen Spannung  $\sigma_z$  auftreten, die das Niveau der Querszugfestigkeit  $R_{\perp}^t$  erreicht. Wenn die äußere UD-Schicht eine Dicke  $t$  und einen inneren Radius  $r$  hat, lässt sich die an der inneren Grenzfläche der äußersten Schicht auftretende Radialspannung  $\sigma_z$  mit Hilfe der „Kesselformel“ abschätzen:

$$\sigma_z \approx -\sigma_y \cdot \frac{t}{r} = -[\sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha + \tau_{21} \cdot \sin 2\alpha] \frac{t}{r} \quad (86)$$

$\sigma_y$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\tau_{21}$  sind hierin die Umfangsspannung und die auf das Schicht-KOS bezogenen Spannungen der äußersten UD-Schicht. Bei der in Drehfedern bevorzugten  $\pm 45^\circ$  Faserorientierung ist  $\tau_{21} = 0$ , sodass Gleichung (86) sich wie folgt vereinfacht:

$$\sigma_z \approx -\frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot \frac{t}{r} \quad (87)$$

Mit  $\sigma_1 = -600 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_2 = 100 \text{ N/mm}^2$ ,  $t = 4 \text{ mm}$  und  $r = 20 \text{ mm}$  ergibt sich eine interlaminare Zugspannung  $\sigma_z \approx 50 \text{ N/mm}^2$ , womit das Niveau der Quer-Zugfestigkeit  $R_{\perp}^t$  erreicht ist!

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich zusammenfassend, dass die interlaminaren Schubspannungen bei vielen technischen FKV-Bauteilen im ungestörten Laminatbereich für das Bruchgeschehen keine große Bedeutung haben. Dies gilt allerdings nur, solange keine ZFB ( $\sigma_2 > 0$ ) aufgetreten sind.

Bei stark gekrümmten, dickwandigen FKV-Bauteilen kann eine interlaminare Zugspannung  $\sigma_z$  gefährlich sein, wie das obige Beispiel der Drehfeder gezeigt hat.

**Lokale ILS infolge von ZFB in sonst ungestörten Laminat-Bereichen**

Wenn ZFB infolge  $\sigma_2 > 0$  entstanden sind, das heißt klaffende Risse in der Schicht vorliegen, ist die vorher definierte Situation des „ungestörten“ Bereiches trotz des Fehlens von Krafteinleitungsstellen, Auflagern oder Ausschnitten nicht mehr gegeben. Die klaffenden Risse lassen  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  an der Rissstelle verschwinden. Wegen der festen Verbindung der ver-

will develop in, for example, a torsion spring taking the form of a regular cylindrical FRP tube whose cross-section does not change over its length.

In the case of the thick-walled FRP tubes developed for car torsion springs [Gar93] which have a small diameter of about 40 mm and what is really an atypical but nevertheless very effective two-laminae structure with the relatively large lamina thickness of about 4 mm subjected to torsional loading, an interlaminar normal stress may occur in the form of a radial stress  $\sigma_z$  which reaches the level of the transverse tensile strength  $R_{\perp}^t$ . If the outer UD lamina has thickness  $t$  and an inner radius  $r$ , the radial stress  $\sigma_z$  occurring at the inner boundary of the outermost lamina can be estimated with the aid of the “pressure vessel formula”:

$$\sigma_z \approx -\sigma_y \cdot \frac{t}{r} = -[\sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha + \tau_{21} \cdot \sin 2\alpha] \frac{t}{r} \quad (86)$$

Here  $\sigma_y$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\tau_{21}$  are the circumferential stress and the stresses of the outermost UD lamina with respect to the lamina COS. When the fibre orientation is  $\pm 45^\circ$  (as is preferred in torsion springs), then  $\tau_{21} = 0$ , which means that Equation (86) can be simplified in this way:

$$\sigma_z \approx -\frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot \frac{t}{r} \quad (87)$$

When  $\sigma_1 = -600 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_2 = 100 \text{ N/mm}^2$ ,  $t = 4 \text{ mm}$  and  $r = 20 \text{ mm}$ , this yields an interlaminar tensile stress of  $\sigma_z \approx 50 \text{ N/mm}^2$ , which means that the level of the transverse tensile strength  $R_{\perp}^t$  has been reached!

On the basis of these considerations we may sum up by saying that in many FRP components the interlaminar stresses in the undisturbed part of the laminate have no great significance as regards failure. Nevertheless this only applies when no IFFs ( $\sigma_2 > 0$ ) have occurred.

An interlaminar tensile stress  $\sigma_z$  may be dangerous in thick-walled FRP components with a high degree of curvature, as the above example of torsion springs has demonstrated.

**Local ILS resulting from IFF in otherwise undisturbed laminate areas**

Once IFFs, due to  $\sigma_2 > 0$ , – in other words, gaping cracks across the lamina – have occurred, the previously defined situation of the “undisturbed” area will no longer apply, despite the absence of load introduction points, support structures or cut-outs. These gaping cracks cause  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  to disappear at the crack location. Due to the rigid connection of the different

schiedenen Schichten miteinander nehmen die „gerissenen“ Schichten aber bereits in einem Abstand von etwa der Dicke der Schicht wieder an den allgemeinen Verzerrungen des Laminates teil. Das bedeutet, dass sich in einem kurzen Abstand vom Riss wieder  $\sigma_2$ - und  $\tau_{21}$ -Spannungen aufbauen können, die unter Umständen zu einem neuen ZFB führen. Dies bewirken die in der Nähe des Risses entstehenden interlaminaren Schubspannungen. Sie sind erheblich größer als die bislang betrachteten, denn durch die ZFB ist eine Vielzahl von „Mikro-Krafteinleitungsstellen“ mit hohen Gradienten der quer zu den Fasern wirkenden Schichtspannungen  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  entstanden. Diese ILS weisen schroffe Spannungsspitzen auf und entziehen sich einer Berechnung mit elementaren Mitteln. Oft bewirken sie zunächst Mini-Delaminationen der Schicht-Grenzfläche in der Nähe der Risspitze. Im Gegensatz zu den relativ kleinen ILS in ungestörten Bereichen haben diese ILS einen erheblichen Einfluss auf das Bruchgeschehen im Laminat, insbesondere bei schwingender Beanspruchung.

**ILS an freien Rändern von Laminaten**

An „freien“ Rändern wie beispielsweise den seitlichen Schnittkanten von streifenförmigen Laminat-Zugprobekörpern können sehr hohe, ungleichmäßig verteilte ILS mit hohen Spannungsspitzen auftreten. Bei näherer Betrachtung erweisen sich solche Ränder als Krafteinleitungsbereiche mit der Besonderheit, dass keine Kräfte von außen in das Laminat eingeleitet werden, sondern dass die Schichten sich gegenseitig belasten, indem sie sich gegeneinander verspannen. Die Kompatibilität der Verformungen des Laminates erfordert dies, denn es können an den Schichtgrenzen keine Relativverschiebungen benachbarter Schichten erfolgen. Dies veranschaulichen an zwei einfachen Beispielen Bild 23 und Bild 24.

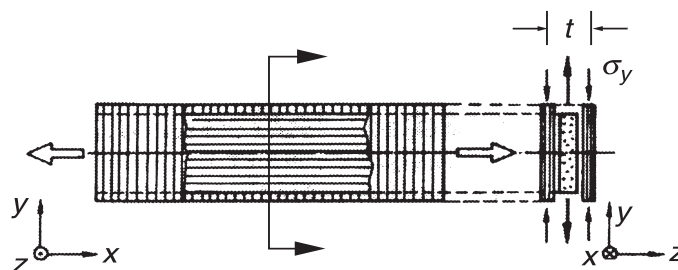


Bild 23. Verspannung infolge des unterschiedlichen Spannungs-Verformungs-Verhaltens der UD-Schichten beim [90/0/90]-Laminat ist die Ursache für interlaminare Spannungen an den kraftfreien seitlichen Rändern

Gezeigt sind die unverträglichen Verformungen, die sich einstellen würden, wenn die Schichten nicht verbunden wären, und die Zug- und Druckspannungen  $\sigma_y$ , die erforderlich sind, um Relativverschiebungen der Schichten am Rand zu vermeiden.

laminae to each other, the “cracked” laminae do, however, once more participate in the general straining of the laminate, this already occurring at a distance of approximately the lamina thickness. This means that  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  stresses may develop again at a short distance from the crack which could under certain circumstances result in a another IFF. This is caused by the interlaminar shear stresses arising in the vicinity of the crack. These stresses are considerably greater than the ones we have previously considered since due to the IFF a large number of “micro load introduction points” arises with high gradients of the lamina stresses  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  acting transversely to the fibres. These IFFs have abrupt stress peaks and cannot be covered by analysis using elementary tools. Frequently they first bring about mini-delamination of the lamina interface in the vicinity of the crack tip. In contrast to the relative small ILS in undisturbed areas, these ILS have a considerable influence on the failure event in the laminate, particularly when there is cyclic loading.

**ILS at the free edges of laminates**

Very high, unevenly distributed ILS with high stress peaks may occur at “free” edges such as the lateral cut edges of strip-shaped laminate test coupons. Upon closer examination these edges reveal themselves to be load introduction areas with a special feature: no forces are transferred from outside into the laminate, but the laminae subject each other to stress instead, by constraining against each other. This is required by the compatibility of deformations of the laminate since no relative displacements of adjacent laminae can take place at the lamina interfaces. This is illustrated in two simple examples (Figure 23 and Figure 24).

Figure 23. Constraints due to the different stress-strain behaviour of the UD laminae in the [90/0/90] laminate is the cause for the interlaminar stresses at the force-free lateral edges

Shown here are the incompatible strains which would occur when the laminae were not bound together, and the tensile and compressive stresses  $\sigma_y$ , which are required to undo relative deformations at the edges of the laminae.

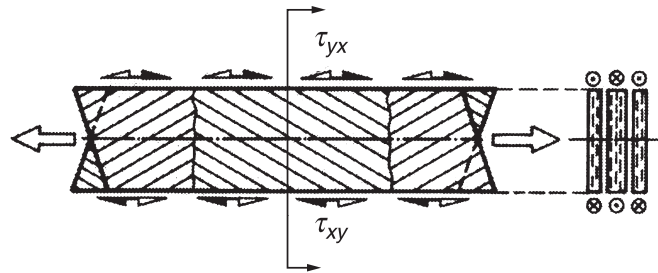


Bild 24. Verspannung infolge des unterschiedlichen Spannungs-Verformungs-Verhaltens der UD-ES beim [+45/-45/+45] Laminat ist die Ursache für interlaminare Spannungen an den kraftfreien seitlichen Rändern

Gezeigt sind die unverträglichen Verformungen, die sich einstellen würden, wenn die Schichten nicht verbunden sind, und die zu ihrer Rückstellung erforderlichen Schubspannungen  $\tau_{yz}$  (Koordinatensystem siehe Bild 23).

Figure 24. Constraints due to the different stress-strain behaviour of the individual UD lamina in the [+45/-45/+45] laminate is the cause of interlaminar stresses at the force-free lateral edges

Shown here are the incompatible strains which would occur when the laminae were not bound together, and the shear stresses  $\tau_{yz}$  required to undo the deformations (for coordinates system, see Figure 23).

Bei einem dreischichtigen [90/0/90]-Laminat (Bild 23) würde, wenn die Schichten nicht aneinander haften würden, bei einachsiger Zug  $\sigma_x$  in der 0°-Schicht eine relativ große Querkontraktion  $\epsilon_y = -\nu_{\perp\parallel} \epsilon_x \approx -0,3\epsilon_x$  auftreten, während in den 90°-Schichten eine wesentlich kleinere Querkontraktion  $\epsilon_y = -\nu_{\perp\parallel} \epsilon_x \leq 0,1\epsilon_x$  entstehen würde. Im Laminat werden die 0°-Schicht und die 90°-Schichten aber zu einer gleichen Dehnung  $\epsilon_y$  gezwungen. Dazu ist in der 0°-Schicht eine Zugspannung  $\sigma_y$  und in der 90°-Schichten eine Druckspannung  $\sigma_y$  nötig. Diese können am „kraftfreien“ Rand nur dadurch entstehen, dass die 0°-Schicht und die 90°-Schichten sich im Randbereich durch eine gegenseitige Verspannung so belasten, dass die erforderlichen Spannungen  $\sigma_y$  entstehen. Diese können sich nur durch interlaminare Schubspannungen  $\tau_{zy}$  aufbauen. Es entsteht in einem Randbereich, der etwa so breit ist wie das Laminat dick ist, eine recht ungleichförmige Verteilung der ILS, wie in Kraftereinleitungsbereichen üblich. Auch diese ILS können nicht mit elementaren Mitteln berechnet werden. Unter der Annahme, dass die sich aus der CLT ergebenden Spannungen auf einer Strecke eingeleitet werden, die etwa der Dicke des Laminates entspricht, kann man die Größe der ILS am Rand jedoch grob abschätzen (siehe [Mit04; Mit06]). Sie sind in der Regel um mehr als eine Größenordnung höher als ILS in vollkommen ungestörten Bereichen. Solche Abschätzungen können z.B. wichtig sein, um das Vorzeichen der Quernormalspannung zu bestimmen. Die Art der Quernormalspannung hat großen Einfluss auf die Gefährdung des Bauteils (Schälwirkung durch Zugspannung). Generell sollten nach Möglichkeit freie Ränder vermieden oder konstruktiv gesichert werden (z.B. durch Randeinfassung).

With a three-lamina [90/0/90] laminate (Figure 23), a relatively large transverse contraction  $\epsilon_y = -\nu_{\perp\parallel} \epsilon_x \approx -0,3\epsilon_x$  would occur with uniaxial tension  $\sigma_x$  in the 0° lamina if the laminae did not adhere together, while a considerably smaller transverse contraction  $\epsilon_y = -\nu_{\perp\parallel} \epsilon_x \leq 0,1\epsilon_x$  would occur in the 90° laminae. In the laminate, however, the 0° lamina and the 90° laminae are forced into the same level of strain  $\epsilon_y$ . Here a tensile stress  $\sigma_y$  is required in the 0° lamina and a compressive stress  $\sigma_y$  in the 90° laminae. These cannot occur at the “force-free” edge unless the 0° lamina and the 90° laminae so load each other in the edge area by mutual constraining of the “glued” laminae that the necessary stresses  $\sigma_y$  occur. These can only be produced by interlaminar shear stresses  $\tau_{zy}$ . In an edge area which is approximately as wide as the laminate is thick, there occurs a very uneven distribution of the ILS, such as is usual in load introduction areas. Also these ILS cannot be computed by elementary means. Assuming that the stresses obtained using CLT are applied in one section which corresponds more or less to the thickness of the laminate, one can still form a rough estimate of the magnitude of the ILS at the edge (see [Mit04; Mit06]). As a rule they will be greater by more than one order of magnitude than ILS in entirely undisturbed areas. Such estimations can be, for instance, very important for the determination of the sign of the perpendicular normal stress. The type of the perpendicular normal stress highly influences the endangerment of the component (peeling effect caused by tensile stress). As a basic principle, free edges shall be avoided – if possible – or protected by a design solution (e.g. an edge border).

Das Beispiel in Bild 24 veranschaulicht den Verspannungsvorgang bei einem [+45/-45/+45]-Laminat unter einachsiger Zugbelastung in  $x$ -Richtung. Wären bei diesem Laminat die Schichten nicht miteinander verbunden, würden sich bei einachsiger Zugbeanspruchung zwar gleiche Querkontraktionen  $\epsilon_y$  einstellen, hingegen unterschiedlich gerichtete Schubverformungen  $\gamma_{xy}$ . Im Laminat werden diese vollständig unterdrückt, sofern es sich um einen AWW handelt. Durch entgegengesetzt gerichtete interlaminare Schubspannungen  $\tau_{zx}$  im Randbereich belasten sich die Schichten mit Schichtspannungen  $\tau_{xy}$ , die gerade so hoch sind, dass die individuellen Schubverformungen  $\gamma_{xy}$  verhindert werden.

Dünne, weich-elastische Zwischenschichten können in den Randbereichen die gegenseitige Verformungsbehinderung etwas „mildern“, das heißt den Bereich der gegenseitigen Verformungsbehinderung und der daraus resultierenden Belastung der Schichten etwas vergrößern und damit die Spitzenspannungen der Rand-ILS reduzieren.

**ILS in balkenähnlichen Laminaten**

Kompakte, balkenähnliche Laminare kommen als FKV-Bauteile relativ selten vor. Solange ein solcher „Balken“ relativ schmal ist, lässt sich die aus Querkraft herrührende interlaminare Schubspannung  $\tau_{zx}$  näherungsweise nach Gleichung (85a) berechnen, siehe Bild 25. Wenn jedoch die Breite wesentlich größer als die Dicke ist, stellt sich eine andere Spannungsverteilung über die Breite ein [Goe89].

**Beurteilung der Bruchgefahr durch ILS mittels Bruchkriterien**

Auf relativ gleichmäßig verteilte ILS können die in Abschnitt 4.5 behandelten Bruchkriterien angewandt werden, wobei die wirkebenebezogenen Bruchkrite-

The example in Figure 24 illustrates the mutual constraining of the laminae in a [+45/-45/+45] laminate with uniaxial tensile loading along the  $x$  axis. Were the laminae in this laminate not bound together, although equal levels of transverse contraction  $\epsilon_y$  would occur with uniaxial tensile loading, differently orientated shear strains  $\gamma_{xy}$  would also occur. These will be entirely suppressed in the laminate when it is a BAP. Due to the fact that the interlaminar shear stresses  $\tau_{zx}$  in the edge area are in opposing directions, the laminae subject each other to lamina stresses  $\tau_{xy}$ , just great enough to prevent individual shear strains  $\gamma_{xy}$  from occurring.

The mutual prevention of strains can be somewhat moderated by thin, flexible intermediate layers in the edge areas. In other words, this will increase somewhat the area of mutual strain prevention and the resulting loading of the laminae, and thereby reduce the peak stresses of the edge ILS.

**ILS in beamlike laminates**

Compact, beamlike laminates are encountered relatively infrequently as FRP components. Provided a “beam” of this kind is relatively narrow, the interlaminar shear stress  $\tau_{zx}$  stemming from transverse force can be approximately calculated from Equation (85a) (Figure 25). But if the width is considerably greater than the thickness, there will be a different distribution of stresses [Goe89] over the width.

**Using strength criteria to assess the risk of failure due to ILS**

The strength criteria dealt with in Section 4.5 can be applied to ILS which are relatively evenly distributed. Here it is the action-plane strength criteria which best

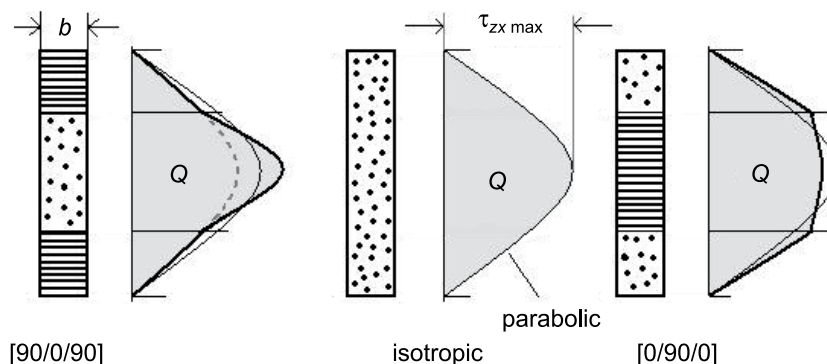


Bild 25. Einfluss der Schichtfolge eines balkenähnlichen Laminates auf die Verteilung der Schubspannungen  $\tau_{zx}$  infolge Querkraft  $Q = q \cdot b$

Die Fläche  $Q$  der Schubspannungen  $\tau_{zx}$  entspricht der wirkenden Querkraft und ist daher in allen drei Fällen gleich groß.

Figure 25. Influence of the lamina stacking sequence of a beamlike laminate on the distribution of shear stresses  $\tau_{zx}$  as a consequence of transverse shear force  $Q = q \cdot b$

The area  $Q$  of the shear stresses  $\tau_{zx}$  corresponds to the acting shear force and is therefore of equal size in all three cases.

rien am ehesten eine Aussage über eine Delaminationsgefahr erlauben. Die behandelten Bruchkriterien liefern aber beim Auftreten hoher Spannungsspitzen gepaart mit hohem Spannungsgradienten keine verlässlichen Ergebnisse. Sie würden möglicherweise Bruch vorhersagen, obwohl die für die Entstehung eines makroskopischen Bruches nötige Energiefreisetzung fehlt. Mit solchen Fragestellungen bewegt man sich in den Bereich der Kerbbruchmechanik.

**5.1.4 Berücksichtigung der Verzerrung aus Schubspannungen durch Querkraft**

Schon bei gedrungenen Kragträgern aus homogenem Werkstoff ist bekannt, dass der Einfluss der Schubverzerrung (unter Querkraft) in Dickenrichtung auf die Verformung des Kragträgers nicht mehr vernachlässigbar ist. Wenn nur die „Biegeweichheit“ des Balkens  $(EI)^{-1}$  ohne die Schubweichheit  $(GA_S)^{-1}$  berücksichtigt wird, so rechnet man mit einer zu großen Steifigkeit und erhält zu geringe Verformungen [Cun83].

Beim FKV ist dieser Einfluss schon bei schlankeren Balken, Platten und flachgekrümmten Schalen nicht mehr vernachlässigbar, weil das Verhältnis des Schubmoduls in Dickenrichtung zum Elastizitätsmodul ungefähr eine Größenordnung kleiner als z.B. bei Metall ist. Es darf also nur eingeschränkter als z.B. bei Metallen die klassische Balkentheorie oder die Kirchhoff'sche Plattentheorie benutzt werden. Dies bedeutet: Die Theorie von *Timoshenko* ist schon bei schlankeren FKV-Balken zu verwenden.

Als Näherung kann die *Methode der Schubkorrekturfaktoren* herangezogen werden, bei der die Schubverzerrung durch einen linearen Ansatz über die Bauteildicke berücksichtigt wird. Der ebenbleibend angenommene Querschnitt dreht sich um einen zusätzlichen Winkel, den Schubwinkel  $\gamma_s$

$$\gamma_s = Q/A_S G \quad \text{mit} \quad A_S = A/k_S \quad (88)$$

Man verwendet somit eine gemittelte Schubverzerrung zur Erzielung genauerer Durchbiegungen, Eigenfrequenzen, kritischer Drehzahlen und bei der Analyse lokaler Lasten. Eine Abschätzung von  $k_S$  kann für einige Querschnittsformen mit Hilfe der Handbücher erfolgen. Die dortigen Werte gelten zwar nur für homogene, isotrope Querschnitte, sind aber auch für Laminat-Querschnitte näherungsweise heranziehbar, wenn z.B. die Schubspannungsverteilung des FKV-Balkens nicht zu sehr von der parabolischen Verteilung des isotropen Balkens  $\tau = Q \cdot S/(I \cdot b)$  (siehe Bild 25) abweicht! Dabei ist  $S$  das Statische Moment der Restfläche,  $I$  das Flächenträgheitsmoment und  $b$  die Breite des Querschnittes. Dies ist der Fall bei einigermaßen quasi-isotrop aufgebauten vielschichtigen Laminaten. Für

provide useful information about the risk of delamination. But when high stress peaks accompanied by high stress gradients occur, the strength criteria dealt with will not yield results which are reliable. They might, for example, predict failure despite the fact that the release of energy required for the creation of a macroscopic fracture does not occur. With questions of this kind we are entering the sphere of notch and fracture mechanics.

**5.1.4 Taking into account the strains arising from shear stresses due to transverse forces**

Even with short cantilever beams made of homogeneous material it is known that the influence of shear strain (under transverse force) in the thickness direction on the strain of the cantilever beam can no longer be ignored. If only the “bending flexibility” of the beam  $(EI)^{-1}$  without the shear flexibility  $(GA_S)^{-1}$  is taken into account, then one may design with a too high stiffness and analysis will produce strains which are too small [Cun83].

With FRP, this influence can no longer be ignored even with narrower beams, plates and shallow curved shells since the ratio between the shear modulus in the thickness direction and Young's modulus is approximately one order of magnitude smaller than is the case, for example, with metal. Classical beam theory or Kirchhoffian plate theory should therefore only be used with more restrictions than with metals, for example. This means: already with narrower FRP beams, *Timoshenko's* theory should be used.

The *shear correction factors method* may be used as an approximation: here the shear strains are assumed to be linearly distributed over the thickness of the component. The cross-section, which is assumed to remain plane, revolves by an additional angle, the shear angle  $\gamma_s$

$$\gamma_s = Q/A_S G \quad \text{where} \quad A_S = A/k_S \quad (88)$$

An averaged shear strain is thus used in order to obtain more precise results for deflections, natural frequencies, critical speeds and in the analysis of local loads. For some cross-sectional shapes,  $k_S$  can be estimated with the aid of handbooks. Although the figures provided there only apply to homogeneous, isotropic cross-sections they can also be used as approximations for laminate cross-sections provided the shear stress distribution of the FRP beam, for example, does not deviate excessively from the parabolic distribution of the isotropic beam  $\tau = Q \cdot S/(I \cdot b)$  (see Figure 25). Here  $S$  is the static moment of the cut-off area,  $I$  the areal moment of inertia, and  $b$  the width of the cross-section. This is the case with multi-ply laminates with a fairly quasi-isotropic structure. For the thin-walled tube,  $k_S$  will then be equal to 1,8 and for

das dünnwandige Rohr gilt  $k_S = 1,8$  und für den Rechteckbalkenquerschnitt 1,2 (im nicht-realen Fall konstanter Schubspannungen über den Querschnitt wäre  $k_S = 1$ ; treffender als Schubkorrekturfaktor wäre deshalb der ebenfalls benutzte Begriff „Schubverteilungszahl“). Diese müsste man eigentlich für jeden Laminat-Typ mit der FEM ermitteln [Roh88].

Als Kriterium, wann die Schubverzerrung berücksichtigt werden muss, dient das Geometrieverhältnis (Schlankheit)

$$l/t < 20 \tag{89}$$

wobei  $l$  z.B. der Auflagerabstand eines Balkens oder die Halbwellenlänge eines schwingenden Balkens ist.

*Abschätzung für Balken, Plattenstreifen, Schale*

Beim gedungenen Laminat werden zwecks Berücksichtigung der transversalen Schubspannungen und -verzerrungen die Schnittgrößen-Verzerrungs-Beziehungen erweitert:

$$\begin{Bmatrix} n^0 \\ m \\ n_{xz} \\ n_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ B & D & 0 & 0 \\ & & k_x^2 A_{55} & k_x k_y A_{45} \\ & & \text{(symm.)} & k_y^2 A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{90}$$

Für die quasi-isotrope Platte wird  $k_x = k_y = \sqrt{k_S}$ .

Bezüglich höherer Ansätze für die genauere Beschreibung der Querschnittsverzerrungen infolge Schubspannungen, siehe [Roh88].

**5.1.5 Behandlung von Kerben**

An Bohrungen, Randkerben und Ausschnittsecken treten Kerbwirkungen auf, die zu Spannungskonzentrationen führen, deren Höhe durch die (Spannungs-) Formzahl – auch Kerbfaktor genannt – erfasst wird. Diese hängt von der Form der Kerbe (Kreis, Langloch, Ellipse, Quadrat), vom Verbundwerkstoff, von der Schichtfolge und schließlich von der Belastungsrichtung selbst ab.

Bei der Kerbspannungsanalyse von faserverstärkten Scheiben wird als mathematisches Modell oft die orthotrope, elastische UD-Scheibe mit Ausschnitt zu Grunde gelegt. Als ein wesentlicher Parameter geht hierbei das Verhältnis von  $E_{\parallel}/E_{\perp}$  (so genannter Anisotropiegrad) in die Kerbspannungsberechnung ein. Für mittig gekerbte UD-Verbundscheiben unter Zugbelastung in Faserrichtung ist exemplarisch der Einfluss des Anisotropiegrades für unterschiedliche Ausschnittskonturen in Bild 26a dargestellt. Gleichzeitig sind im Kerbspannungs-Diagramm übersichtlich die Anwendungsbereiche für unidirektionale GFK-, AFK- und CFK-Scheiben skizziert. Bei Faserver-

the rectangular beam cross-section 1.2 (in the non-real case of constant shear stresses over the cross-section  $k_S$  would be equal to 1; for this reason the term “shear distribution factor” which is also used would be more appropriate than shear correction factor). This would really need to be determined for each type of laminate by means of the FEA [Roh88].

As a criterion of when shear strain needs to be taken into account, the geometrical aspect ratio (slenderness)

$$l/t < 20 \tag{89}$$

will serve, whereby  $l$  is, for example, the distance between supports of a beam or half the wavelength of an oscillating beam.

*Estimation for beams, plate strips, shells*

With the non-slender laminate, the section forces/section moments strain relations are expanded in order to take into account transverse shear stresses and strains:

$$\begin{Bmatrix} n^0 \\ m \\ n_{xz} \\ n_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ B & D & 0 & 0 \\ & & k_x^2 A_{55} & k_x k_y A_{45} \\ & & \text{(symm.)} & k_y^2 A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{90}$$

For the quasi-isotropic plate,  $k_x = k_y = \sqrt{k_S}$  is set.

With regard to higher-order formulations used to obtain a more precise description of cross-section strains resulting from shear stresses, see [Roh88].

**5.1.5 Treatment of notches**

Notch effects occur at drilled holes, in notches on edges and at the corners of cut-outs, and these result in stress concentrations whose magnitude is expressed by the stress concentration factor (also known as the notch factor). This factor itself depends on the shape of the notch (circle, slot, ellipse, square), on the composite material, on the stacking sequence of laminae, and finally on the direction of loading.

In the notch stress analysis of fibre-reinforced membranes, often the orthotropic, elastic UD plate with a cut-out is used as the basic mathematical model. As a major parameter here, the  $E_{\parallel}/E_{\perp}$  ratio (the so-called degree of anisotropy) is input into the notch stress calculation. As an example, Figure 26a shows the influence of the degree of anisotropy for different cut-out contours as applicable to centrally notched composite UD plates subject to tensile stress in the direction of the fibres. Along the  $E_{\parallel}/E_{\perp}$  axis of the notch stress diagram, the ranges of application for unidirectional GFRP, AFRP and CFRP in-plane loaded plates have also been added. In the case of fibre composite

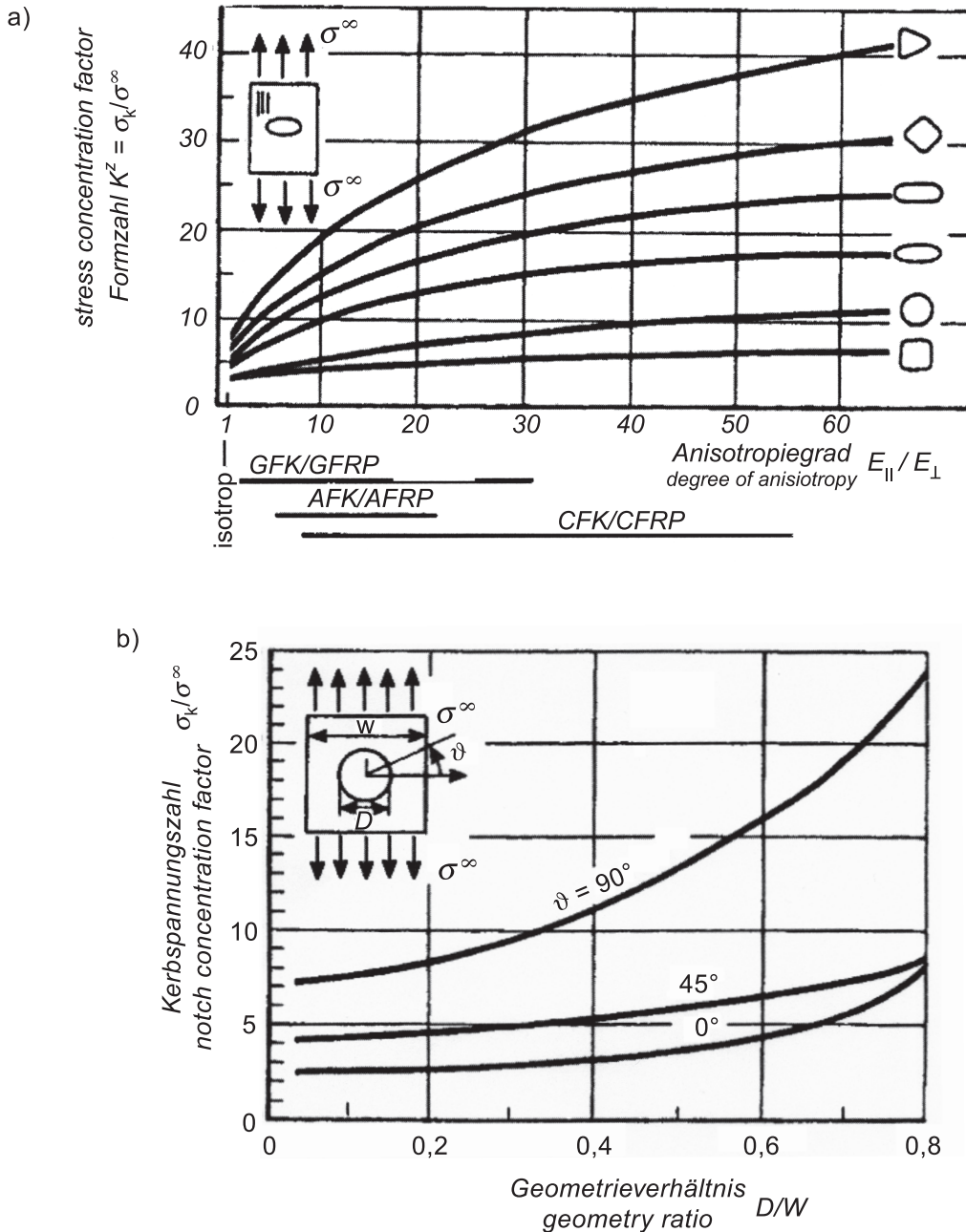


Bild 26. Kerben

- a) Einfluss des Anisotropiegrades auf die Formzahlen  $K^2$  unterschiedlich gekerbter, unendlich breiter FKV-Scheiben (UD Schicht) mit  $\sigma^\infty$  als anliegender Bruttospannung sowie  $\sigma_k$  als maximaler Spannung am Kerbrand.
- b) Einfluss endlicher Breite bei kreisgelochten UD FKV-Scheiben: Parameter  $\vartheta$  = Faserrichtung,  $\sigma_k$  als maximaler Spannung am Kerbrand sowie  $\sigma$  als anliegender Bruttospannung.

Figure 26. Notches

- a) Influence of the degree of anisotropy on the stress concentration factors  $K^2$  of differently notched FRP in-plane loaded plates (UD lamina) of "infinite width" with applied far field stress  $\sigma^\infty$ , and maximum notch edge stress  $\sigma_k$ .
- b) Influence of finite width in UD FRP in plane loaded plates with a circular hole with parameter  $\vartheta$  is fibre direction, maximum notch edge stress  $\sigma_k$  and the applied gross stress.

bundscheiben mit Verstärkung aus hochmoduligen Kohlenstofffasern erreichen die Formzahlen theoretisch sogar Werte über 50 und müssen daher vom Niveau in einem erweiterten Kerbfestigkeitsnachweis im besonderen Maße berücksichtigt werden. Im Falle einer Querbelastung sind umgekehrt die Spannungsüberhöhungen am Kerbrand vom Anisotropiegrad

sheets with reinforcement of high-modulus carbon fibres, the stress concentration factors can in theory even reach values above 50 and will therefore need to be taken into particular consideration in an expanded notch strength analysis. In the case of transverse loading, the reverse applies: stress magnifications at the notch edge are virtually independent of the degree



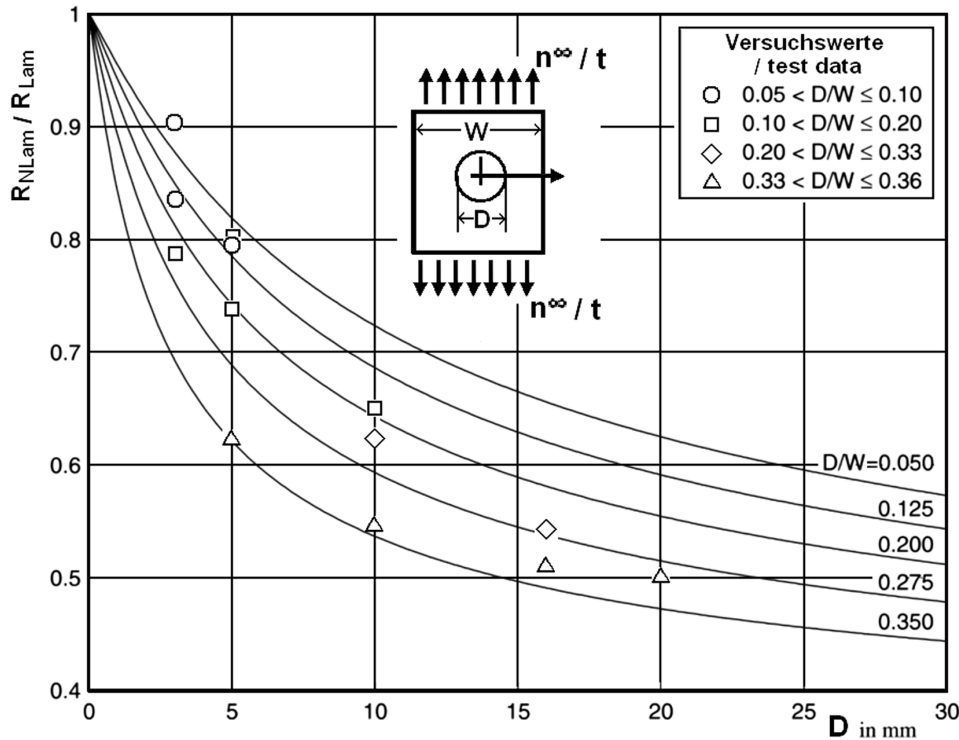


Bild 26c. Bezogene Kerbfestigkeit  $R_{NLam}$  des Laminates (25% 0°, 50%±45°, 25% 90°) in Abhängigkeit von endlicher Breite und Lochdurchmesser.  $R_{Lam}$  ist die Festigkeit des ungekerbten Laminates

Figure 26c. Normalised notch strength  $R_{NLam}$  of a laminate (25% 0°, 50%±45°, 25% 90°) in dependence of finite width and hole diameter.  $R_{Lam}$  is the strength of the unnotched laminate

nahezu unabhängig. Weitere Detailinformationen zum Einfluss von Belastungsrichtung und -art, Faserorientierung, Verstärkungsart usw. sind in [Huf99; HSB; Kro92] zu finden.

Der Anstieg der Kerbspannungszahl in Abhängigkeit vom Geometrieverhältnis  $D/W$  ist exemplarisch für ein UD CFK-Laminat mit drei Faserorientierungen in Bild 26b dargestellt. Technische Laminates sind im allgemeinen symmetrisch und ausgewogen aufgebaut und dürfen daher näherungsweise als orthotrope „homogenisierte“ Schichtverbunde modelliert werden. Damit lässt sich die oben beschriebene Kerbspannungsanalyse im Rahmen der Elastizitätstheorie analog auf mehrschichtige Verbunde übertragen. Es ist dann allerdings die Formzahl als „verschmierter“ Kerbfaktor (Pseudofaktor) zu betrachten.

Von Bedeutung ist: Im Unterschied zur klassischen Kerbspannungstheorie (maximale Kerbspannung ist unabhängig von Lochgröße; konstante Formzahl) ist die Kerbfestigkeit von der absoluten Lochgröße abhängig. Mit steigendem Lochdurchmesser nimmt die Kerbfestigkeit bei festem Verhältnis  $D/W$  ab, da mehr Werkstoffvolumen sehr hoch beansprucht ist.

Auch ein Anstieg des  $D/W$ -Verhältnisses führt infolgedessen zur Abnahme der Kerbfestigkeit. Für einen ausgewählten Laminattyp sind diese Zusammenhänge in Bild 26c veranschaulicht (näheres siehe [HSB, Kap. 34000, Kro05]).

of anisotropy. Further information about the influence of the loading direction and type, fibre orientation, reinforcement type and so on, may be found in [Huf99; HSB; Kro92].

The increase of the stress concentration factor in dependency of the geometrical ratio  $D/W$  is exemplarily displayed in Figure 26b for a UD CFRP laminate with three fibre directions. As technical laminates are in general symmetrically stacked and equally balanced they may be modelled as orthotropic homogenized laminates, approximately. For this reason, the notch stress analysis described above can be transferred to multi-ply laminates in the frame of the elasticity theory. However then, the stress concentration factor has to be considered as a ‘smeared’ notch factor (pseudo-factor).

It is of interest: Different to the classical notch theory (maximum notch stress does not depend on size of hole; accurate stress concentration factor) the notch strength depends on the absolute size of the hole. With increasing hole diameter the notch strength reduces for a given ratio  $D/W$  because more material volume is highly stressed.

Hence, also an increase of the  $D/W$  ratio leads to a decrease of the notch strength. For a selected laminate these interrelationships are visualized in Figure 26c (for closer attention see [HSB, chapter 34000, Kro05]).

## 5.2 Schichtenweise Bruchanalyse

### 5.2.1 Grundsätzliche Betrachtungen

Die Beschreibung des Bruchgeschehens einer Schicht in einem Laminat wird sowohl durch deren Anisotropie erschwert als auch durch das Auftreten zweier, in ihren Formen und Auswirkungen grundverschiedener Bruchtypen, nämlich FB und ZFB (siehe Abschnitt 4.5). Die Bruchanalyse des Laminates wird außerdem dadurch aufwändig, dass die in einem Laminat vereinigten Schichten normalerweise nicht gleichzeitig ihre Bruchgrenzen erreichen. Einzelne Schichten können bis zur ZFB-Grenze belastet sein oder diese sogar schon überschritten haben, während andere Schichten noch weit von einer Bruchgrenze entfernt sind. Außerdem ändert sich bei hohen Belastungen – wegen der nicht-linearen Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhänge und des Einflusses der ZFB-Rissbildung auf einige Steifigkeiten – die Verteilung der Lasten auf die einzelnen Schichten des Laminates in Abhängigkeit von der Belastungshöhe.

Mit Hilfe der schichtenweisen Bruchanalyse eines Laminates gelingt es, dessen sukzessives Bruchgeschehen rechnerisch näherungsweise zu erfassen. Anders als bei der Belastung einer „isolierten“ Schicht führt der ZFB einer Schicht in einem Laminat nicht zu einem Trennbruch, durch den die Tragfähigkeit der Schicht erschöpft wird. Zwar entstehen bei der Überschreitung der ZFB-Grenze einer Schicht in dieser nach und nach immer mehr Risse, welche die Schicht örtlich durchtrennen. Die Risse werden aber durch die Nachbarschichten überbrückt, in denen die Fasern in anderer Richtung orientiert sind als in der vom ZFB betroffenen Schicht. Bei sehr weiter Überschreitung der ZFB-Grenze kann die Rissbildung eine Art „Sättigungszustand“ (Characteristic Damage State) erreichen. Auch eine mit vielen Rissen durchsetzte Schicht beteiligt sich infolge der Einbindung in das Laminat weiterhin an der Lastaufnahme, allerdings bei matrixdominierter Beanspruchung  $\sigma_{\perp}^{\pm}$  und  $\tau_{\parallel}$  mit von der Rissdichte abhängigen verminderten Steifigkeiten. Ein Laminat, das nach den Gesetzen der Netztheorie tragfähig wäre, kann im Allgemeinen weit über die Rissbildungsgrenze hinaus beansprucht werden. Die Tragfähigkeitsgrenze eines solchen Laminates ist normalerweise erst dann erreicht, wenn FB in einer oder gleichzeitig in mehreren Schichten eintritt.

Die Anwendung der schichtenweisen Bruchanalyse des Laminates ist bisher im Wesentlichen auf Laminat aus UD-Schichten und auf intralaminare Beanspruchungen, das heißt auf ebene  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustände in den Schichten, beschränkt. Eine Beschreibung der Delaminationsvorgänge ist mit ihr heute noch nicht möglich. **Die Einschränkung auf**

## 5.2 Lamina-by-lamina fracture analysis

### 5.2.1 Fundamental aspects

A description of the fracture event of a lamina in a laminate is rendered more difficult not only by its anisotropy but also by the occurrence of two types of fracture which are fundamentally different in their forms and effects, namely FF and IFF (see Section 4.5). What also makes fracture analysis of the laminate a complicated matter is that the laminae bound together in a laminate do not normally reach their fracture limits simultaneously. Some laminae in a laminate may be loaded up to the IFF limit or have even already exceeded the limit, while others are still a long way from a fracture limit. In addition, under high loading conditions the distribution of loads over the individual laminae of the laminate will vary as a function of the stress level – this is due to the non-linear stress-strain interrelationships and the influence of IFF crack formation on certain stiffness values.

With the aid of fracture analysis carried out for a laminate on a lamina-by-lamina basis, it will be possible to cover the succession of fracture events with mathematical approximation. Unlike the case where an “isolated” layer is subjected to stress, when the lamina forms part of a laminate the IFF does not result in a separation fracture which leads to the disappearance of the load-bearing capacity of the lamina. It is true however that when the IFF limit in a lamina is exceeded, more and more cracks will gradually appear in it and these will sever the lamina locally. The cracks are bridged however by the adjacent lamina where the fibres are oriented in a different direction than in the lamina affected by IFF. If the IFF limit is exceeded by a very great margin, cracking may reach a kind of “saturation state” (Characteristic Damage State). Even a lamina which is fissured with a large number of cracks will, due to its incorporation in the laminate, continue to contribute to load absorption but in the case of matrix-dominated stressing  $\sigma_{\perp}^{\pm}$  and  $\tau_{\parallel}$  there will be reduced stiffness values depending on the crack density. A laminate which would according to the laws of netting theory be capable of load-bearing can generally handle stresses far beyond the cracking limits. The limit of the load carrying capacity of a laminate of this kind will not normally be reached until FF occurs in one lamina or in several laminae simultaneously.

Until now the application of a lamina-by-lamina fracture analysis of the laminate has been essentially restricted to laminates made up of UD laminae and to intralaminar stresses – in other words, to two-dimensional stress states  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$  in the laminae. Delamination can not be described in this way. **The restriction to two-dimensional stress states  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$**

**ebene Spannungszustände ( $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ ) gilt auch für die folgenden Ausführungen.** Es gibt mittlerweile eine ganze Reihe unterschiedlicher Modelle zur schichtenweisen Bruchanalyse von Laminaten [Hin04]. Im Folgenden wird eine besonders realitätsnahe Bruchanalyse dargestellt [Puc96a; Puc98; Puc02b; Kno07].

Mit Hilfe der schichtenweisen Bruchanalyse *mit kontinuierlicher Abminderung von Moduln* oberhalb von ZFB-Grenzen lässt sich nachprüfen, ob ZFB zu unzulässig großen Verformungen des Laminates führen. Des Weiteren wird hiermit eine genauere Berechnung gegen Bruch des Laminates möglich, denn mit den Modul-Abminderungen nach eingetretenen ZFB errechnen sich etwas größere FB-Anstrengungen als ohne diese Abminderungen. Auch die Sicherheit gegenüber elastischer Instabilität wird unter Umständen durch die Steifigkeitsabminderung herabgesetzt.

Die Spannungen der im Laminat vereinigten  $k = (1 \text{ bis } n)$  UD-Schichten werden gemäß Abschnitt 5.2.2 ermittelt. Geeignete Bruchbedingungen sowohl für ZFB als auch FB finden sich in Abschnitt 4.5.2. Es wird angenommen, dass diese das Bruchgeschehen der Schicht auch dann richtig beschreiben, wenn die betreffende Schicht zwischen anderen Schichten des Laminates eingebettet ist. In Wirklichkeit ist allerdings ein festigkeitssteigernder Einfluss der Nachbarschichten auf das Bruchverhalten einer Schicht in einem Laminat zu erwarten („in situ-Effekt“) [Cam06]. Es wird auch angenommen, dass das Bruchgeschehen in einer Schicht keinen weiteren Einfluss auf die übrigen Schichten hat als die Umlagerung makroskopischer Spannungen dieser Schicht in andere Schichten. Eine durch ZFB verursachte Kerbwirkung, das heißt eine *örtliche* Spannungserhöhung in den Nachbarschichten der von einem ZFB betroffenen Schichten kann derzeit noch nicht zuverlässig berücksichtigt werden, siehe auch Abschnitt 5.3.2.

Hinweise auf ein spezielles Rechenprogramm für die schichtenweise Bruchanalyse sind in Abschnitt 5.5.1 und im Abschnitt „Berechnungssoftware“ im Anschluss an das Schrifttum zu finden.

### 5.2.2 Nichtlineare Spannungsanalyse vor dem ZFB

Sowohl das ( $\tau_{21}, \gamma_{21}$ )-Schubspannungs-Schiebungs-Diagramm als auch das ( $\sigma_2, \varepsilon_2$ )-Spannungs-Dehnungs-Diagramm im Druckbereich zeigen für GFK und CFK ausgeprägte Nichtlinearität. Die Ursache liegt vor allem in Mikroschäden der Matrix und an den Faser/Matrix-Grenzflächen, die sich ab einer bestimmten Beanspruchungshöhe, lange vor dem makroskopischen ZFB entwickeln. In einer realistischen

**also applies to the following implementations.** In the meantime a whole series of different models for lamina-by-lamina fracture analysis of laminates has appeared [Hin04]. One model which is particularly close to reality is presented below [Puc96a; Puc98; Puc02b; Kno07].

Lamina-by-lamina fracture analysis *with continuous reduction of moduli* above IFF limits can be used to check whether IFFs will lead to unacceptably large strains in the laminate. Furthermore it means that a more precise calculation can be made with regard to fracture of the laminate since with the modulus reductions following IFF the FF stress exposures are calculated as somewhat larger than is the case without these reductions. Even safety with regard to elastic instability is under certain circumstances reduced by the reduction in stiffness.

The stresses of the  $k = (1 \text{ to } n)$  UD laminae joined together in the laminate are determined as described in Section 5.2.2. Suitable fracture conditions are presented both for IFF and FF in Section 4.5.2. It is assumed that these will even provide a correct description of the fracture event of the lamina when the lamina in question is embedded between other laminae of the laminate. In reality, however, it may be expected that the adjacent laminae will exert an strength increasing influence on the fracture behaviour of a lamina in a laminate (“in situ effect”) [Cam06]. It is also assumed that the fracture event in a lamina will have no other effect on the other laminae except for redistribution of macroscopic stresses from this lamina into other laminae. A notch effect caused by IFF – in other words, a *local* increase in stress in the laminae adjacent to the laminae affected by an IFF – cannot as yet be included with any reliability (see also Section 5.3.2).

Advices to a specialized calculation software for the lamina-by-lamina fracture analysis can be found in Section 5.5.1 and in Section “Calculation Software” following the Bibliography.

### 5.2.2 Non-linear stress analysis before IFF

The ( $\tau_{21}, \gamma_{21}$ ) curve as well as the ( $\sigma_2, \varepsilon_2$ ) curve for the compression domain of GFRP and CFRP shows a distinct non-linearity. The main reason for this is microdamage within the matrix and at the fibre/matrix interface which develops above a certain stress level but long before the macroscopic IFF. In a realistic lamina-by-lamina fracture analysis the non-linearity due to  $\tau_{21}$  and  $\sigma_2$  compressive stress has to be taken into ac-

schichtenweisen Bruchanalyse muss die Nichtlinearität bei  $\tau_{21}$ - und bei  $\sigma_2$ -Druckspannung berücksichtigt werden. Voraussetzung dafür ist, dass das  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$ -Diagramm für reinen Schub  $\tau_{21}$  und das  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagramm für einachsige  $\sigma_2$ -Druckspannung bekannt sind.

Im Zuge der nichtlinearen schichtenweisen Bruchanalyse werden die am Laminat wirkenden Lasten üblicherweise in kleinen Stufen aufgebracht. Statt mit den Ingenieurkonstanten Elastizitätsmodul  $E_{\perp}$  und Schubmodul  $G_{\perp\parallel}$  rechnet man in der nichtlinearen Laminatanalyse mit den entsprechenden Sekantenmoduln  $E_{\perp s}$  und  $G_{\perp\parallel s}$ , die man aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm abgreift. Die Spannungs- und Verformungsanalyse wird für die gerade bearbeitete Laststufe so lange wiederholt (iteriert), bis sich die Rechenergebnisse für Verzerrungen und Spannungen nicht mehr nennenswert ändern. Dabei wird in jedem Iterationsschritt ein neuer Wert für  $E_{\perp s}$  und  $G_{\perp\parallel s}$  aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm abgegriffen.

Bei der Laminatanalyse erhält man als erstes Ergebnis die Verzerrungen  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  und daraus für jede Einzelschicht  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{21}$ . Damit ergeben sich mit den Gleichungen (3), (5) und (6) die Schichtspannungen  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ . Nach Gleichung (3) hängt die Schubspannung  $\tau_{21}$  auf Grund der Orthotropie nur von der Schiebung  $\gamma_{21}$  (und nicht auch von den Dehnungen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ ) ab. Es empfiehlt sich daher, einige grundsätzliche Zusammenhänge am  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$ -Diagramm zu erläutern. Normalerweise werden in der Laminatanalyse beim ersten Rechenlauf für alle Schichten die Anfangsmoduln  $E_{\perp k}$  und  $G_{\perp\parallel k}$  benutzt. Bild 27a zeigt das als bekannt vorausgesetzte  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$ -Diagramm einer Schicht. Eingetragen sind auch die Ergebnisse aus dem ersten Rechenlauf, nämlich die Schiebung  $\gamma_{21}^{(1)}$  und die Spannung  $\tau_{21}^{(1)}$ .

Es ergeben sich nun zwei verschiedene Möglichkeiten für die Bestimmung des Sekantenmoduls  $G_{\perp\parallel s}$ , der für den anschließenden Iterationsschritt benutzt werden soll.

- A) Man greift für die berechnete Spannung  $\tau_{21}^{(1)}$  am  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$ -Diagramm die zugehörige Schiebung  $\gamma_{21}^{(1A)}$  ab und errechnet  $G_{\perp\parallel s}$  aus  $G_{\perp\parallel s} = \tau_{21}^{(1)} / \gamma_{21}^{(1A)}$ , siehe Bild 27a,
- B) Man greift für die berechnete Schiebung  $\gamma_{21}^{(1)}$  die zugehörige Spannung  $\tau_{21}^{(1B)}$  am  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$ -Diagramm ab und errechnet  $G_{\perp\parallel s}$  aus  $G_{\perp\parallel s} = \tau_{21}^{(1B)} / \gamma_{21}^{(1)}$ , siehe Bild 27a.

Die Vorgehensweise nach B) ist vorteilhaft. Sie lässt den Rechenablauf schneller konvergieren, weil sich im Laminat die Verzerrungen (im Gegensatz zu den Schichtspannungen) bei Veränderung von  $E_{\perp s}$  und

count. A prerequisite for this task is the availability of the  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$  diagram for pure  $\tau_{21}$  shear and of the  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$  diagram for uniaxial  $\sigma_2$  compressive stress.

In the course of a non-linear lamina-by-lamina fracture analysis the loads acting onto the laminate are usually applied in small load steps. Instead of using the engineering constants Young's modulus  $E_{\perp}$  and shear modulus  $G_{\perp\parallel}$  one makes use in the non-linear fracture analysis of the secant moduli  $E_{\perp s}$  and  $G_{\perp\parallel s}$  which are taken from the corresponding stress-strain diagram. The stress and strain analysis has to be repeated (iterated) for the load step under consideration until the calculated stresses and strains do not change significantly any more. Within each step of iteration a new value for  $E_{\perp s}$  and  $G_{\perp\parallel s}$  has to be taken from the corresponding stress-strain curve.

As a first result of the laminate analysis one obtains the strains  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  and the corresponding strains  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{21}$  of each lamina. Based on these strains the lamina stresses  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$  are obtained by means of the Equations (3), (5) and (6). Due to orthotropy expressed in Equation (3) the shear stress  $\tau_{21}$  depends solely on the shear strain  $\gamma_{21}$  and is not related to  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$ . Therefore it is reasonable to explain some fundamental aspects with the help of the  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$  curve. Normally one uses the initial (tangent) moduli  $E_{\perp k}$  and  $G_{\perp\parallel k}$  for the first calculation run of a laminate analysis. Figure 27a shows the known  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$  curve of a lamina. Also shown are the lamina results of the first calculation run of a laminate analysis, namely the strain  $\gamma_{21}^{(1)}$  and the stress  $\tau_{21}^{(1)}$ .

There are two different ways to determine the secant modulus  $G_{\perp\parallel s}$ , which shall be used for the following iteration step.

- A) The shear strain  $\gamma_{21}^{(1A)}$  is taken from the  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$  curve at the calculated shear stress  $\tau_{21}^{(1)}$  and the secant modulus  $G_{\perp\parallel s}$  is calculated from  $G_{\perp\parallel s} = \tau_{21}^{(1)} / \gamma_{21}^{(1A)}$ , see Figure 27a,
- B) The shear stress  $\tau_{21}^{(1B)}$  is taken from the  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$  curve at the calculated shear strain  $\gamma_{21}^{(1)}$  and the secant modulus  $G_{\perp\parallel s}$  is calculated from  $G_{\perp\parallel s} = \tau_{21}^{(1B)} / \gamma_{21}^{(1)}$ , see Figure 27a.

The procedure B) is the preferred one. The convergence is faster because laminate strains (in contrast to lamina stresses) do not change significantly when a modification of  $E_{\perp s}$  and  $G_{\perp\parallel s}$  takes place. Besides this

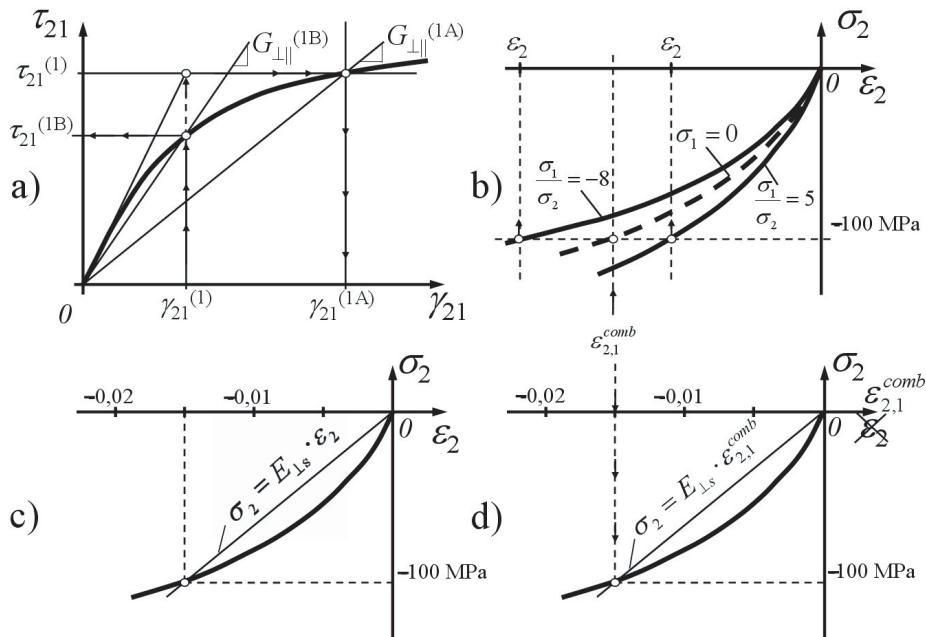


Bild 27.

- a)  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$ -Schubspannungs-Schiebungs-Diagramm mit Abgriff des Sekantenmoduls A) bei der errechneten Spannung  $\tau_{21}^{(1)}$ ; B) bei der errechneten Schiebung  $\gamma_{21}^{(1)}$
- b)  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagramme für kombinierte  $(\sigma_1, \sigma_2)$ -Spannungszustände. Gleiche Spannung  $\sigma_2$  wird bei gleichem  $\varepsilon_{2,1}^{comb}$  erreicht, aber je nach dem Verhältnis  $\sigma_1/\sigma_2$  bei unterschiedlichem  $\varepsilon_2$ .
- c) Für die Spannungsberechnung steht nur ein bei einachsiger Beanspruchung durch eine Spannung  $\sigma_2$  aufgenommenes  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagramm zur Verfügung.
- d) Für die Spannungsberechnung bei kombinierter  $(\sigma_1, \sigma_2)$ -Beanspruchung wird das einachsige aufgenommene Diagramm mit unveränderter Skalenteilung übernommen, jedoch bedeuten die Werte auf der Dehnungsskala jetzt nicht mehr  $\varepsilon_2$ -Werte sondern  $\varepsilon_{2,1}^{comb}$ -Werte.

Figure 27.

- a)  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$  shear stress-strain curve with picking the secant modulus A) at the calculated stress  $\tau_{21}^{(1)}$ ; B) at the calculated strain  $\gamma_{21}^{(1)}$
- b)  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$  diagrams for combined  $(\sigma_1, \sigma_2)$  stress. Equal stress  $\sigma_2$  is reached at equal magnitude of  $\varepsilon_{2,1}^{comb}$ , but – depending on the ratio  $\sigma_1/\sigma_2$  – at different strains  $\varepsilon_2$ .
- c) For the stress calculation only a  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$  curve is available which is gained from a test with uniaxial  $\sigma_2$  stress.
- d) For the stress calculation at combined  $(\sigma_1, \sigma_2)$  stress the curve from the uniaxial test can be used without any modification of the strain axis, however the values on the strain axis have changed their meaning from  $\varepsilon_2$  to  $\varepsilon_{2,1}^{comb}$ .

$G_{\perp\parallel s}$  nur geringfügig ändern. Außerdem besteht beim Vorgehen nach A) die Gefahr, dass man beim Versuch,  $\gamma_{21}$  bei einer relativ hohen Spannung  $\tau_{21}$  abzugreifen, die Spannungs-Dehnungslinie gar nicht mehr trifft.

Bei  $\sigma_2$  ist die Spannungsberechnung etwas komplizierter. Infolge von Querkontraktions-Einflüssen hängen sowohl  $\sigma_2$  als auch  $\sigma_1$  mit *beiden* Dehnungen,  $\varepsilon_2$  und  $\varepsilon_1$ , zusammen, siehe Gleichungen (3) und (5).

Daraus erhält man die folgenden Beziehungen:

$$\sigma_2 = E_{\perp s}(\sigma_2) \cdot \varepsilon_2 + \nu_{\perp\parallel} \sigma_1 \tag{91a}$$

$$\text{oder } \sigma_2 = E_{\perp s}(\sigma_2) \cdot \frac{\varepsilon_2 + \nu_{\perp\parallel} \varepsilon_1}{1 - \nu_{\perp\parallel} \nu_{\parallel\perp}} \tag{91b}$$

$$\text{oder abgekürzt } \sigma_2 = E_{\perp s}(\sigma_2) \cdot \varepsilon_{2,1}^{comb} \tag{91c}$$

Man darf deshalb den Sekantenmodul  $E_{\perp s}(\sigma_2)$  nicht an der für die kombinierte  $(\sigma_1, \sigma_2)$ -Beanspruchung berechneten Dehnung  $\varepsilon_2$  am einachsige aufgenommenen  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Spannungs-Dehnungs-Diagramm ab-

there may be the risk with procedure A) that one fails to capture the stress-strain curve when trying to pick  $\gamma_{21}$  at a relatively high stress  $\tau_{21}$ .

In case of  $\sigma_2$  the stress analysis is more complicated. Because of Poisson's effects  $\sigma_2$  as well as  $\sigma_1$  are related to *both* strains  $\varepsilon_2$  and  $\varepsilon_1$ , refer to Equations (3) and (5).

From this one obtains the following relations:

$$\sigma_2 = E_{\perp s}(\sigma_2) \cdot \varepsilon_2 + \nu_{\perp\parallel} \sigma_1 \tag{91a}$$

$$\text{or } \sigma_2 = E_{\perp s}(\sigma_2) \cdot \frac{\varepsilon_2 + \nu_{\perp\parallel} \varepsilon_1}{1 - \nu_{\perp\parallel} \nu_{\parallel\perp}} \tag{91b}$$

$$\text{or abbreviated } \sigma_2 = E_{\perp s}(\sigma_2) \cdot \varepsilon_{2,1}^{comb} \tag{91c}$$

For this reason it is not allowed to determine the secant Modulus  $E_{\perp s}(\sigma_2)$  from a  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$  curve resulting from a uniaxial test at that strain  $\varepsilon_2$ , which is calculated for combined  $(\sigma_1, \sigma_2)$  stress. Doing this the in-

greifen, weil dann der Einfluss von  $\sigma_1$  auf  $\sigma_2$  nicht berücksichtigt würde, siehe Gleichung (91a) und Bild 27b.

An der hier in Gleichung (91c) benutzten abgekürzten Schreibweise mit der so genannten „kombinierten Dehnung“  $\varepsilon_{2,1}^{\text{comb}}$  wird erkennbar, dass man die Spannung  $\sigma_2$ , die gleichzeitig mit  $\sigma_1$  wirkt, formal wie bei einem einachsigen  $\sigma_2$ -Spannungszustand mit dem Hooke’schen Gesetz  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  berechnen kann, jedoch mit  $\varepsilon_{2,1}^{\text{comb}}$  statt mit  $\varepsilon_2$ . Würde man bei einachsiger  $\sigma_2$ -Spannung eine Dehnung erzeugen, die dem Betrage nach gleich  $\varepsilon_{2,1}^{\text{comb}}$  ist, so würde bei einem solchen einachsigen Spannungszustand eine gleich hohe Spannung  $\sigma_2$  erreicht wie bei der in der Laminatanalyse vorliegenden Kombination von  $\varepsilon_2$  und  $\varepsilon_1$ .

Meistens beschreibt man das einachsig aufgenommene Spannungs-Dehnungs-Diagramm als eine analytische Beziehung  $\sigma_2 = F_\sigma(\varepsilon_2)$ . Daraus errechnet sich die Spannung  $\sigma_2$  im Falle des zweiachsigen  $(\sigma_1, \sigma_2)$ -Spannungszustandes als  $\sigma_2 = F_\sigma(\varepsilon_{2,1}^{\text{comb}})$ . Damit kann man den Sekantenmodul  $E_{\perp s}$  aus  $E_{\perp s}(\sigma_2) = \sigma_2 / \varepsilon_{2,1}^{\text{comb}}$  berechnen. Dieser Vorgehensweise liegt die Annahme zu Grunde, dass die Modulabminderung von  $E_{\perp}$  auf  $E_{\perp s}$  nur von der momentan wirkenden Spannung  $\sigma_2$  abhängt, unabhängig davon, wie die Spannung  $\sigma_2$  zustande kommt, ob z.B. durch einen einachsigen oder einen zweiachsigen Spannungszustand.

Auch bei der Ermittlung von  $E_{\perp s}$  für den jeweils nächsten Iterationsschritt benutzt man die bei  $G_{\perp ll s}$  als vorteilhaft erkannte Vorgehensweise nach B). Verallgemeinernd lässt sich diese folgendermaßen beschreiben:

Wenn man im i-ten Iterationsschritt für eine Schicht k die Dehnungen  $\varepsilon_{1_k}^{(i)}$  und  $\varepsilon_{2_k}^{(i)}$  und die Schiebung  $\gamma_{21_k}^{(i)}$  errechnet hat, bestimmt man mit Hilfe von  $\varepsilon_{2,1_k}^{\text{comb}(i)}$  und  $\gamma_{21_k}^{(i)}$  die Sekantenmoduln  $E_{\perp s_k}^{(i+1)}$  und  $G_{\perp ll s_k}^{(i+1)}$  für den (i+1)-ten Rechengang auf folgende Weise: Im  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagramm bzw.  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$ -Diagramm greift man die zu  $\varepsilon_{2,1_k}^{\text{comb}(i)}$  bzw.  $\gamma_{21_k}^{(i)}$  gehörenden Spannungen ab und benutzt diese zusammen mit  $\varepsilon_{2,1_k}^{\text{comb}(i)}$  bzw.  $\gamma_{21_k}^{(i)}$  zur Berechnung von  $E_{\perp s_k}^{(i+1)}$  und  $G_{\perp ll s_k}^{(i+1)}$ .

In Wirklichkeit führen die Zusammenhänge zwischen Mikroschädigung und Sekantenmoduln zu etwas komplizierteren Beziehungen als den bisher dargestellten. Verformungsmessungen bei  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Kombinationen haben gezeigt, dass  $\sigma_2$  auch einen Einfluss auf das  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$ -Diagramm ausübt und umgekehrt auch  $\tau_{21}$  das  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagramm etwas beeinflusst

fluence of  $\sigma_1$  on  $\sigma_2$  would be neglected, see Equation (91a) and Figure 27b.

On hand of the abbreviated formulation by introducing the so called “combined strain”  $\varepsilon_{2,1}^{\text{comb}}$  in Equation (91c) it becomes obvious that the stress  $\sigma_2$  occurring simultaneously with  $\sigma_1$  can formally be calculated as for a uniaxial  $\sigma_2$  stress state by means of Hooke’s law  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ , however using  $\varepsilon_{2,1}^{\text{comb}}$  instead of  $\varepsilon_2$ . If a uniaxial  $\sigma_2$  stress state would result in a strain of the magnitude  $\varepsilon_{2,1}^{\text{comb}}$ , the stress  $\sigma_2$  would correspond to the one which is reached in the laminate analysis for the combination of  $\varepsilon_2$  and  $\varepsilon_1$ .

In most cases the stress-strain curve gained from a uniaxial test is expressed analytically by a relationship  $\sigma_2 = F_\sigma(\varepsilon_2)$ . In case of the biaxial  $(\sigma_1, \sigma_2)$  stress state the stress  $\sigma_2$  can be calculated from  $\sigma_2 = F_\sigma(\varepsilon_{2,1}^{\text{comb}})$ . Thus the secant modulus  $E_{\perp s}$  follows from  $E_{\perp s}(\sigma_2) = \sigma_2 / \varepsilon_{2,1}^{\text{comb}}$ . This procedure is based on the assumption, that the modulus reduction from  $E_{\perp}$  to  $E_{\perp s}$  depends solely on the stress  $\sigma_2$ , irrespective of how the stress  $\sigma_2$  is achieved, whether e.g. by a uniaxial or a biaxial state of stress.

In order to determine  $E_{\perp s}$  for the next iteration step one makes also use of the procedure B) which was recognized on hand of  $G_{\perp ll s}$  as being favourable. More generalized this procedure can be described as follows:

If in the iteration step i the strains  $\varepsilon_{1_k}^{(i)}$  and  $\varepsilon_{2_k}^{(i)}$  as well as the shear strain  $\gamma_{21_k}^{(i)}$  were calculated for a lamina k, then the secant moduli  $E_{\perp s_k}^{(i+1)}$  and  $G_{\perp ll s_k}^{(i+1)}$  for the iteration i+1 are determined by means of  $\varepsilon_{2,1_k}^{\text{comb}(i)}$  and  $\gamma_{21_k}^{(i)}$  in the following way: From the  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$  curve or from the  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$  curve one picks the stresses belonging to  $\varepsilon_{2,1_k}^{\text{comb}(i)}$  or  $\gamma_{21_k}^{(i)}$  respectively and calculates  $E_{\perp s_k}^{(i+1)}$  and  $G_{\perp ll s_k}^{(i+1)}$  from the picked stresses and  $\varepsilon_{2,1_k}^{\text{comb}(i)}$  or  $\gamma_{21_k}^{(i)}$  respectively.

In reality the correlations between microdamage and secant moduli lead to more complicated relations than those shown above. Deformation measurements on laminae under  $(\sigma_2, \tau_{21})$  stress combinations revealed that  $\sigma_2$  has also an influence on the  $(\tau_{21}, \gamma_{21})$  curve and that on the other hand  $\tau_{21}$  does influence the  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$  curve [Puc96a, Puc98]. In a recent paper

[Puc96a; Puc98]. In einer neueren Arbeit [Puc07] sind diese Zusammenhänge mit einem einfachen, physikalisch begründeten Rechenmodell erfassbar gemacht worden. Dessen Grundgedanke besteht darin, dass nicht nur die „vorherrschende“ Spannung  $\sigma_2$  bzw.  $\tau_{21}$  für den Sekantenmodul  $E_{\perp s}$  bzw.  $G_{\perp \| s}$  maßgebend ist, sondern dass auch die anderen bei einer kombinierten Beanspruchung auftretenden Spannungen, so auch  $\sigma_1$ , mit den von ihnen ausgehenden Mikroschädigungen einen gewissen Einfluss auf das jeweilige Spannungs-Dehnungs-Diagramm ausüben. Auf dieser Grundlage werden die Sekantenmoduln  $E_{\perp s}$  und  $G_{\perp \| s}$  direkt aus einer Funktion der von  $\sigma_2$ ,  $\tau_{21}$  und  $\sigma_1$  gemeinsam hervorgerufenen ZFB-Anstrengung  $f_E$  (siehe Gleichungen (45) bis (47)) berechnet [Puc07].

### 5.2.3 Kontinuierliche Modulabminderung (Degradation) nach dem ZFB

Wenn für eine Schicht die Bruchbedingung für ZFB erfüllt ist, muss geprüft werden, ob die auf den entstehenden faserparallelen Bruchebenen herrschende Normalspannung  $\sigma_n$  eine Quer-Zug- oder eine Quer-Druckspannung ist. Bei einer UD-Schicht, die unter ebener  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung steht, genügt es zu prüfen, ob  $\sigma_2 > 0$  oder  $\sigma_2 < 0$  ist, siehe Gleichung (95). Beide Fälle werden im Folgenden behandelt.

*$\sigma_2 > 0$  in der vom ZFB betroffenen Schicht (Modus A)*

Im Falle  $\sigma_2 \geq 0$  entstehen in der vom ZFB betroffenen Schicht bei Steigerung der Belastung mehr und mehr senkrecht zur Schichtebene verlaufende Risse, bis unter Umständen die Schicht mit Rissen „gesättigt“ ist, das heißt der kleinste Rissabstand erreicht ist. Die mitttragende Wirkung der betroffenen Schicht verringert sich durch die sich öffnenden Risse, die für die weitere Rechnung als „verschmiert“ betrachtet werden. Dies geschieht, indem man für die Berechnung der Verzerrungen des Laminates oberhalb der ZFB-Grenze einer UD-Schicht für die vom ZFB betroffene Schicht Elastizitätsgrößen  $E_{\perp sk}$ ,  $G_{\perp \| sk}$ ,  $\nu_{\perp \| k}$  benutzt, die mit einem Faktor  $\eta$  gegenüber den beim Erreichen der ZFB-Grenze vorhandenen Werten  $E_{\perp sk}^*$ ,  $G_{\perp \| sk}^*$ ,  $\nu_{\perp \| k}^*$  abgemindert werden. Die Werte fallen von den an der ZFB-Grenze erreichten Werten zunächst steil ab, um sich dann asymptotisch an einen Restwert anzunähern, der dem Sättigungszustand zugeordnet ist, siehe Bild 28.

In den ursprünglichen Arbeiten über den Einfluss von ZFB auf die Steifigkeiten wurden alle drei Elastizitätsgrößen im gleichen Maße mit einem Faktor  $\eta_k$  abgemindert:

[Puc07] a computational approach has been presented to take these effects into account by means of a simple physically based model. The fundamental idea of this model is that not only the dominating stress  $\sigma_2$  or  $\tau_{21}$  is relevant for the secant modulus  $E_{\perp s}$  and  $G_{\perp \| s}$  respectively, but that also the other stresses which are present in a combined stress state, such as also  $\sigma_1$ , affect the stress-strain curve due to their contribution to the microdamage in the composite. Based on this idea the secant moduli  $E_{\perp s}$  and  $G_{\perp \| s}$  are directly calculated from a mathematical function of the IFF-stress exposure  $f_E$  (see Equations (45) to (47)) which is caused by the combined action of  $\sigma_2$ ,  $\tau_{21}$  and  $\sigma_1$  [Puc07].

### 5.2.3 Continuous modulus reduction (degradation) after IFF

If the fracture condition for IFF is satisfied for a lamina, it will be necessary to check whether the normal stress  $\sigma_n$  acting in the ensuing parallel-to-fibre fracture plane is a transverse tensile or a transverse compressive stress. In the case of a UD lamina which is under two-dimensional  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$  stress it will suffice to check whether  $\sigma_2 > 0$  or  $\sigma_2 < 0$  (see Equation (95)). Both cases will now be examined.

*$\sigma_2 > 0$  in the lamina affected by IFF (mode A)*

In the case where  $\sigma_2 \geq 0$ , as the load increases there arise more and more cracks running transverse to the lamina plane until under certain circumstances a situation occurs where the lamina is “saturated” with cracks – in other words, the smallest spacing between cracks has been reached. The contribution the affected lamina makes to load-bearing is reduced by these opening cracks which for the purpose of further analysis may be regarded as “smeared”. For calculating the strains of the laminate above the IFF limit of a UD lamina, this is done by using the elasticity values  $E_{\perp sk}$ ,  $G_{\perp \| sk}$ ,  $\nu_{\perp \| k}$  for the lamina affected by IFF, reducing them by a factor  $\eta$  compared to the values  $E_{\perp sk}^*$ ,  $G_{\perp \| sk}^*$ ,  $\nu_{\perp \| k}^*$  which are valid when the IFF limit is reached. Initially the values fall steeply from the values reached at the IFF limit to approach asymptotically a residual value which corresponds to the saturation state (Figure 28).

In the original papers on the influence of IFF on the stiffness all three elasticity values have been reduced by the same amount with a factor  $\eta_k$ :

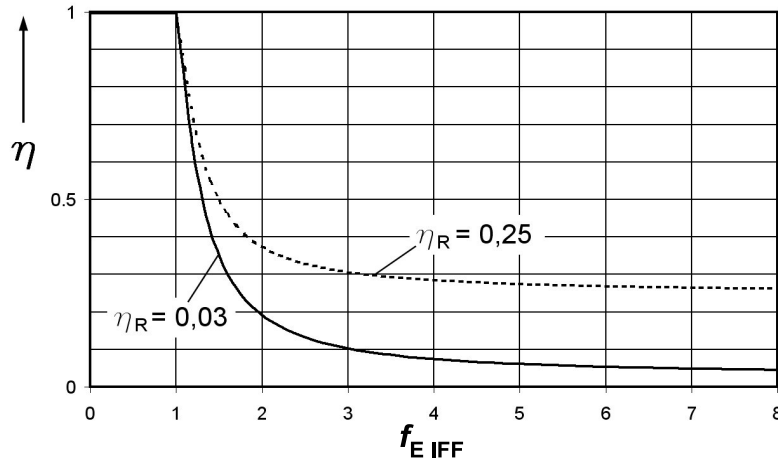


Bild 28. Abminderungsfaktor  $\eta$  nach Gleichung (93) in Abhängigkeit von der errechneten Anstrengung  $f_{EIFF}$  oberhalb der ZFB-Grenze

Als Parameter ist  $\eta_R$  angegeben, dessen Wert die Reststeifigkeit repräsentiert.

Figure 28. Reduction factor  $\eta$  in accordance with Equation (93) as a function of the calculated stress exposure  $f_{EIFF}$  above the IFF limit

$\eta_R$  is given as a parameter whose value represents residual stiffness.

$$E_{\perp sk} = \eta_k E_{\perp sk}^*; G_{\perp\parallel sk} = \eta_k G_{\perp\parallel sk}^*; v_{\perp\parallel k} = \eta_k v_{\perp\parallel k}^* \quad (92)$$

$$E_{\perp sk} = \eta_k E_{\perp sk}^*; G_{\perp\parallel sk} = \eta_k G_{\perp\parallel sk}^*; v_{\perp\parallel k} = \eta_k v_{\perp\parallel k}^* \quad (92)$$

$E_{\perp sk}^*, G_{\perp\parallel sk}^*, v_{\perp\parallel k}^*$  sind die beim Erreichen der ZFB-Grenze gültigen Werte.

$E_{\perp sk}^*, G_{\perp\parallel sk}^*, v_{\perp\parallel k}^*$  are the values which apply when the IFF limit is reached.

Für den Abminderungsfaktor ist die folgende empirische Beziehung empfohlen worden [Puc96a]:

The following empirical relationship is recommended for the reduction factor [Puc96a]:

$$\eta_k = \frac{1 - \eta_{Rk}}{1 + a_k(f_{EIFF_k} - 1)^{\zeta_k}} + \eta_{Rk} \text{ für } f_{EIFF_k} > 1 \quad (93)$$

$$\eta_k = \frac{1 - \eta_{Rk}}{1 + a_k(f_{EIFF_k} - 1)^{\zeta_k}} + \eta_{Rk} \text{ for } f_{EIFF_k} > 1 \quad (93)$$

Darin ist  $\eta_{Rk}$  der Restwert von  $\eta_k$ , dem sich  $\eta_k$  bei Sättigung mit Rissen asymptotisch nähert. Der Abminderungsfaktor  $\eta_k$  wird in Gleichung (93) vom Grad der Überschreitung der ZFB-Grenze

Here  $\eta_{Rk}$  is the residual value of  $\eta_k$  which  $\eta_k$  asymptotically approaches at saturation with cracks. The reduction factor  $\eta_k$  in Equation (93) is made dependent on the degree to which the IFF limit is exceeded.

$$f_{EIFF_k} - 1 \quad (94)$$

$$f_{EIFF_k} - 1 \quad (94)$$

abhängig gemacht, weil die ZFB-Anstrengung diejenige Größe ist, die das Zusammenwirken der verschiedenen Spannungen  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  beim Zustandekommen des ZFB erfasst.

The IFF-stress exposure  $f_{EIFF}$  is used for this purpose, since this expression is the only one which describes quantitatively the interaction of the different stresses producing the IFF.

Der tatsächliche Verlauf von  $\eta$  über  $(f_{EIFF} - 1)$  kann nur experimentell ermittelt werden. Bisher vorliegende Erfahrungen [Kno03; Kno06] zeigen, dass ein Wert  $\zeta = 1,3$  in Betracht kommt (bei konstantem Faktor  $a = 5$ ).

The actual course of  $\eta$  plotted against  $(f_{EIFF} - 1)$  can only be determined by experiment. Existing findings [Kno03; Kno06] indicate that a value of  $\zeta = 1,3$  can be considered (with a constant factor of  $a = 5$ ).

In [Puc96a] wurden  $E_{\perp s}, G_{\perp\parallel s}$  und  $v_{\perp\parallel}$  noch mit einem gleich hohen  $\eta$ -Wert abgemindert. Neuere Forschungsergebnisse [Kno03; Kno06] legen jedoch nahe,  $G_{\perp\parallel s}$  geringer abzumindern als  $E_{\perp s}$ . Dies kann z.B. dadurch geschehen, dass bei  $E_{\perp s}$  ein Wert  $\eta_R = 0,03$  gewählt wird, für  $G_{\perp\parallel s}$  aber  $\eta_R = 0,25$  bei GFK und bei CFK sogar  $\eta_R = 0,6$ . Eine ausführliche Darstellung dieser Zusammenhänge findet sich in [Kno07].

In [Puc96a]  $E_{\perp s}, G_{\perp\parallel s}$  and  $v_{\perp\parallel}$  were still reduced by the same value for  $\eta$ . Results of more recent research [Kno03; Kno06] do, however, suggest that  $G_{\perp\parallel s}$  should be reduced less than  $E_{\perp s}$ . This can be done, for example, by selecting a value of  $\eta_R = 0,03$  for  $E_{\perp s}$  but for  $G_{\perp\parallel s}$  selecting a value of  $\eta_R = 0,25$  in the case of glass-fibre-reinforced plastic and even  $\eta_R = 0,6$  for carbon-fibre-reinforced plastic. A detailed treatment of this topic may be found in [Kno07].



Die zur Berechnung der „Überanstrengung“ ( $f_{E_{\text{IFF}_k}-1}$ ) benötigte Anstrengung  $f_{E_{\text{IFF}_k}}$  oberhalb der ZFB-Grenze wird mit den beim Erreichen der ZFB-Grenze vorhandenen Werten für  $E_{\perp sk}^*$ ,  $G_{\perp \| sk}^*$ ,  $v_{\perp \| k}^*$  berechnet. Diese werden für die Berechnung der für die ZFB-Anstrengung maßgebenden Spannungen oberhalb der ZFB-Grenze konstant gehalten. Die errechnete fiktive Überanstrengung ( $f_{E_{\text{IFF}_k}-1}$ ) wird auf diese Weise ein Maß für den Grad der Überschreitung der ZFB-Grenze. Je größer sie ist, desto höher ist die Rissdichte der  $k$ -ten Schicht.

Die abgeminderten Werte nach Gleichung (92) werden nur benötigt, um die durch zunehmende Rissdichte (geringfügig) vergrößerten Dehnungen und Schubverformungen des Laminates zu bestimmen. Dies ist für eine ganz korrekte Berechnung der für den FB maßgebenden Spannungen  $\sigma_1$  aller Schichten erforderlich.

Allerdings gibt es Laminare, deren Dehnungen und Schubverformungen so sehr vom „Fasergestüt“ dominiert sind, dass auf das Rechnen mit abgeminderten Moduln verzichtet werden kann (siehe Abschnitt 5.2.5).

$\sigma_2 < 0$  in der vom ZFB betroffenen Schicht  
(Modus B und Modus C)

Nach einem ZFB werden bei  $\sigma_2 < 0$  über die aufeinandergepressten Rissufer auch weiterhin Quer-Druckspannungen übertragen. Dies gilt auch, wenn sich bei Spannungsverhältnissen  $|\sigma_2/\tau_{21}| > R_{\perp\perp}^A/|\tau_{21c}|$  (siehe Bild 14) „schräge“ Risse einstellen, die gegenüber der Dickenrichtung um einen Winkel  $\theta_{\text{fp}}$  geneigt sind, siehe Bild 16. Mit zunehmendem Verhältnis  $|\sigma_2/\tau_{21}|$  vergrößert sich der Winkel  $\theta_{\text{fp}}$ . Bei reiner Quer-Druckbeanspruchung stellen sich Werte von  $\pm 50^\circ$  bis  $\pm 55^\circ$  ein. Die Normalspannung  $\sigma_n$  auf der Bruchebene bleibt aber bei  $\sigma_2 < 0$  stets eine Druckspannung, denn es gilt

$$\sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \theta_{\text{fp}} \quad (95)$$

Bei der Verformungsanalyse des Laminates oberhalb der ZFB-Grenze wird dieser Situation dadurch Rechnung getragen, dass auch nach dem Eintritt des ZFB ebenso wie vorher mit dem Sekantenmodul  $E_{\perp s}$  gerechnet wird, der dem  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Spannungs-Stauchungs-Diagramm entnommen wird. Dazu muss das an der „isolierten UD-Schicht“ ermittelte  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagramm unter Umständen etwas über seinen Endpunkt hinaus verlängert werden. Auch  $v_{\perp \|}^*$  wird in diesem Fall ( $\sigma_n > 0$ ) nicht mit  $\eta$  abgemindert.

Unter der Wirkung von Schubspannungen  $\tau_{21}$  können sich die Rissufer trotz einer von der Druckspannung  $\sigma_n$  hervorgerufenen Reibung örtlich etwas gegeneinander verschieben. Für die Verformungsanalyse er-

The stress exposure  $f_{E_{\text{IFF}_k}}$  above the IFF limit which is required for calculating the “excessive stress exposure” ( $f_{E_{\text{IFF}_k}-1}$ ) is calculated using the values for  $E_{\perp sk}^*$ ,  $G_{\perp \| sk}^*$ ,  $v_{\perp \| k}^*$  which are valid when the IFF limit is reached. These are kept constant for calculating the stresses beyond the IFF limit which are decisive for IFF stress exposure. In this way, the calculated fictive excessive stress exposure ( $f_{E_{\text{IFF}_k}-1}$ ) becomes a measure of the degree to which the IFF limit is exceeded. The greater it is, the higher will be the crack density in the  $k^{\text{th}}$  lamina.

The reduced values according to Equation (92) are only needed for determining the elongations and shear strains of the laminate which are (slightly) increased by the increasing crack density. This is required for an absolutely correct calculation of the stresses  $\sigma_1$  in all laminae which decisively influence the FF.

There are, however, laminates whose elongations and shear strains are so greatly dominated by the “fibre structure” that in analysis it is possible to dispense with reduced moduli (see Section 5.2.5).

$\sigma_2 < 0$  in the lamina affected by IFF  
(mode B and mode C)

Following an IFF when  $\sigma_2 < 0$ , transverse compressive stresses will continue to be transmitted by the pressed-together crack sides. This also applies when under stress ratios of  $|\sigma_2/\tau_{21}| > R_{\perp\perp}^A/|\tau_{21c}|$  (see Figure 14), “oblique” cracks arise which are inclined at an angle of  $\theta_{\text{fp}}$  to the thickness direction (see Figure 16). As the  $|\sigma_2/\tau_{21}|$  ratio increases, so does the angle  $\theta_{\text{fp}}$  increase. With purely transverse compressive stress, values from  $\pm 50^\circ$  to  $\pm 55^\circ$  are found. However, when  $\sigma_2 < 0$ , the normal stress  $\sigma_n$  on the fracture plane will always remain a compressive stress because of

$$\sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \theta_{\text{fp}} \quad (95)$$

Account is taken of this situation in the deformation analysis of the laminate above the IFF limit by the fact that even after occurrence of the IFF the secant modulus  $E_{\perp s}$  will still be used for calculation as previously, being taken from the  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -compression stress-strain diagram. In addition, under certain circumstances the  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -diagram obtained for the “isolated UD lamina” may need to be extrapolated beyond its end point. In the case  $\sigma_n > 0$  even  $v_{\perp \|}^*$  will not be reduced by  $\eta$ .

As a consequence of shear stresses  $\tau_{21}$  the crack sides may shift locally somewhat with respect to each other despite the friction arising from the compressive stress  $\sigma_n$ . As far as strain analysis is concerned, a cer-

scheint deshalb eine gewisse Abminderung von  $G_{\perp\parallel s}^*$  oberhalb der ZFB-Grenze gerechtfertigt. Die Abminderung von  $G_{\perp\parallel s}^*$  mit  $\eta$  hat in der Regel keinen starken Einfluss auf die Verzerrungen des Laminates, weshalb man einfacherweise  $\eta$  für die Abminderung von  $G_{\perp\parallel s}^*$  ebenso berechnen kann wie bei  $\sigma_2 > 0$ .

Infolge der alleinigen  $\eta$ -Abminderung von  $G_{\perp\parallel s}^*$  vergrößert sich mit zunehmender Überschreitung der ZFB-Grenze das Spannungsverhältnis  $|\sigma_2/\tau_{21}|$ . Das bedeutet, dass bei höheren Lasten entstehende Risse einen größeren Bruchwinkel  $\theta_{fp}$  aufweisen als jene, die bald nach Überschreiten der ZFB-Grenze entstanden sind [Puc02b]. Unter der Annahme, dass die „Parameterkopplung“  $p_{\perp\perp}^c/R_{\perp\perp}^A = p_{\perp\parallel}^c/R_{\perp\parallel}$  benutzt werden darf, gilt folgende Beziehung für den Bruchwinkel [Puc02b]:

$$\cos \theta_{fp} = \sqrt{\frac{1}{2(1 + p_{\perp\perp}^c)} \left[ \left( \frac{R_{\perp\perp}^A}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\tau_{21}}{\sigma_2} \right)^2 + 1 \right]} \quad (96)$$

Große Bruchwinkel  $\theta_{fp}$  in relativ dicken Schichten bei hohen Querdruckspannungen  $\sigma_2$  sind gefährlich, weil sie eine Sprengwirkung auf ihre Nachbarschichten ausüben. Diese ist eine Folge der Keilwirkung, die entsteht, wenn unter der Wirkung der Druckspannung  $\sigma_2$  die schrägen Bruchebenen aufeinander abgleiten [Puc98]. Durch diese Sprengwirkung können örtliche Delaminationen entstehen, und es ergibt sich die Gefahr des Knickens oder Beulens angrenzender Schichten. Ein ZFB, der überwiegend unter der Wirkung von  $\sigma_2 < 0$  entsteht, wobei  $|\sigma_2| > |\tau_{21}|$  ist, kann deshalb unter gewissen Umständen bereits den Totalbruch des Laminates einleiten. Hierüber wird für eine Torsionsfeder in [Gar93; Puc02b] berichtet.

Bei Laminaten, die beanspruchungsgerecht für mehrere Lastfälle ausgelegt sind und dementsprechend drei oder vier Faserrichtungen enthalten, sind ZFB vom Modus C bei quasistatischer Belastung selten. Die Möglichkeit des Auftretens von ZFB (Mode C) muss aber rechnerisch abgeklärt werden. Rechenergebnisse von Festigkeitsanalysen, die oberhalb eines solchen „keilförmigen“ ZFB liegen, bedürfen einer gründlichen, unter Umständen auch experimentellen Abklärung.

Wenn sich bei  $\sigma_2 < 0$  Anstrengungswerte  $f_{E\text{IFF}} > 1,5$  ergeben, kann es nötig werden, auf eine verfeinerte Betrachtungsweise überzugehen [Puc02b]. Bei dieser werden die Spannungen  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  für die Bestimmung der ZFB-Anstrengung mit den durch unterschiedliche  $\eta$ -Werte abgeminderten Sekantenmodul berechnet, und auch die Entwicklung der Bruchwinkel  $\theta_{fp}$  wird betrachtet. Anders als bei der bisher beschriebenen Vorgehensweise wird die ZFB-Anstrengung dann aus Spannungen  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  ermittelt, die

tain reduction in  $G_{\perp\parallel s}^*$  above the IFF limit seems justified. As a rule the reduction in  $G_{\perp\parallel s}^*$  does not have a marked influence on the strains of the laminate which is why  $\eta$  can be used for the sake of simplicity for the reduction in  $G_{\perp\parallel s}^*$  just as when  $\sigma_2 > 0$ .

As a consequence of the solitary  $\eta$  reduction of  $G_{\perp\parallel s}^*$  the stress ratio  $|\sigma_2/\tau_{21}|$  increases as the IFF limit is further exceeded. What this means is that cracks appearing at higher loads have a larger angle  $\theta_{fp}$  of the fracture plane than those which appear shortly after the IFF limit is crossed [Puc02b]. Assuming that the “parameter coupling”  $p_{\perp\perp}^c/R_{\perp\perp}^A = p_{\perp\parallel}^c/R_{\perp\parallel}$  holds, the following relationship is valid for the angle of the fracture plane [Puc02b]:

$$\cos \theta_{fp} = \sqrt{\frac{1}{2(1 + p_{\perp\perp}^c)} \left[ \left( \frac{R_{\perp\perp}^A}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\tau_{21}}{\sigma_2} \right)^2 + 1 \right]} \quad (96)$$

Large fracture plane angles  $\theta_{fp}$  in relatively thick laminae with high transverse compressive stresses  $\sigma_2$  are dangerous because they have an “explosion effect” on the laminae to which they are adjacent. This is a consequence of the wedge effect which arises when the inclined action-planes slip over each other as the result of the compressive stress  $\sigma_2$  [Puc98]. This wedge effect may bring about local delamination which may also lead to a danger of collapsing or buckling of neighbouring laminae. An IFF which arises predominantly from the effect of  $\sigma_2 < 0$ , when  $|\sigma_2| > |\tau_{21}|$ , may therefore, under certain circumstances, lead to total failure of the laminate. This is reported for a torsional spring in [Gar93; Puc02b].

IFFs of Mode C under quasistatic loading are seldom found with laminates which have been designed to cope with several loading cases appropriate to the stresses they will encounter and which therefore contain three or four different fibre orientations. However the possibility of IFF (Mode C) occurring must be clarified analytically. The results of strength analyses which lie above a “wedge-shaped” IFF of this kind will require thorough examination, and under certain circumstances experimental clarification may even be needed.

If in case of  $\sigma_2 < 0$  exertions  $f_{E\text{IFF}} > 1,5$  are obtained by the method described, it may become necessary to change to a more sophisticated approach [Puc02b]. Here the stresses  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  for determining the IFF stress exposure are calculated using the secant moduli which have been reduced by different  $\eta$  values, and even the development of the angle of the fracture plane  $\theta_{fp}$  is taken into consideration. Unlike the procedure previously described, the IFF stress exposure is then determined from stresses  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  which are

sich mit abgeminderten Moduln errechnen. Bei der Druckspannung  $\sigma_2$  macht sich nur eine geringe Abminderung von  $E_{\perp s}$  bemerkbar, die sich aus dem Fortschreiten auf dem nötigenfalls extrapolierten  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Spannungs-Stauchungs-Diagramm ergibt. Hingegen wird  $G_{\perp\parallel s}^*$  bei der Laststeigerung rapide mit einem Faktor  $\eta$  abgemindert. Dabei wird  $\eta$  durch Iteration so bestimmt, dass sich aus den mit  $E_{\perp s}$  und  $\eta \cdot G_{\perp\parallel s}^*$  bestimmten Spannungen eine Anstrengung  $f_{E\text{IFF}}$  errechnet, die konstant beim Wert  $f_{E\text{IFF}} = 1$  verharrt, siehe [Puc02b].

#### 5.2.4 Auswirkung von FB

Wenn bei der Belastungssteigerung zum ersten Mal in einer Schicht des Laminates die FB-Bedingung  $f_{E\text{IFF}_k} = 1$  erfüllt ist, sollte man die *erreichte Belastung als Bruchbelastung des Laminates betrachten*, obwohl bei einem Laminat mit mehr als drei Faserorientungen auch der FB in *einer* Schicht unter Umständen noch nicht zur totalen Erschöpfung der Tragfähigkeit des Laminates führt. Man kann sich ein Bild von einer eventuell noch vorhandenen Resttragfähigkeit machen, wenn man nach Eintritt eines FB alle Steifigkeiten der betroffenen Schicht zu Null setzt, ihre geometrischen Abmessungen aber beibehält, und die Belastung des Laminates rechnerisch so lange steigert, bis keine Laststeigerung mehr möglich ist.

#### 5.2.5 Vereinfachungen und selektive Nachprüfungen

Bei einem Laminat, in dem die Kräfte zum weit überwiegenden Teil durch die Fasern aufgenommen werden, haben die Spannungen  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  nur einen geringen Einfluss auf seine Verzerrungen. Dies gilt besonders für Laminates aus CFK. Deshalb ändert auch eine  $\eta$ -Abminderung der Größen  $E_{\perp sk}^*$ ,  $G_{\perp\parallel sk}^*$ ,  $\nu_{\perp\parallel k}^*$  wenig an den Verzerrungen des Laminates. Das heißt, dass auch *bei Verzicht auf die Steifigkeitsabminderung* nach Eintritt von ZFB die Verzerrungen des Laminates und damit der jeweiligen Schicht in guter Näherung errechnet werden. Sinnvollerweise rechnet man in diesem Fall mit konstanten Moduln  $\overline{E}_{\perp}$ ,  $\overline{G}_{\perp\parallel}$ , die sich als Mittelwert aus dem Modul beim Belastungsbeginn und dem Sekantenmodul beim Erreichen der jeweiligen Festigkeit  $R_{\perp}^c$ ,  $R_{\perp\parallel}$  infolge einachsiger  $\sigma_2$ - bzw. reiner  $\tau_{21}$ -Beanspruchung ergeben. **Man braucht bei Anwendung dieser linearisierten Rechnung die Belastung des Laminates nicht in Stufen aufzubringen, sondern kann für eine zu Grunde gelegte Belastung direkt die Anstrengungen  $f_{E\text{IFF}_k}$  und  $f_{E\text{FF}_k}$  für ZFB bzw. FB für alle  $k = (1 \text{ bis } n)$  Schichten errechnen [Puc96a].**

obtained using the reduced moduli. In the case of the compressive stress  $\sigma_2$  only a minor reduction in  $E_{\perp s}$  becomes noticeable, which arises from progressing in the  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -compression-strain diagram which is extrapolated where necessary. On the other hand,  $G_{\perp\parallel s}^*$  is rapidly reduced by a factor of  $\eta$  as the load increases. Here  $\eta$  is determined by iteration such that a stress exposure  $f_{E\text{IFF}}$  is calculated using the stresses obtained with  $E_{\perp s}$  and  $\eta \cdot G_{\perp\parallel s}^*$  which remains constant at  $f_{E\text{IFF}} = 1$  (see [Puc02b]).

#### 5.2.4 Effect of FF

When, as the loading increases, the FF condition  $f_{E\text{IFF}_k} = 1$  is satisfied for the first time in one lamina of the laminate, the *loading reached at that point should be regarded as the fracture loading for the laminate* although when a laminate has more than three fibre orientations even FF in *one* lamina may under certain circumstances not yet lead to total exhaustion of the load-bearing capacity of the laminate. It is possible to get an idea of a residual load-bearing capacity which may still be present after a FF occurs by setting all stiffness values of the affected lamina to zero but retaining the geometrical dimensions. The loading on the laminate is then increased in the calculation to the point where no further increase in loading is possible.

#### 5.2.5 Simplifications and selective reviews

In a laminate where very much the greater part of the loads is taken up by the fibres, the stresses  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  will only have a minor influence on its strains. This applies particularly to laminates made of CFRP. For this reason, even an  $\eta$  reduction in the variables  $E_{\perp sk}^*$ ,  $G_{\perp\parallel sk}^*$ ,  $\nu_{\perp\parallel k}^*$  will bring about little change in the laminate strains. This means that even *if stiffness reduction is not implemented* after occurrence of IFF the strains in the laminate and thus in the lamina in question will still be calculated with a good degree of approximation. It appears reasonable in this case to calculate with constant moduli  $\overline{E}_{\perp}$ ,  $\overline{G}_{\perp\parallel}$ , these being obtained as mean values from the modulus at the start of loading and from the secant modulus at lamina fracture stresses ( $R_{\perp}^c$ ,  $R_{\perp\parallel}$ ) resulting from uniaxial  $\sigma_2$  loading or pure  $\tau_{21}$  loading. **With this linearized form of calculation, it is not necessary to apply the load on the laminate in increments but instead the stress exposures  $f_{E\text{IFF}_k}$  and  $f_{E\text{FF}_k}$  for IFF or FF can be calculated directly in one step for the loading in question for all  $k = (1 \text{ to } n)$  laminae [Puc96a].**

Im Zweifelsfall kann man nachträglich prüfen, ob die benutzte Näherung bei der Verformungsberechnung berechtigt war, indem man in einem zweiten Rechengang in Schichten, für die ZFB bei  $\sigma_2 > 0$  errechnet wurde,  $\overline{E}_\perp$  und  $\overline{G}_{\perp\parallel}$  auf etwa 1/10 des ursprünglichen Wertes herabsetzt. Wenn sich dadurch die Ergebnisse für die Verformungen des Laminates nicht wesentlich ändern, war die Näherung berechtigt.

Mit Hilfe des erhaltenen Überblicks lässt sich entscheiden, ob an bestimmten Stellen eine aufwändigere Nachprüfung erforderlich ist. Eine solche sollte auf jeden Fall durchgeführt werden, wenn in einer oder mehreren Schichten vor Erreichen des FB ein ZFB infolge überwiegender Druckspannung  $\sigma_2 < 0$ , das heißt ein keilförmiger ZFB (Modus C) auftritt und dabei  $f_{E\text{IFF}} > 1,5$  errechnet wurde.

### 5.2.6 Maßnahmen zur zielgerichteten Verbesserung von Laminaten

Für eine zielstrebige Änderung gelten die folgenden Regeln:

- Ergibt die Bruchanalyse einen „zu frühen“ FB einer Schicht, so ist die wirksamste Gegenmaßnahme eine Erhöhung der Fasermenge, das heißt der Dicke der betreffenden Schicht, wodurch deren Dehnung  $\varepsilon_{1k}$  und somit die faserparallele Spannung  $\sigma_{1k}$  herabgesetzt wird.
- Soll jedoch die ZFB-Grenze einer Schicht  $k$  heraufgesetzt werden, ist die Erhöhung der Dicke dieser Schicht normalerweise kein wirksames Mittel. Bedeutend wirkungsvoller ist es, zusätzliche Fasern unter etwa  $90^\circ$  zu den Fasern der betroffenen Schicht  $k$  anzuordnen, wenn  $\sigma_{2k}$  den überwiegenden Einfluss auf die ZFB-Anstrengung  $f_{E\text{IFF}_k}$  der  $k$ -ten Schicht hat. Zusätzliche Fasern in Richtungen unter etwa  $+45^\circ$  und  $-45^\circ$  zur Faserrichtung der betroffenen Schicht  $k$  sollte man vorsehen, wenn  $\tau_{21k}$  einen wesentlichen Einfluss auf  $f_{E\text{IFF}_k}$  hat. Man wird aber in der Regel keine zusätzlichen Schichten mit neuen Faserrichtungen einführen, sondern, wenn Schichten vorhanden sind, deren Fasern ungefähr in den in Frage kommenden Richtungen verlaufen, die Fasermenge in diesen Schichten erhöhen.

**Grundsätzlich erscheint eine Auslegung und Dimensionierung von Laminaten in tragenden Strukturen sinnvoll, bei der ZFB bis zur höchsten im normalen Betrieb auftretenden Last (im Aerospace-Bereich Design Limit Load genannt) vermieden werden und die gleichzeitig einen hinreichend großen Sicherheitsabstand gegenüber errechneten FB-Grenzen gewährleistet. Für Ex-**

In doubtful cases, it is possible to check afterwards to see whether the approximation for the calculation of the deformations used was justified by reducing  $\overline{E}_\perp$  and  $\overline{G}_{\perp\parallel}$  to about one-tenth of their original value in a second calculation operation in laminae where IFF was calculated when  $\sigma_2 > 0$ . If this does not result in any considerable changes in the laminate strains calculated, the approximation may be regarded as having been justified.

On the basis of the overview thus obtained, a decision can now be taken as to whether a more complex review is necessary for certain locations. A review of this kind should always be carried out when, as a consequence of a predominating compressive stress  $\sigma_2 < 0$ , an IFF occurs in one or more lamina before the FF is reached – in other words, a wedge-shaped IFF – and the stress exposure here calculated was  $f_{E\text{IFF}} > 1,5$ .

### 5.2.6 Making specific improvements in laminates

The following rules apply to making improvements with particular objectives in mind:

- Should fracture analysis indicate “premature” FF in a lamina, then the most effective countermeasure is to increase the amount of fibres – in other words, the thickness of the lamina in question – thereby reducing their strain  $\varepsilon_{1k}$  and thus the parallel-to-fibre stress  $\sigma_{1k}$ .
- However, if the IFF limit of a lamina  $k$  is to be raised, increasing the thickness of this lamina will not normally be an effective answer. Significantly more effective is to arrange additional fibres at an orientation angle of about  $90^\circ$  or so to the fibres of the lamina  $k$  in question if  $\sigma_{2k}$  exerts the predominantly influence on the IFF stress exposure  $f_{E\text{IFF}_k}$  of the  $k^{\text{th}}$  lamina. Additional fibres angled at about  $+45^\circ$  and  $-45^\circ$  or so to the fibre direction of the lamina in question  $k$  should be provided if  $\tau_{21k}$  has a major influence on  $f_{E\text{IFF}_k}$ . As a rule, however, the procedure will not be to introduce additional laminae with new fibre directions but instead, if there are laminae already present whose fibres run approximately in the directions under consideration, simply to increase the quantity of fibres in these laminae.

**Basically a design and dimensioning of laminates in load-bearing structures will be reasonable when the IFF can be avoided right up to the highest load encountered under normal operational conditions (in aerospace design this is termed the “design limit load”) and which simultaneously guarantees an adequate safety margin with respect to the FF limits calculated. For extreme load-**

**tremlastfälle mit sehr kleiner Eintrittswahrscheinlichkeit (z.B. Jahrhundertsturm) kann die ZFB-Grenze überschritten werden; es darf aber kein FB auftreten.**

### 5.3 Anwendung der schichtenweisen Bruchanalyse für verschiedene Beanspruchungsarten

Die bisherigen Ausführungen im Abschnitt 5.2 zur Voraussage des Laminat-Versagens mit Hilfe der schichtenweisen Bruchanalyse gelten zunächst nur für kurzzeitbeanspruchte Laminare. Im Folgenden wird erläutert, dass die Anwendung der schichtenweisen Bruchanalyse auch für ruhend und schwingend beanspruchte Laminare sehr empfehlenswert ist. Dabei wird die Methode der schichtenweisen Bruchanalyse für die gezielte Verbesserung des Laminates benutzt, jedoch ausdrücklich nicht für die direkte rechnerische Voraussage des Laminat-Versagens.

#### 5.3.1 Kurzzeitbeanspruchung

Wenn man in die ZFB-Bedingungen der UD-Schicht Festigkeitswerte einsetzt, die an „isolierten“ Schichten in Kurzzeitversuchen gemessen wurden, errechnet man mit der schichtenweisen Bruchanalyse ZFB-Grenzen, die zu niedrig sind. **Die im Laminat tatsächlich auftretenden können durchaus doppelt so hoch sein wie die errechneten [Puc02b]. Dies ist vor allem eine Folge des „In-situ-Effekts“ [Cam06].**

In den Abschnitten 5.5.1 und „Berechnungssoftware“ finden sich Hinweise auf ein spezielles Rechenprogramm für die schichtenweise Bruchanalyse mit kontinuierlicher Modulabminderung. Für eine grobe Abschätzung der ZFB- und FB-Grenzen des Laminates kann auch von dem in Abschnitt 5.2.5 beschriebenen Näherungsverfahren Gebrauch gemacht werden. Eingehendere Nachprüfungen sind jedoch unbedingt erforderlich, wenn die Rechenergebnisse auf die Gefahr einer Sprengwirkung infolge eines keilförmigen ZFB bei  $\sigma_2 < 0$  (siehe Abschnitt 5.2.3) hinweisen. In einem solchen Fall sollte versucht werden, die erkannte Gefahr durch eine Änderung des Laminataufbaus zu beseitigen. Wie kritisch ein solcher keilförmiger Bruch ist, hängt u.a. vom Schichtaufbau ab.

#### 5.3.2 Langzeitbeanspruchung

Die meisten FKV-Leichtbauteile erfahren im Betrieb eine ruhende und/oder schwingende *Langzeit*belastung. Häufig testet man in der Entwicklungsphase eines schwingend beanspruchten Bauteils seine grundsätzliche Gebrauchstüchtigkeit durch einen Einstufen-Schwingversuch mit einer relativ hohen Belastung. Anders als bei Kurzzeitbelastung konnte eine

**ing cases which have a very low probability of occurring (for example, storms of the century), the IFF limit may be exceeded – but in such a case no FF may be permitted to occur.**

### 5.3 Application of lamina-by-lamina fracture analysis for different types of loading

The information given in Section 5.2 regarding using lamina-by-lamina failure analysis to predict laminate failure applies at the moment only to laminates subject to short-term loads. In this section we shall demonstrate that the use of lamina-by-lamina fracture analysis is to be strongly recommended also for laminates under constant static load or laminates which are subject to alternating loads. Here the lamina-by-lamina fracture analysis method is used to achieve specific improvements in the laminate but not, it must be explicitly stated, for direct theoretical prediction of laminate failure.

#### 5.3.1 Short-term loading

If strength values obtained by measurement of “isolated” laminae during short-term tests are used in the IFF conditions of the UD lamina, calculation using lamina-by-lamina fracture analysis will yield IFF limits which are too low. **Those which actually occur in the laminat can perfectly well be twice as high as the theoretical ones [Puc02b]. This is above all a consequence of the “in situ effect“ [Cam06].**

Advises to a specialized calculation program for the lamina-by-lamina fracture analysis with continuous modulus reduction can be found in Section 5.5.1 and “Calculation Software”. In order to get a rough estimate of the IFF and FF limits of the laminate one can also make use for the approximative procedure described in Section 5.2.5. However, more detailed reviews will be absolutely essential when the results of analysis point to a risk of “explosion effects” occurring as the result of a wedge-shaped IFF when  $\sigma_2 < 0$  (see Section 5.2.3). In such a case, an attempt should be made to circumvent the danger thus detected by modifying the laminate structure. How critical a wedge-shaped fracture of this kind may be will depend, among other things, on the lamina lay up.

#### 5.3.2 Long-term loading

In operation most FRP lightweight components experience static and/or cyclic *long-term* loading. Frequently the basic serviceability is tested during the design phase of a cyclically loaded component by means of a constant-amplitude fatigue test with a relatively high loading. Unlike the situation with short-term loading, component design and dimen-

solche Bauteilauslegung und -dimensionierung bisher kaum durch eine schichtenweise Spannungs- und Bruchanalyse unterstützt werden. Dies ist darin begründet, dass die zur Anwendung der schichtenweisen Bruchanalyse notwendige Datenbasis für *Langzeit*belastung noch nicht vorhanden ist. Auch können einige Einflüsse mit ihr noch nicht erfasst werden. Sie kann daher für *Langzeit*belastung heute nicht im engeren Sinne als „genau“ angesehen werden.

Weil die bei der schichtenweisen Bruchanalyse benutzten Bruchbedingungen Flächen durch Punkte gemessener Festigkeiten im Spannungsraum darstellen, spricht grundsätzlich nichts dagegen, sie auch bei anderen als monoton bis zum Bruch gesteigerten Belastungen (Kurzzeitbelastung) anzuwenden, wenn die entsprechenden Langzeitfestigkeiten eingesetzt werden. Dies gilt auch für Bruchbedingungen mit physikalischem Hintergrund, wie die Gleichungen (45) bis (47), solange die Bruchmechanismen sich mit der Belastungsart nicht grundsätzlich ändern.

Um bei einer gegebenen statischen Langzeitbelastung (Kriechen) oder Schwingbelastung (Ermüdung) die jeweilige Lebensdauer bis zum Auftreten von FF oder IFF abzuschätzen, hat man in [Gar93] eine näherungsweise Berechnungsmethode vorgeschlagen. Dabei werden dieselben FB- und ZFB-Kriterien wie für Kurzzeitbelastung angewandt, jedoch unter Benutzung von Langzeitfestigkeiten. Dies gründet sich auf die folgende Überlegung: In beanspruchungsgerecht ausgelegten Laminaten mit mehr als zwei Faserrichtungen werden die *Verzerrungen*  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  vor allem von den *Dehnungen der tragenden Fasern bestimmt*, die sich wegen des im Vergleich zum Modul der Matrix sehr viel höheren Fasermoduls durch kriechbedingte Spannungsumlagerungen nicht nennenswert ändern. Das bedeutet, dass beim ebenen  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand einer Schicht in einem Laminat unter ruhender oder schwingender Einstufen-Langzeitbelastung die Verzerrungen  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\gamma_{21}$  der Schichten annähernd konstant bleiben. Hingegen werden die matrixdominierten Spannungen  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  durch Relaxationsvorgänge und vor allem durch Mikroschädigungen im Laufe der Zeit stark abnehmen. Deshalb werden für die Abschätzung der Langzeitfestigkeit gegen ZFB einer UD-Schicht *im Laminat* Zeitstandfestigkeiten oder Schwingfestigkeiten bei  $\sigma_{\perp}$ - und  $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung (Bild 10) benötigt, die nicht bei konstanter Spannung sondern bei konstanter Dehnung  $\varepsilon_{\perp}$  bzw. Schiebung  $\gamma_{\perp\parallel}$  ermittelt werden.

#### Näherungsweise Vorhersage des ZFB

Da es aussichtslos erscheint, das „Weglaufen“ der matrixdominierten Spannungen  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  bei

tioning of this kind has hardly enjoyed any support whatsoever from lamina-based stress and fracture analysis. The reason for this is that the database for *long-term* loading which is necessary for the application of lamina-by-lamina fracture analysis is not yet available. There are also some influences which it cannot yet cover either. For this reason it cannot at present be regarded as strictly “precise” in the case of long-term loading.

But since the fracture conditions used in lamina-based fracture analysis, are represented by fracture envelopes through points of measured strengths in the stress space, there is basically nothing against using them even with loads other than monotonous loading increased up to the point of fracture (short-term loading), if long term strengths are inserted. This also applies to fracture conditions with a physical background such as Equations (45) to (47), provided the fracture mechanisms do not fundamentally change with the type of loading.

For this reason an approximate analytical method is suggested in [Gar93] for calculating the length of operational life before FF or IFF occurs under a given static long-term loading (creeping) or cyclic loading (fatigue). Here the same FF and IFF criteria are used as for short-term loading, however using long term strengths. The basis for this is the observation that laminates which have been correctly designed using more than two different fibre orientations for the loads will encounter *strains*  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  which are *primarily determined by the strains of the load-bearing fibres* which, due to the fibre modulus being very much greater than the matrix modulus, do not change to any considerable extent as the result of stress redistribution due to creep. This means that with the plane  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -stress state of a lamina in a laminate under static or cyclic constant-amplitude long-term loading, the layer strains  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\gamma_{21}$  remain approximately constant. On the other hand the matrix-dominated stresses  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  fall markedly during the course of time due to relaxation processes and above all due to microdamage. For this reason, in order to estimate the long-term resistance to IFF in a UD lamina in a laminate, creep strengths or fatigue strengths for  $\sigma_{\perp}$ - and  $\tau_{\perp\parallel}$ -stressing (Figure 10) are required which are not determined at constant stress but instead at constant elongation  $\varepsilon_{\perp}$  or shear strain  $\gamma_{\perp\parallel}$ .

#### Approximate prediction of IFF

Since it appears to be pointless to trace by calculation the “running away” of the matrix-dominated stresses

schwingender Einstufen-Beanspruchung rechnerisch zu verfolgen, behilft man sich folgendermaßen:

- Man benutzt als Festigkeitsparameter Schwingfestigkeiten  $\sigma_{\perp}(N)$ ,  $\tau_{\perp\parallel}(N)$ , die an „isolierten“ UD-Schichten nicht wie üblich mit konstanter Ober- und Unterspannung für  $\sigma_{\perp}^+$ - oder  $\sigma_{\perp}^c$ -Beanspruchung oder  $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung ermittelt werden, sondern aus Schwingfestigkeitsversuchen stammen, in denen der obere und der untere Wert der schwingenden Verzerrung  $\varepsilon_{\perp}$  oder  $\gamma_{\perp\parallel}$  während der ganzen Versuchsdauer konstant gehalten werden.  $N$  ist die Bruch-Lastspielzahl, bei der die isolierte UD-Einzelschicht infolge eines ZFB bricht.
- Es werden jedoch weiterhin die mit den Spannungen  $\sigma_2$ ,  $\tau_{21}$  usw. formulierten ZFB-Kriterien benutzt, weil es physikalisch sinnvoller ist, Bruchkriterien mit Spannungen statt mit Verzerrungen zu formulieren [Puc92b]. Um dies zu ermöglichen, muss man auch den in das Bruchkriterium einzusetzenden Versuchsergebnissen aus der verzerrungsgesteuert ermittelten Wöhlerkurve die Dimension einer Spannung geben.

In Bild 29 ist schematisch dargestellt, welche Annahmen für die Berechnung der Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhänge bei Belastung und Entlastung getroffen werden. Bild 29a und Bild 29b beziehen sich auf eine „isolierte“ UD-Schicht, beispielsweise in Form eines rohrförmigen 90°-Probekörpers für die Ermittlung von Wöhlerlinien bei einachsiger  $\sigma_{\perp}$ -Beanspruchung oder reiner  $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung. Bei der Erstbelastung zeigt sich bei der  $(\sigma_{\perp}, \varepsilon_{\perp})$ -Linie und besonders ausgeprägt bei der  $(\tau_{\perp\parallel}, \gamma_{\perp\parallel})$ -Linie ein degressiver Verlauf. Die Ursache hierfür ist vor allem Mikroschädigung, die mit steigender *Spannung* zunimmt. Deshalb wird auch der für die mathematische Beschreibung benutzte *Sekantenmodul*  $E_{\perp s}$  bei der erreichten Spannung  $\sigma_2$  und nicht bei der erreichten Dehnung  $\varepsilon_2$  abgegriffen. Dies ist bei der Spannungsanalyse einer UD-Schicht innerhalb eines Laminates von Bedeutung, weil hier  $\sigma_2$  nicht nur von der Dehnung  $\varepsilon_2$  abhängt sondern auch von der gleichzeitig auftretenden Längsspannung  $\sigma_1$ . Es gilt  $\sigma_2 = E_{\perp s} \cdot \varepsilon_2 + \nu_{\parallel\perp} \cdot \sigma_1$ , woraus folgt, dass eine hohe  $\sigma_2$ -Zugspannung auch bei  $\varepsilon_2 = 0$  oder sogar bei einer leicht negativen Dehnung  $\varepsilon_2$  auftreten kann, siehe auch Abschnitt 5.2.2.

Bei der auf die Erstbelastung folgenden Entlastung tritt keine weitere Mikroschädigung ein, die bislang entstandene wird aber auch nicht wieder rückgängig gemacht. Als Entlastungslinie wird deshalb eine Gerade angenommen, die vom Endpunkt A der Erstbelastungskurve ausgehend in Richtung auf den  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Koordinaten-Nullpunkt verläuft.

$\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  in the case of cycling constant-amplitude loading, the following approach may be used as a substitute:

- Strength parameters are used as long term strengths  $\sigma_{\perp}(N)$ ,  $\tau_{\perp\parallel}(N)$  which are determined at “isolated” UD laminae not, as is usual, with constant upper and lower stresses for  $\sigma_{\perp}^+$  or  $\sigma_{\perp}^c$  stressing or  $\tau_{\perp\parallel}$  stressing but come instead from fatigue strength tests in which the upper and the lower values of cycling strain  $\varepsilon_{\perp}$  or  $\gamma_{\perp\parallel}$  are kept constant for the entire duration of the test.  $N$  is the number of cycles to fracture at which the isolated individual UD lamina breaks as the result of an IFF.
- However the IFF criteria formulated with the stresses  $\sigma_2$ ,  $\tau_{21}$  and so on are still used since it makes sense to formulate fracture criteria with stresses rather than with strains [Puc92b]. To make this possible, the test results from the S-N curve obtained with strain control which are to be used in the fracture criterion have to be given the dimension of a stress.

Figure 29 shows schematically the assumptions used for calculating the stress-strain behaviour for both loading and unloading. Figure 29a and Figure 29b refer to an “isolated” UD-lamina as it exists for instance in hoop-wound 90°-tubular specimens. This kind of specimen is used for the determination of S-N curves both for uniaxial transverse stressing  $\sigma_{\perp}$  and for pure longitudinal shear stressing  $\tau_{\perp\parallel}$ . The  $(\sigma_{\perp}, \varepsilon_{\perp})$  and even more the  $(\tau_{\perp\parallel}, \gamma_{\perp\parallel})$  curve for this first loading are non-linear showing a distinct degressive course. Responsible for this phenomenon are above all micro-cracks which develop more and more with increasing stresses. That too is the reason for gripping the *secant modulus*  $E_{\perp s}$  which is to be used for the mathematical treatment *at the reached stress*  $\sigma_2$  and not at the strain  $\varepsilon_2$ . This point is of importance for the stress-analysis of an embedded lamina. Here,  $\sigma_2$  depends not just on the strain  $\varepsilon_2$ , but on the longitudinal stress  $\sigma_1$ , too. The relation  $\sigma_2 = E_{\perp s} \cdot \varepsilon_2 + \nu_{\parallel\perp} \cdot \sigma_1$  is valid. This has the effect, that high tensile  $\sigma_2$ -stress can occur at  $\varepsilon_2 = 0$  or even at slightly negative strain  $\varepsilon_2$ , see also Section 5.2.2.

Unloading the material after first loading does not cause further micro-cracks. However, those which have already been formed do not recover. Consequently, for the unloading curve a straight line connecting the endpoint A of the (first) loading curve with the point of origin of the  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$  diagram is assumed.

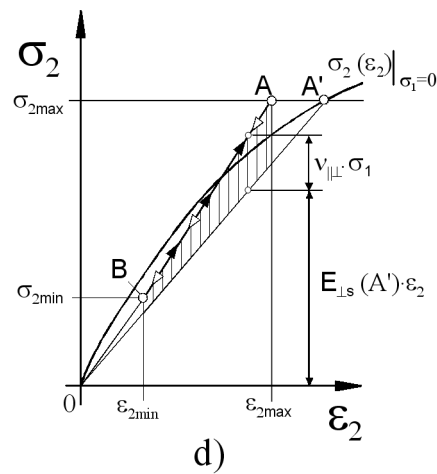
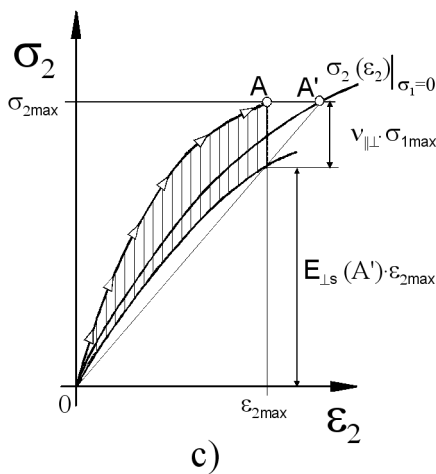
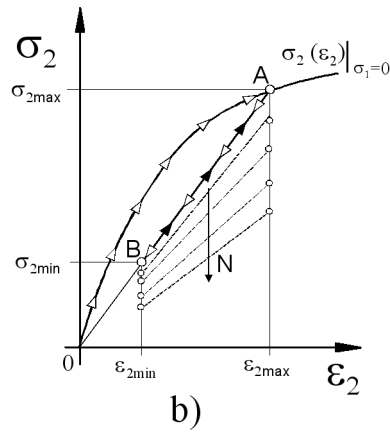
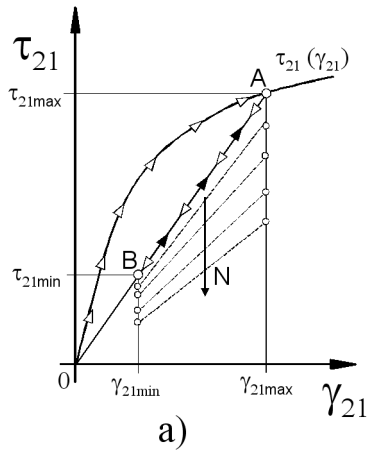


Bild 29. Annahmen über Spannungs/Verzerrungs-Beziehungen einer UD-Schicht bei ebenem Spannungszustand, wie sie für die Lebensdauerabschätzung bei schwingender Einstufenbelastung zu Grunde gelegt werden

a) für eine „isolierte“ UD-Schicht bei reiner  $\tau_{21}$ -Spannung, b) bei einachsiger  $\sigma_2$ -Spannung

Die Nichtlinearität bei der Erstbelastung ( $0 \rightarrow A$ ) tritt bei der ersten teilweisen Entlastung ( $A \rightarrow B$ ) nicht mehr auf. Bei der verzugsgesteuerten Ermittlung von Wöhlerlinien werden die beiden Grenzen der zyklischen Verzerrung ( $\gamma_{21max}$ ,  $\gamma_{21min}$  bzw.  $\epsilon_{2max}$ ,  $\epsilon_{2min}$ ) konstant gehalten. Der obere und der untere Grenzwert der Spannung sinken dabei mit steigender Schwingzahl  $N$  ab.

c) und d) zeigen für eine im Laminat eingebettete UD-Schicht die  $(\sigma_2, \epsilon_2)$ -Beziehungen bei gleichzeitiger Wirkung von  $\sigma_1$  (und  $\tau_{21}$ ); c) gilt für die Erstbelastung ( $0 \rightarrow A$ ) und d) für die erste teilweise Entlastung ( $A \rightarrow B$ ) und die erste Wiederbelastung ( $B \rightarrow A$ ).

Die schraffierten Bereiche in c) und d) markieren jenen Anteil von  $\sigma_2$ , der durch  $v_{\perp l} \cdot \sigma_1$  entsteht.

Bild 29c und Bild 29d beziehen sich auf die hinsichtlich ihrer Bruchgefahr in einem Laminat zu beurteilende UD-Schicht, in der außer  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  auch eine  $\sigma_1$  Spannung wirkt. Bild 29c gilt für die erste Belastung, Bild 29d für die erste Entlastung und erste Wiederbelastung. Der Anteil  $v_{\perp l} \cdot \sigma_1$  von  $\sigma_2$ , der sich zu  $E_{\perp s} \cdot \epsilon_2$  addiert, ist schraffiert dargestellt. Wenn beim Punkt A die Spannung  $\sigma_2$  ihren Höchstwert er-

Figure 29. Assumptions for the stress/strain-relations of a UD-lamina for 2D-states of stress, as they are used for lifetime analysis for cyclic one step loading

a) for an isolated UD-lamina and pure  $\tau_{21}$ -stress, b) for uniaxial  $\sigma_2$ -stress

The non-linearity at first loading ( $0 \rightarrow A$ ) does not occur at first partial unloading ( $A \rightarrow B$ ). For the strain controlled determination of S-N-curves both limits of the strains ( $\gamma_{21max}$ ,  $\gamma_{21min}$  respectively  $\epsilon_{2max}$ ,  $\epsilon_{2min}$ ) are kept constant. Under these conditions the upper and the lower limit of the stress drop with increasing number of cycles  $N$ .

c) and d) show for an embedded UD-lamina the  $(\sigma_2, \epsilon_2)$ -correlations for the case that  $\sigma_1$  (and  $\tau_{21}$ ) act simultaneously; c) is valid for first loading ( $0 \rightarrow A$ ) and d) for first partial unloading ( $A \rightarrow B$ ) and first reloading ( $B \rightarrow A$ ).

The hatched areas in b) and c) mark that part of  $\sigma_2$  which originates from  $v_{\perp l} \cdot \sigma_1$ .

Figure 29c and Figure 29d refer to an embedded UD-lamina which has to be judged with regard to the risk of fracture. This lamina is stressed not just by  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$ , but by  $\sigma_1$ , too. Figure 29c describes the first loading, Figure 29d the following first unloading and first reloading. The part  $v_{\perp l} \cdot \sigma_1$  of  $\sigma_2$  which is added to  $E_{\perp s} \cdot \epsilon_2$  is here marked as the hatched area. When the transverse stress  $\sigma_2$  has reached its maximum in point



reicht hat, findet sich der für diesen Zustand und damit für die Entlastungslinie gültige Wert des Sekantenmoduls  $E_{\perp s}$  beim Punkt A' an der  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Kurve für *einachsige* Beanspruchung, das heißt bei der Spannungshöhe, die am Ende der Erstbelastung erreicht wurde. Dieser Höchstwert  $\sigma_{2\max}$  errechnet sich iterativ mit Hilfe der nichtlinearen schichtenweisen Spannungsanalyse (siehe Abschnitt 5.2.2) aus den am Laminat angreifenden Streckenlasten  $n_{x\max}$ ,  $n_{y\max}$ ,  $n_{xy\max}$ . Die am Ende der ersten Teilentlastung noch wirksame Spannung  $\sigma_{2\min}$  errechnet sich ebenso (für die zu untersuchende Schicht mit dem am Punkt A' abgegriffenen Sekantenmodul  $E_{\perp s}$ ) aus den Streckenlasten  $n_{x\min}$ ,  $n_{y\min}$ ,  $n_{xy\min}$ . So findet man den Endpunkt B der Entlastung, von dem nun die erneute Belastung ausgeht.

Bei den weiteren Be- und Entlastungen hält das vorwiegend tragende Fasergerüst die zu den Punkten A und B gehörenden Dehnungen  $\varepsilon_{2\max}$  und  $\varepsilon_{2\min}$  annähernd konstant. Die bei diesen Dehnungsgrenzen auftretenden Spannungen  $\sigma_2$  ändern sich hingegen mit zunehmender Lastspielzahl zu kleineren Werten hin, sie „laufen weg“.

In die Bruchbedingungen setzt man als Werte für die auftretenden Spannungen  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  diejenigen *Spannungswerte* ein, die *beim Beginn der schwingenden Belastung* auftreten, genau genommen die Werte  $\sigma_{2\max}$ ,  $\tau_{21\max}$  am Ende der Erstbelastung (Punkt A in Bild 29c) und am Ende der ersten Entlastung (Punkt B in Bild 29d). Ebenso wird bei der Angabe der Schwingfestigkeiten  $\sigma_{\perp} \Big|_{\varepsilon_{\perp\min}^{\max}} (N)$ ,  $\tau_{\perp\parallel} \Big|_{\gamma_{\perp\parallel\min}^{\max}} (N)$  der Wöhlerlinie verfahren.

Soweit wie irgend möglich sollte das Verhältnis der maximalen zur minimalen Spannung der zu beurteilenden Schicht im Laminat und dasjenige der Probekörper für die Wöhlerlinie übereinstimmen. Wegen der (angenommenen) linearen Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhänge bei der schwingenden Be- und Entlastung bedeutet dies, dass auch die Verhältnisse von maximaler zu minimaler Dehnung oder Schubverformung bei der zu bewertenden Schicht im Laminat und im Probekörper das gleiche sein sollte. Die in das Bruchkriterium einzusetzenden *Schwingfestigkeiten für  $\sigma_{\perp}$ -Beanspruchung und für  $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung müssen sich auf die gleiche Lastspielzahl  $N$  beziehen*. Es ist besonders wichtig, dass so weit wie irgend möglich die Werkstoffbeschaffenheit (Elastizitätsgrößen, Herstellungsbedingungen) von Probekörper und zu beurteilender Schicht im Laminat übereinstimmen.

Mit der vorgeschlagenen Methode wird das im Bauteil beobachtete „Weglaufen“ der Spannungen  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  dadurch zumindest näherungsweise berücksichtigt, dass man bei der Ermittlung der Festigkeiten im

A, the correct value of  $E_{\perp s}$  for the unloading can be gripped from point A' of the  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -curve for *uniaxial* loading, thus at the maximum stress  $\sigma_2$  reached at the end of first loading. This maximum stress  $\sigma_{2\max}$  is calculated iteratively doing a lamina-by-lamina stress analysis (compare Section 5.2.2). Input data for this analysis are the membrane stress resultants per unit length  $n_{x\max}$ ,  $n_{y\max}$ ,  $n_{xy\max}$ . Analogously, the minimum stress  $\sigma_{2\min}$  acting at the end of the first (partial) unloading is calculated from  $n_{x\min}$ ,  $n_{y\min}$ ,  $n_{xy\min}$ . The secant Young's modulus  $E_{\perp s}$  is in this case gripped at point A'. This procedure leads to the endpoint B of the unloading. From this point a consecutive reloading starts.

The strains  $\varepsilon_{2\max}$  and  $\varepsilon_{2\min}$  belonging to the points A and B do practically not change during following loading cycles. This is due to the fact, that the fibres carry the main part of the load in the laminate and determine the strains. However, the stresses  $\sigma_2$  resulting from  $\varepsilon_{2\max}$  and  $\varepsilon_{2\min}$  decrease with increasing number of cycles, they are “running away”.

The stresses to be inserted into fracture conditions are the stresses  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  which are present *at the beginning of the cycling long-term loading*. These are namely  $\sigma_{2\max}$ ,  $\tau_{21\max}$  acting at the end of first loading (point A in Figure 29c) and at the end of first unloading (point B in Figure 29d). The same procedure is used for the determination of the fatigue strengths  $\sigma_{\perp} \Big|_{\varepsilon_{\perp\min}^{\max}} (N)$ ,  $\tau_{\perp\parallel} \Big|_{\gamma_{\perp\parallel\min}^{\max}} (N)$  in the S-N curve.

As far as possible the ratio of the maximum and the minimum stress in the S-N-curve should be the same in the lamina in the laminate under consideration and the UD-ply of the specimen. Because of the (assumed) linear stress-strain-relations for the cyclic loading and unloading this implies that the ratio of the maximum and minimum strains is the same for the lamina of the laminate and the specimen, too. *The used fatigue strength to be inserted into the fracture criterion for both  $\sigma_{\perp}$ - and  $\tau_{\perp\parallel}$ -stressing must be valid for the same number  $N$  of load cycles*. It is extremely important that the material properties (Young's modulus, process conditions) of the specimen and the layer in the laminate which is to be judged are as similar as possible.

By the proposed method the “running away” of the stresses  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  observed in the component is considered at least approximately by permitting a similar “running away” when determining the strengths in

Probekörper ein ähnliches „Weglaufen“ zulässt, statt die Spannungen konstant zu halten. Täte man dies nicht, sondern benutzte wie üblich Festigkeitswerte aus Wöhlerlinien, die bei konstanter Ober- und Unterspannung aufgenommen wurden, müsste man in Zeitintervallen rechnen, in denen man abschnittsweise die Schichtspannungen  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  konstant hält. Dazu würden schwingenspielzahlabhängige Moduli und schlussendlich eine Schadens-Akkumulations-Hypothese benötigt.

Anders als bei Kurzzeitbelastung ist die beispielsweise mit den Gleichungen (45) bis (47) berechnete Anstrengung  $f_E$  bei Schwingbelastung kein Maß für die Bruchgefahr, weil durch die Wöhlerlinie kein linearer Zusammenhang zwischen ertragbarer Spannung und Bruchlastspielzahl gegeben ist.

Um mit der vorgeschlagenen Methode die zu erwartende Schwingenspielzahl bis zum Beginn der ZFB-Rissbildung bei einer Einstufen-Belastung für eine zu beurteilende  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungskombination abzuschätzen, muss man iterativ so lange zusammenhängende Werte  $\sigma_{\perp} |_{\varepsilon_{\perp \min}}^{\varepsilon_{\perp \max}}(N_i)$  und  $\tau_{\perp \parallel} |_{\gamma_{\perp \parallel \min}}^{\gamma_{\perp \parallel \max}}(N_i)$ , das heißt solche, die sämtlich zu einer gleichen Bruch-Lastspielzahl  $N_i$  gehören, in das Bruchkriterium einsetzen, bis dieses den Wert 1 annimmt. Die zu den Festigkeitswerten, mit denen die Bruchbedingung schließlich durch  $f_E = 1$  erfüllt wird, gehörende Bruch-Schwingenspielzahl  $N_i$  ist dann die zu erwartende Schwingenspielzahl bis zum Einsetzen der ZFB-Rissbildung der betrachteten Schicht im Laminat.

Manche der hier angestellten Betrachtungen können sinngemäß auf langdauernde (statische) Belastung übertragen werden. In diesem Fall arbeitet man mit Zeitstandfestigkeiten  $R_{\perp}^t(t), R_{\perp}^c(t), R_{\perp \parallel}(t)$ , die bei konstant gehaltener Dehnung  $\varepsilon_{\perp}$  oder Schiebung  $\gamma_{\perp \parallel}$  ermittelt wurden ( $t$  ist die Standzeit bis zum ZFB). Würde man statt dessen mit Zeitstandfestigkeiten rechnen, die wie allgemein üblich bei konstant gehaltenen Spannungen bei  $\sigma_{\perp}$ - oder  $\tau_{\perp \parallel}$ -Beanspruchung ermittelt wurden, würde man zu niedrige Standzeiten bis zum ZFB erhalten.

**Näherungsweise Vorhersage des FB**

Da sich die Spannungen in den Fasern des Laminates bei Langzeitbelastung prozentual nur geringfügig ändern, können im FB-Kriterium FB-Zeitstandfestigkeiten oder FB-Schwingfestigkeiten angewandt werden, die – wie üblich – in Versuchen mit zeitlich konstanter  $\sigma_{\parallel}$ -Beanspruchung oder zwischen zwei konstanten Grenzwerten schwingender  $\sigma_{\parallel}$ -Beanspruchung ermittelt werden.

Normalerweise liegen nur Wöhlerlinien für „isolierte“ UD-Schichten vor, das heißt es ist im Versuch

the test specimen rather than keeping the stresses constant. If this were not done but strength values from S-N curves obtained with constant upper and lower stress were used instead (as is usual), it would then be necessary to calculate using time intervals in which lamina stresses  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  were kept constant on a time segment by segment basis. For this one would need moduli dependent on the number of load cycles and ultimately a damage accumulation hypothesis.

Unlike the case with short-term stress, the stress exposure  $f_E$  calculated with, for example, Equations (45) to (47) is not a direct measure of the risk of fracture as no linear relationship between supportable stress and the number of load cycles to fracture is expressed by the S-N curve.

In order to estimate, using the method suggested, the number of cycles to be expected before the beginning of IFF crack formation in the case of constant amplitude loading for a  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -stress combination which is to be evaluated, it is necessary to keep iteratively inputting linked up values  $\sigma_{\perp} |_{\varepsilon_{\perp \min}}^{\varepsilon_{\perp \max}}(N_i)$  and  $\tau_{\perp \parallel} |_{\gamma_{\perp \parallel \min}}^{\gamma_{\perp \parallel \max}}(N_i)$  – in other words those which belong to an identical number  $N_i$  of load cycles to fracture – into the fracture criterion until it takes on a value of 1. The number  $N_i$  of load cycles to fracture belonging to the strength values at which the fracture condition is finally satisfied by  $f_E = 1$  will thus be the number of cycles to be expected before IFF crack formation commences in the laminate lamina in question.

Many of the observations presented here can be applied, mutatis mutandis, to (static) loading of long duration. In this case, creep strengths  $R_{\perp}^t(t), R_{\perp}^c(t), R_{\perp \parallel}(t)$  are used which were determined with elongation  $\varepsilon_{\perp}$  or shear strain  $\gamma_{\perp \parallel}$  kept constant ( $t$  is the time-to-fracture by IFF). If calculations were performed not with these but with creep strengths which were determined as usual with  $\sigma_{\perp}$  or  $\tau_{\perp \parallel}$  stressings and stresses kept constant, times-to-fracture before IFF occurs would be obtained, which are too short.

**Approximate prediction of FF**

Since the stresses in the fibres of the laminate only change to a minor extent percentually during long-term loading, FF creep strengths or FF fatigue strengths can be applied in the FF criterion, these having been, as usual, obtained by tests where the stressing  $\sigma_{\parallel}$  was kept constant over time or the  $\sigma_{\parallel}$ -stressing is cycling between two fixed limits.

Normally only S-N curves will be available for “isolated” UD laminae – in other words, no notch effect

keine Kerbwirkung infolge von ZFB in Nachbarschichten wirksam geworden. Wenn eine schichtenweise Bruchanalyse zeigt, dass in den Nachbarschichten der für die FB-Zeitfestigkeit bei schwingender Belastung maßgebenden Schicht ZFB des Typs ( $\sigma_2 > 0$ ) auftreten, ist mit einem sukzessiven Bruchgeschehen mit fortschreitenden Delaminationen zu rechnen, das die übliche schichtenweise Bruchanalyse nicht beschreiben kann. Man sollte aber versuchen, die Kerbwirkung zumindest tendenziell zu erfassen. Dies könnte geschehen, indem man für die Rechnung die Schwingfestigkeiten der gemessenen Wöhlerlinie mit einem Faktor 0,6 (für starke Kerbwirkung) bis 0,9 (für schwache Kerbwirkung) erniedrigt.

Selbst wenn vorerst noch keine „genaue“ Vorhersage des Langzeitverhaltens möglich ist, erlaubt die vorgeschlagene Methode doch bereits, „gute“ und „schlechte“ Laminatentwürfe für Langzeitbelastung zu unterscheiden und Schwachstellen aufzuzeigen. ***Damit im Laufe der Zeit verlässliche Erfahrungswerte gewonnen werden, sollten Langzeitversuche am Bauteil wo immer möglich durch eine schichtenweise Bruchanalyse begleitet werden.***

#### 5.4 Schwingbeanspruchte Laminare

Auf Grund der besonderen Praxisrelevanz dieser Beanspruchungsart sind Phänomenologie und Ansätze zu einer Lebensdauerabschätzung in den folgenden Abschnitten ausführlich erläutert.

Die Verbesserung der rechnerischen Dimensionierung schwingbeanspruchtes Laminat bedarf jedoch noch weiterer Forschungsaktivität.

##### 5.4.1 Schädigungsvorgänge

Zeitlich veränderliche Langzeitbelastung, oder Schwingbelastung, verursacht Schädigungen in der Schicht und im Laminat, falls die Belastung genügend oft wiederholt wird. Sie führt letztlich zum *Schwingbruch*, einem Zerrüttungsbruch, der sich – wie unten beschrieben – meist kontinuierlich über einen langen Zeitraum entwickelt.

Die Auswirkung aller dem Schwingbruch vorausgehenden Schädigungen im Laminat kann daher an ihrem Einfluss auf die Beanspruchung und Schädigung der am meisten faserbruchgefährdeten UD-Schicht im Laminat beurteilt werden. Beispielsweise verringert sich bei einem  $[0/90]_s$ -Laminat nach einer Schwingbelastung die in einem Kurzzeitzugversuch in  $0^\circ$ -Richtung ermittelte Festigkeit gegenüber einem nicht vorbelasteten Laminat in jenem Ausmaß, in dem der erreichte Schadenszustand die Beanspruchbarkeit der  $0^\circ$ -UD-Schicht im Laminat reduziert hat. Hierauf beruht die unten beschriebene Methode zur Lebensdauer

from IFF in adjacent laminae became effective during the course of the test. If a lamina-by-lamina fracture analysis indicates that IFFs of the type ( $\sigma_2 > 0$ ) occur in the laminae adjacent to the lamina used for determining the FF fatigue strength under cyclic stress, then one has to be aware that gradual fracture with progressive delaminations will occur. Although this type of failure can not be described by the conventional lamina-by-lamina fracture analysis an attempt should be made at least to determine what the notch effect will tend to be. This might be done in the analysis by reducing the fatigue strengths in the measured S-N curve by a factor ranging between 0,6 (for a strong notch effect) and 0,9 (for a weak notch effect).

Even if it is not yet possible to predict long-term behaviour “accurately”, the method we suggest can already differentiate between “good” and “bad” laminate designs for long-term loading and unveil weak areas of the laminate. ***In order to obtain dependable empirical values over the course of time, long-term testing of components should whenever possible be accompanied by a lamina-by-lamina fracture analysis.***

#### 5.4 Cyclically loaded laminates

Due to the particular practical relevance of this kind of loading, a detailed treatment of the phenomenology and approaches to estimating service life will be provided in the sections which follow.

However, even more research work is required before improvements in the analytical dimensioning of laminates subject to cyclic loading can be achieved.

##### 5.4.1 Fracture processes

Time-varying long-term loading, or cyclic loading, causes damage within the lamina and within the laminate if the stress is repeated often enough. It will lead ultimately to *fatigue failure*, a destructive failure which, as is described below, normally develops continuously over a long period of time.

The effect of all of the instances of damage in the laminate which precede fatigue failure can therefore be assessed by the loading on and damage to the UD lamina in the laminate which is most endangered by fibre failure. For example, in a  $[0/90]_s$  laminate following cyclic loading, the strength determined in the  $0^\circ$  direction during a short-term tensile test will decrease in comparison with a non-preloaded laminate to the extent to which the damage state reached has reduced the loading capacity of the  $0^\circ$  UD lamina in the laminate. The method described below for predicting service life is based on this. The S-N curve of

ervorhersage. Die Wöhlerlinie einer Schicht bzw. eines Laminates mit ausschließlich 0°-Lagen verläuft flacher, weil kein schädigender Einfluss durch Schäden anderer Schichten (Off-Axis Schichten) besteht, siehe Bild 32. Die im Kurzzeitversuch gemessene Festigkeit nach Schwingbelastung aber vor dem Schwingbruch bezeichnet man als Restfestigkeit.

Der Schadenszustand des Laminates bei Schwingbelastung ist im Wesentlichen gekennzeichnet durch

- Anzahl und Größe der faserparallelen Risse (ZFB),
- Delaminationen und
- örtliches Versagen von Fasern unter Zug- oder Druckbeanspruchung.

Die meisten experimentellen Untersuchungen an Laminaten wurden bei *einachsiger* Belastung von (0/90/±45)-Laminaten in 0°-Richtung durchgeführt. Die dabei beobachteten Phänomene sind die folgenden:

Im Vergleich zur einmaligen Belastung bis zum Bruch führt die bis zum Bruch wiederholte Belastung auf einem geringeren Lastniveau zu zahlreicheren Schäden der Matrix und der Faser/Matrix-Grenzfläche (Bild 30). Die ZFB sind gleichmäßiger in der

a lamina or of a laminate containing only 0° laminae runs more flatly due to the fact that there is no damaging influence from damage in other laminae (off-axis laminae), see Figure 32. The strength measured in the short-term test following cyclic loading but before fatigue failure is referred to as residual strength.

The damage state of the laminate under cyclic loading is basically described by

- number and size of parallel-to-fibre cracks (IFF),
- delaminations, and
- local failure of fibres under tensile or compressive stressing.

Most experimental investigations of laminates have been carried out with a *uniaxial* loading of (0/90/±45) laminates in the 0° direction. The following phenomena have been observed:

In comparison with a single instance of loading to failure, repeated loading at a lower load level until failure results in a greater number of instances of damage to the matrix and at the fibre-matrix interface (Figure 30). The IFFs are more evenly distributed

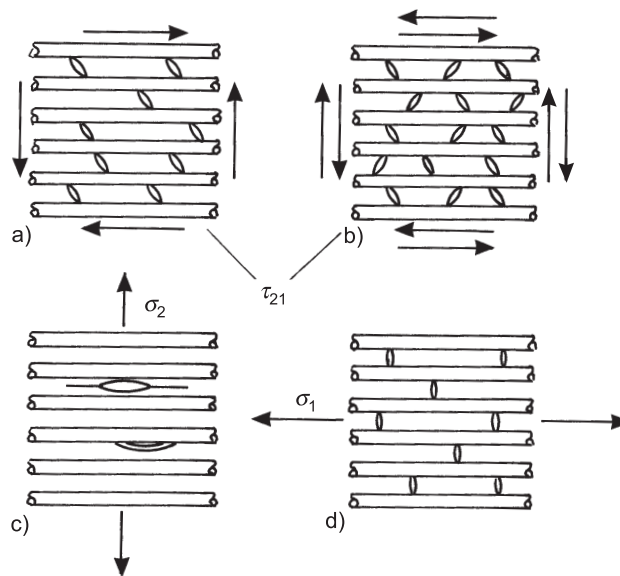


Bild 30. Zum Auftreten von Matrixrissen [Puc92b]

- a) Zügige oder schwelende  $\tau_{21}$ -Schubbeanspruchung führt zu Rissen unter 45°, die an den Fasern gestoppt und Ursache für faserparallele Minidelaminationen werden.
- b) Wechselnde  $\tau_{21}$ -Schubbeanspruchung führt zu Rissen unter +45° und -45° und damit zu einer schnelleren Zerrüttung als bei a).
- c) Bei  $\sigma_2$ -Zugbeanspruchung werden Risse durch Fehlstellen besonders begünstigt und können sich ungehindert entlang der Fasern ausbreiten.
- d) Wechselnde  $\sigma_1$ -Beanspruchung führt u.a. an der Spitze von gebrochenen Einzelfasern zu senkrecht zur Faser verlaufenden Rissen, die an Nachbarfasern gestoppt werden (siehe auch Abschnitt 4.4.3).

Figure 30. When matrix cracks occur [Puc92b]

- a) Short term or pulsating  $\tau_{21}$  shear stressing leads to cracks under 45° (so called hackles) which are stopped at the fibres and are the cause of parallel-to-fibre mini-delaminations.
- b) Alternating  $\tau_{21}$  shear stressing results in cracks under +45° and -45° (hackles) and thus to faster destruction than (a).
- c) With  $\sigma_2$  tensile stressing cracks are particularly encouraged where there are flaws and can spread along the fibres without hindrance.
- d) Alternating  $\sigma_1$  stressing results in, among other things, cracks occurring at the tip of broken individual fibres and running transverse with respect to the fibre until stopped at adjacent fibres (see also Section 4.4.3).

Schicht verteilt. Ausgehend von ZFB können sich infolge lokaler Dehnungserhöhungen und infolge von in der Rissumgebung entstehenden interlaminaeren Spannungen Delaminationen und Faserbrüche ausbilden. Diese Delaminationen begünstigen durch herabgesetzte Stützfähigkeit das Ausknicken von Fasern bei faserparalleler Druckbeanspruchung. Im Lastfall Zug (Zugschwellbeanspruchung) führen lokale Spannungsumlagerungen und Spannungskonzentration zu Kerbwirkungen in angrenzenden UD-Schichten und damit zu Rissen in der Matrix quer zur Faserrichtung und in Folge zu ersten Brüchen von Fasern. Insgesamt wird sich die Beanspruchung in den vorwiegend die Last aufnehmenden  $0^\circ$ -UD-Schichten so erhöhen, dass immer mehr Fasern bei einem bestimmten Lastniveau ihre Bruchspannung erreichen und schließlich der zügige Bruch aller verbliebenen Fasern der  $0^\circ$ -UD-Schicht zum totalen Versagen des Laminates führt.

Viele örtliche Dehnungserhöhungen, vor allem aber dem endgültigen Versagen vorausgehende Brüche von ganzen Faserbündeln, sind die Ursachen für die gegen Ende der Lebensdauer bei Schwingbelastung messbare Zunahme der globalen Dehnungen (Steifigkeitsabfall) [Gar92; Gar96].

Bei faserparalleler Druckbeanspruchung ist von Bedeutung, dass einzelne Fasern und UD-Schichten als Ganzes durch elastische Instabilität gefährdet sind. Deshalb ist die Stützfähigkeit der Matrix für den Widerstand der Fasern gegen Mikroknicen von großer Bedeutung. Im Laufe der Schadensentwicklung delaminierte Schichten können örtlich beulen.

Bei (Quer-)Druckschwellbeanspruchung beginnt die Schädigung meist wie bei Zugbeanspruchung mit parallel zu den Fasern verlaufenden „Erstschäden“. Werden diese nur in geringem Maß von Schubspannungen mitverursacht (siehe Abschnitt 5.2), so bleiben sie zunächst makroskopisch gesehen geschlossen, eine ankernde Wirkung auf angrenzende Schichten ist nicht anzunehmen. Die weitere Schadensentwicklung ist durch das Wachsen von Mikro-Delaminationen gekennzeichnet. Herrschen in der querdruckbeanspruchten Schichten gleichzeitig nur geringe faserparallele Zugspannungen oder sogar faserparallele Druckspannungen, so bilden sich bei weiterer Druckbeanspruchung schräge ZFB aus, die interlaminaere Beanspruchung verursachen. Die Folge sind Delaminationen und örtliches Beulen der druckbeanspruchten Schichten. Die Keilwirkung der schräg aufeinander aufgleitenden Bruchflächen führt aber auch zu erheblichen zusätzlichen Spannungen in den anderen Schichten und damit letztlich zum Versagen des Laminates.

over the lamina. Starting from IFF, delaminations and fibre failures can arise as a consequence of local increases in strain and of interlaminar stresses arising in the crack vicinity. On account of the ensuing drop in supportive capability, these delaminations encourage the collapse (buckling) of fibres when compressive stressing occurs parallel to the fibres. In the loading case of pulsating tensile stressing local stress redistributions and stress concentration will bring about notch effects in the adjacent UD laminae and thereby cracks in the matrix transversely to the fibre direction and as a consequence first fibre failures. All in all the stressing in the  $0^\circ$  UD laminae which predominantly carry the load will increase such that at a specific load level more and more fibres reach their failure stress, until finally, the sudden fracture of all remaining fibres in the  $0^\circ$  lamina results in total failure of the laminate.

A large number of local increases in strain, but above all the fracture of entire fibre bundles which precedes final failure, are the causes of the measurable increase in global strains (fall in stiffness) which occurs towards the end of service life under cyclic loading [Gar92; Gar96].

With parallel-to-fibre compressive loading it is significant that individual fibres and UD laminae as a whole are endangered by elastic instability. For this reason the supportive capacity of the matrix is of great importance to the resistance of the fibres to microbuckling. As damage development progresses, delaminated laminae may buckle locally.

With pulsating (transverse) compressive stressing the damage starts in most cases in the same way as with tensile stressing, with “starting damage” running parallel to the fibres. If shear strains are only involved to a minor extent in causing this damage (see Section 5.2), then, from the macroscopic point of view they will initially remain closed and a notch-creating effect on adjacent laminae is not to be assumed. Further development of damage is characterized by the growth of microdelaminations. If only minor parallel-to-fibre tensile stresses or even parallel-to-fibre compressive stresses are simultaneously present in the lamina experiencing transverse compressive stressing, then under further compressive stress, oblique IFFs will form and these will result in interlaminar stressing. The consequence will be delaminations and local buckling of laminae under compressive stress. However, the wedge effect of the fracture surfaces obliquely sliding over each other will also result in considerable additional stresses in the other laminae and thus, ultimately, to failure of the laminate.

Bei wechselnder schwingender Beanspruchung (Zug-Druck-Lastwechsel) wird die Schadensentwicklung gegenüber einer schwellenden Beanspruchung meist beschleunigt. Der Abfall von Restfestigkeit und Schwingfestigkeit gegenüber der Festigkeit bei quasi-statischer Belastungssteigerung ist für ein bestimmtes Verhältnis  $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$  („kritischer“  $R$ -Wert, siehe Bild 34) am größten.

Wenn ein Laminat aus mehreren UD-Schichten mit unterschiedlichen Faserrichtungen *mehrachsig* beansprucht wird, z.B. bei Druckbehältern, Drehrohrfedern und Torsionswellen, tritt an die Stelle der bisher diskutierten, hauptsächlich lasttragenden  $0^\circ$ -UD-Schichten die „am meisten faserbruchgefährdete UD-Schicht“.

Beispielsweise sind in einem  $\pm 45^\circ$ -Torsionsrohr aus GFK mit gleich vielen Fasern in  $+45^\circ$  und  $-45^\circ$  Richtung bei rein schwellender Torsionsbeanspruchung normalerweise die UD-Schichten mit Druckbeanspruchung in Faserrichtung, das sind gleichzeitig die querzugbeanspruchten Schichten, am höchsten ZFB-gefährdet. Durch die von den ZFB auf angrenzende Schichten ausgeübte Kerbwirkung steigt damit die Gefahr von FB in den zugbeanspruchten Fasern. Liegen die parallel druckbeanspruchten UD-Schichten am Außen- oder Innenradius, so kann das Versagen nach der ZFB-Entstehung auch durch Ausknicken der Fasern unter Druckbeanspruchung eingeleitet werden.

When there is alternating cyclic loading (tension-compression load cycles) the development of damage is in most cases accelerated as compared with a pulsating fatigue loading. The drop in residual strength and fatigue strength in comparison with strength during a quasi-static increase in loading is the greatest for a specific ratio  $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$  (“critical”  $R$  value, see Figure 34).

When a laminate consisting of several UD laminae with different fibre directions is loaded *multiaxially* – such as is the case with pressure vessels, tubular torque springs and torsion shafts, for example – the “UD lamina at most risk of fibre failure” takes the place of the primarily load-bearing  $0^\circ$  UD laminae already discussed.

For example, if a  $\pm 45^\circ$  torsion tube made of GFRP with an equal amount of fibres in the  $+45^\circ$  and  $-45^\circ$  directions is subjected to purely pulsating torsional stress it will normally be the UD lamina with fibres stressed compressively – in other words, the laminae experiencing transverse tensile stressing – which are most at risk of IFF. The danger of FF in fibres under tensile stress is thus increased due to the notch effect on adjacent laminae which is exerted by the IFF. If the UD laminae under parallel compressive stress are situated on the external or internal radius, then failure following the appearance of IFF can also be initiated by collapse of the fibres under compressive stressing.

**5.4.2 Darstellung von Schwingfestigkeitsergebnissen**

Die Kenngrößen eines Schwingspiels sind im folgenden Bild 31 dargestellt (siehe auch DIN 50100).

**5.4.2 Presentation of fatigue strength results**

The characteristics of a complete load cycle are shown in Figure 31 which follows (see also DIN 50100).

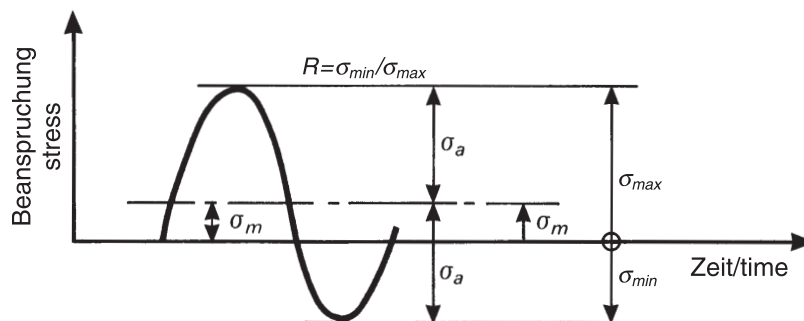


Bild 31. Kenngrößen eines Schwingspiels

$\sigma_m$	Mittelspannung
$\sigma_a$	Spannungsamplitude
$\sigma_{max}$	Oberspannung
$\sigma_{min}$	Unterspannung
$R$	Spannungsverhältnis
$\Delta\sigma$	Schwingbreite = $2 \sigma_a$

Figure 31.Characteristics of a complete load cycle

$\sigma_m$	mean stress
$\sigma_a$	stress amplitude
$\sigma_{max}$	maximum stress
$\sigma_{min}$	minimum stress
$R$	stress ratio
$\Delta\sigma$	stress range = $2 \sigma_a$

Aus Bild 31 kann man folgende Beziehungen ableiten:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_m + \sigma_a \\ \sigma_{\min} &= \sigma_m - \sigma_a \\ \sigma_a &= (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 \\ \sigma_m &= (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2 \\ R &= \sigma_{\min}/\sigma_{\max} \end{aligned} \tag{97}$$

Versuche zur Ermittlung der Schwingfestigkeitskennwerte des FKV werden im Allgemeinen als *Ein-stufenversuche* (konstante Amplitude, sinusförmige Belastung) mit folgenden Ergebnissen durchgeführt (siehe Bild 32 und Bild 33):

- die Bruchschwingspielzahl  $N_{fr}$  und
- die bis zur Bruchschwingspielzahl ertragene Beanspruchung  $\sigma_a$ ,  $\sigma_{\max}$  oder  $\sigma_{\min}$  in Kombination mit  $R$  oder  $\sigma_m$ .

Für die Darstellung von Schwingfestigkeitskennwerten eignen sich „Wöhlerlinien“ (WL). Bei der Auswahl von WL-Funktionen für die Modellierung von

The following relationships may be derived from Figure 31:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_m + \sigma_a \\ \sigma_{\min} &= \sigma_m - \sigma_a \\ \sigma_a &= (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 \\ \sigma_m &= (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2 \\ R &= \sigma_{\min}/\sigma_{\max} \end{aligned} \tag{97}$$

Tests to determine the fatigue strength properties of the FRP are generally carried out in the form of *constant amplitude tests* (sinusoidal loading) with the following results (see Figure 32 and Figure 33):

- the number of load cycles to failure  $N_{fr}$  and
- the loading  $\sigma_a$ ,  $\sigma_{\max}$  or  $\sigma_{\min}$  endured in combination with  $R$  or  $\sigma_m$ , until the number of load cycles to failure is reached.

“S-N” curves are suitable for representing fatigue strength values. When selecting S-N functions for modelling fatigue strength properties obtained by ex-

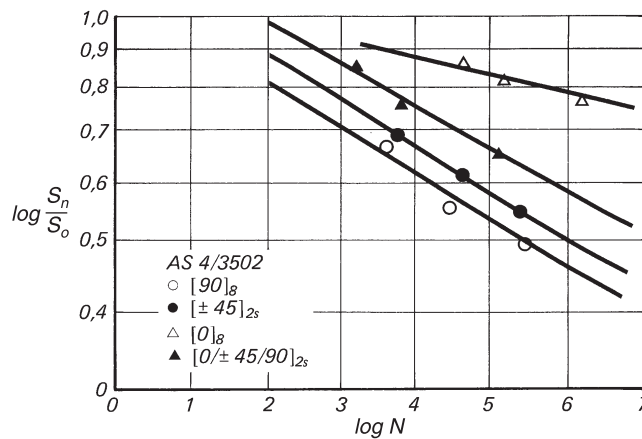


Bild 32. Schicht- und Laminat-Wöhlerlinien für CFK-Laminat (Ordinate: Verhältnis von Schwingfestigkeit zu Kurzzeitfestigkeit)

Figure 32. Lamina and laminate S-N curves for CFRP laminates (Ordinate: Ratio of fatigue strength to static strength)

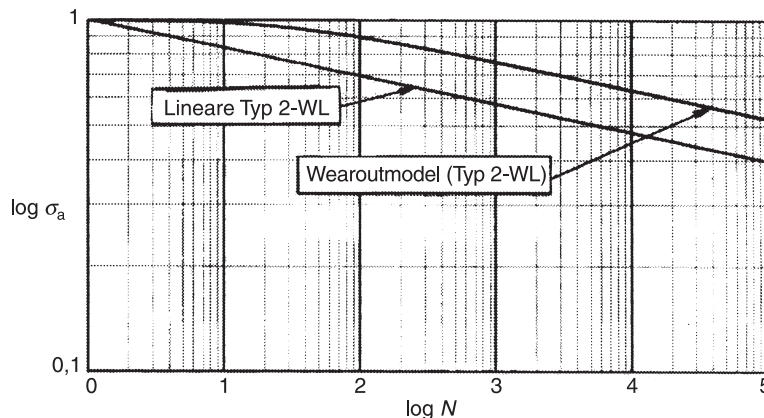


Bild 33. Beispiele für Typ-2-Wöhlerlinienfunktionen (Wearout-Modell und lineare Typ-2-WL)

Figure 33. Examples for type 2 S-N curve functions (wear-out model and linear type 2 S-N curve)

experimentell ermittelten Schwingfestigkeitskennwerten ist das Verhalten von FKV bei Schwingbelastung, dessen Phänomenologie in Abschnitt 5.4.1 beschrieben ist, zu berücksichtigen. Demnach sind schwingbeanspruchte FKV grundsätzlich als zeitfest zu charakterisieren. In Wöhlerversuchen findet man nicht wie bei Stählen einen Abknickpunkt der WL bei  $N \approx 2 \cdot 10^6$ .

C-Faser-Laminare weisen aber im Vergleich zu metallischen Werkstoffen eine ganz erheblich flachere Neigung der WL auf. Der „Festigkeitsverlust“ nach für viele Industriezweige üblichen Lastwechselanzahlen kann deutlich geringer ausfallen als für Stahl – die „lifetime performance“ ist besser! Eine grobe Einschätzung für Glasfaser-Laminare ist, dass sie eine dem Stahl etwa vergleichbare Neigung der WL haben, aber der „Festigkeitsverlust“ bei sehr großen Lastwechselanzahlen größer wird, da „der Abknickpunkt in die Dauerfestigkeit“ fehlt.

Für die Modellierung von Schwingfestigkeitsergebnissen von Schichten und Laminaten wird daher die folgende WL-Funktion empfohlen. Die beschreibende Funktion ist als Restfestigkeitsabfall- oder Wearoutmodell (WL-Funktion Typ 2) bekannt (Bild 33) [Sen81]. Sie enthält freie Parameter zur Anpassung an die Versuchsergebnisse und lautet:

$$\sigma_{\max} = \hat{R} \cdot \left( \frac{1 - Vg}{N_{fr} - Vg} \right)^{Ng} \quad (98)$$

Dabei ist

- $\sigma_{\max}$     Oberspannung
- $\hat{R}$         Laminatkurzzeitfestigkeit (freier Parameter)
- $N_{fr}$       Bruchlastspielzahl
- $Ng$        Wert der konstanten Neigung im Bereich großer Lastspielzahlen (freier Parameter)
- $Vg$        Parallelverschiebung (in Lastspielzahlrichtung) des mit der Neigung  $Ng$  verlaufenden Teils der WL (freier Parameter)

Die freien Parameter werden aus einer nichtlinearen Regressionsrechnung bestimmt [Sen81].

Eine vereinfachte Version der Typ-2-Wöhlerlinie ist ebenfalls in Bild 33 gezeigt. Es ist eine Gerade im doppelt-logarithmisch aufgetragenen Wöhlerdiagramm, die den bei FKV beobachteten horizontalen Verlauf der Wöhlerlinie im Bereich kleiner Lastspielzahlen vernachlässigt (Parameter  $Vg = 0$  in Gleichung (98)). Diese im Folgenden „lineare Typ 2-WL“ genannte WL-Funktion wird im Allgemeinen nicht für die Anpassung von Versuchsergebnissen sondern für die Durchführung eines vergleichsweise einfachen Schwingfestigkeitsnachweises (siehe Abschnitt 5.4.4) auf der Basis der Kurzzeitfestigkeit und einer angenommenen Neigung der WL benutzt.

periment, the behaviour of FRP under cyclic loading should be taken into account. Its phenomenology is described in Section 5.4.1. According to this, FRP parts under cyclic loading should basically be characterized as designed to the required lifetime. In fatigue tests of FRP a kinking point on the S-N curve is not found at  $N \approx 2 \cdot 10^6$ , such as is the case with steels.

However, carbon-fibre laminates have a much flatter slope of the S-N curve than metallic materials. The “loss of strength” encountered following the numbers of load cycles usual in many branches of industry can turn out to be much less than is found with steel – the lifetime performance is better. A rough assessment for glass-fibre laminates is that their slope of the S-N curve is approximately comparable to that of steel but at very high load cycles the “strength loss” is greater since there is no “kinking point in the fatigue strength”.

For this reason the following S-N curve function is recommended for modelling fatigue strength results for laminae and laminates. The function described is known as the residual strength decrease or wear-out model (type 2 S-N curve function) (Figure 33) [Sen81]. It contains open parameters for adjustment to the test results and takes this form:

$$\sigma_{\max} = \hat{R} \cdot \left( \frac{1 - Vg}{N_{fr} - Vg} \right)^{Ng} \quad (98)$$

where

- $\sigma_{\max}$     maximum stress
- $\hat{R}$         laminate short-term strength (open parameter)
- $N_{fr}$       number of cycles at failure
- $Ng$        value of constant slope in region of high load cycle numbers (open parameter)
- $Vg$        parallel translation (in direction of load cycle number) of the part of the S-N curve running with the slope  $Ng$  (open parameter)

The open parameters are obtained from a non-linear regression calculation [Sen81].

A simplified version of the type 2 S-N curve is also shown in Figure 33. It is a straight line on the S-N diagram which has a log-log plot and ignores the horizontal course of the S-N curve which is observed with FRP in the region of low load-cycle numbers (parameter  $Vg = 0$  in Equation (98)). This S-N function, which is hereafter referred to as “linear type 2 S-N curve”, is generally used not for adjusting test results but for carrying out a comparatively simple fatigue strength check calculation (see Section 5.4.4) on the basis of the short-term strength and an assumed slope of the S-N curve.



Besondere Sorgfalt ist bei Auswahl und Vergleich von Wöhlerlinien unterschiedlicher Literaturquellen geboten. Prüftechnik, Probenform und Einspannung haben, ebenso wie die Prüffrequenz und weitere Faktoren, erheblichen Einfluss auf die Versuchsergebnisse.

Ergebnisse von mehreren Wöhlerversuchen bei verschiedenen Spannungsverhältnissen  $R$  werden im  $\sigma_a$ - $\sigma_m$ -Diagramm mit Linien konstanter Lebensdauer, dem so genannten *Haigh-Diagramm* [Hai89] zusammengefasst. In dieser Darstellungsform von Schwingfestigkeitsdaten sind die Beanspruchungsgrößen  $\sigma_a$  (Ordinatenachse) über  $\sigma_m$  (Abszissenachse) mit der Bruchlastspielzahl als Konstante aufgetragen, sodass sich von der Kurzzeitfestigkeit ausgehende Linien konstanter Bruchlastspielzahl ergeben.

In Bild 34 ist eine Vereinfachung des Haigh-Diagramms, das so genannte *Goodman-Diagramm*, dargestellt. Die Linien konstanter  $R$ -Werte erscheinen bei dieser Darstellung als vom Ursprung ausgehende Strahlen. Die Linien konstanter Unter-, konstanter Oberspannung und konstanter  $R$ -Werte ergeben sich aus den unter Bild 31 angegebenen Beziehungen der Beanspruchungsgrößen. Nach der Übertragung von Wöhlerlinien in das Haigh- bzw. Goodman-Diagramm befinden sich alle Daten einer Wöhlerlinie entweder auf einer Senkrechten  $\sigma_m = \text{const.}$  oder auf einer vom Ursprung ausgehenden Geraden für  $R = \text{const.}$  ( $R$ -Wert-Strahl). Alle Schwingfestigkeitswerte liegen im Dreieck, gebildet aus den Geraden  $\sigma_a = 0$ ,  $\sigma_a = \sigma_m - R^c$  und  $\sigma_a = R^t - \sigma_m$ . In den Schnittpunkten der Geraden  $\sigma_a = \sigma_m - R^c$  und  $\sigma_a = R^t - \sigma_m$  mit der Geraden  $\sigma_a = 0$  liegt die Druck- bzw. die Zugfestigkeit. In diese Schnittpunkte münden alle Linien konstanter Lebensdauer bzw. mit konstanter Bruchlastspielzahl. Die Geraden  $\sigma_a = \sigma_m - R^c$  und  $\sigma_a = R^t - \sigma_m$  sind die Linien konstanter Lastspielzahl. Ihr Schnittpunkt liegt auf

Particular care should be taken when selecting and comparing S-N curves as they appear in different sources in the literature. Technical aspects of the test, the shape of the test specimen and how it is clamped will have a decisive influence on test results, as will also test frequency and other factors.

The results of several fatigue tests with different stress ratios  $R$  are summarized in the  $\sigma_a$ - $\sigma_m$  diagram using lines of constant lifespan. This is the so-called *Haigh diagram* [Hai89]. In this way of presenting fatigue strength data, the loading variables  $\sigma_a$  (y axis) are plotted against the  $\sigma_m$  (x axis) with the number of cycles to failure included as a constant which means that starting from the short-term strength, lines of a constant number of cycles to failure are obtained.

Figure 34 shows a simplified form of the Haigh diagram, the so-called *Goodman diagram*. In this kind of diagram the lines with a constant  $R$  value appear as lines radiating from the origin. The lines of constant minimum stress, constant maximum stress and constant  $R$  values are obtained from the relationships of the loading variables as shown beneath Figure 31. Once the S-N curves have been plotted on the Haigh or Goodman diagram, all of the data of an S-N curve will be located either on a vertical  $\sigma_m = \text{const.}$  or on a straight line for  $R = \text{const.}$  ( $R$  value radial) which starts at the origin. All fatigue strength values fall within the triangle formed by the straight lines  $\sigma_a = 0$ ,  $\sigma_a = \sigma_m - R^c$  and  $\sigma_a = R^t - \sigma_m$ . The compressive or tensile strength will be found at the intersections of the straight lines  $\sigma_a = \sigma_m - R^c$  and  $\sigma_a = R^t - \sigma_m$  with the straight line  $\sigma_a = 0$ . All lines with a constant fatigue life, i.e. with constant number of load cycles to failure run into these points of intersection. The straight lines  $\sigma_a = \sigma_m - R^c$  and  $\sigma_a = R^t - \sigma_m$  are the lines of a constant load cycle number. Their point of

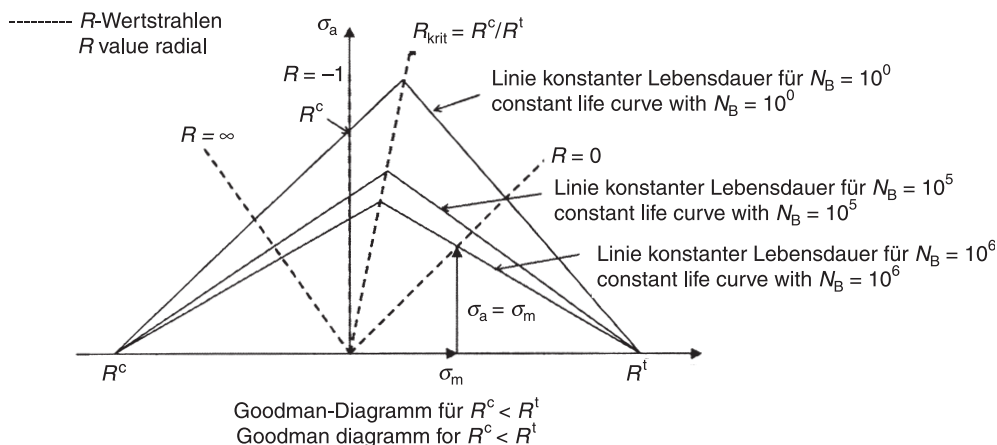


Bild 34. ( $\sigma_a$ ,  $\sigma_m$ )-Diagramm mit Linien konstanter Lebensdauer (Goodman-Diagramm)

Figure 34. ( $\sigma_a$ ,  $\sigma_m$ ) diagram with constant life curves (Goodman diagram)

dem  $R$ -Wert-Strahl für  $R = R^c/R^t$ . Auf diesem  $R$ -Wert-Strahl haben die Linien konstanter Lebensdauer den größten Abstand zur „ $N = 1$ “-Linie. Die Wöhlerlinie für  $R = R^c/R^t$  hat demzufolge die größte Neigung (ungünstigster  $R$ -Wert  $R_{krit}$ , Bild 34).

Um mit einem geringen Aufwand eine gute Schätzung des Verlaufs der Kurven konstanter Lebensdauer zu erreichen, sollte  $R_{krit}$  experimentell ermittelt werden.

**5.4.3 Bauteilbelastungsgeschichte**

Allgemein sollen die bis zum Ende der vorgesehenen Einsatzzeit auftretenden Betriebslasten vom Bauteil sicher ertragen werden; dies wird durch die betriebs- bzw. zeitfeste Bemessung gewährleistet [Ger92].

In der Praxis gemessene Beanspruchungs-Zeit-Abläufe unterscheiden sich je nach Bauteil und Einsatzzweck drastisch in ihren Beanspruchungs-Zeit-Funktionen (Bild 35).

Allgemein lassen sich für (gemessene) Beanspruchungs-Zeit-Funktionen Zeitabschnitte definieren, die alle bauteil- und einsatztypischen schädigenden Beanspruchungen mit ihren relativen Häufigkeiten innerhalb der Einsatzzeit enthalten.

Für den so definierten Betriebszeitabschnitt (auch „Teilfolge“ genannt) werden die Belastungen bezüglich ihrer Größe und Häufigkeit (Überschreitungshäufigkeit) in so genannten Lastspektren zusammengefasst. Für viele Einsatzzwecke gibt es hierzu Standards.

intersection is on the  $R$  value radial for  $R = R^c/R^t$ . On this  $R$ -value radial, the lines of constant lifespan are furthest away from the  $N = 1$  line. The S-N curve for  $R = R^c/R^t$  will accordingly have the greatest slope (most unfavourable  $R$  value  $R_{krit}$ (Figure 34)).

To make it possible to obtain without too much effort a good estimate of the course of the curves of constant lifespan,  $R_{krit}$  should be determined by experiment.

**5.4.3 Component loading history**

In general the operating loads to which a component is exposed should be endured safely until the end of its planned service life. This is ensured by a fatigue analysis based design [Ger92].

History of measured service loads can differ in their loading-time functions depending on the individual component and its intended purpose (Figure 35).

In general, time segments may be defined for (measured) stress-time functions and these segments will contain all damaging loads typical for the component and its use, together with their relative frequencies within the service period.

For the segment of service time defined in this way (also termed the “sub-sequence”), the loads are grouped together into so-called load spectra on the basis of their magnitude and frequency (exceedance frequency). Standards are available for many different end uses.

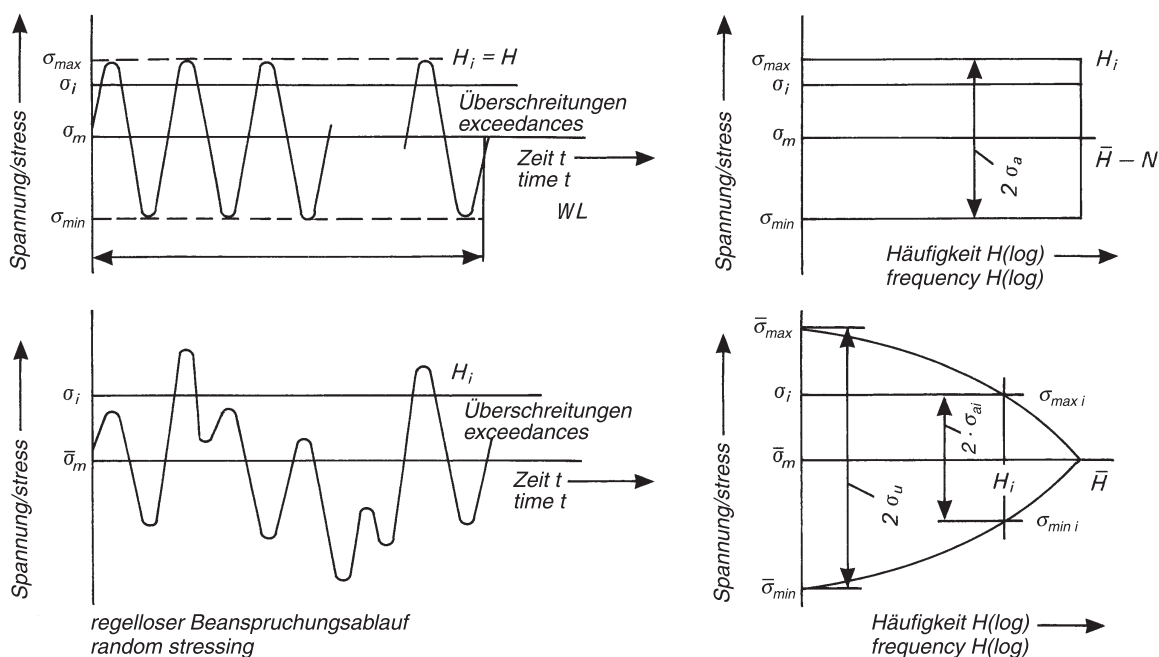


Bild 35. Beispiele für gemessene Beanspruchungs-Zeit-Funktionen und deren Beanspruchungshärte [Hai89]

Figure 35. Examples of measured stress-time functions and their loading severity [Hai89]

Mit diesen Lastspektren werden zur betriebsfesten Bemessung Bruchlebensdauerwerte experimentell oder mittels Miner-Regel und Schwingfestigkeitsdaten (Wöhlerlinien) rechnerisch ermittelt.

Versuche mit zufallsartiger Folge der im Lastspektrum enthaltenen Lasten sind die so genannten Gaßner-Versuche, ihre Ergebnisse sind entsprechend die Gaßnerlinien [Hai89, Seite 40 ff.]. Das Ergebnis eines Gaßner-Versuches besteht wie beim Wöhlerversuch aus einem Datenpaar; und zwar sind es hier die Spannungsamplitude bei der Kollektivhöchstlast und die Bruchschwingspielzahl, das heißt die Gesamtzahl der bis zum Bruch ertragenen Schwingspiele.

#### 5.4.4 Methoden der Schwingfestigkeitsanalyse

Die Führung eines rein rechnerischen Schwingfestigkeitsnachweises für beliebig aufgebaute Laminare, bei dem die in Abschnitt 5.4.1 beschriebene Phänomenologie vollständig berücksichtigt wird, ist heute noch nicht möglich. Die Schädigung von lasttragenden UD-Schichten durch Kerbwirkung infolge von ZFB bei Schwingbelastung und der dadurch ausgelöste Schädigungsfortschritt im Laminat ist rechnerisch nicht zuverlässig voraussagbar.

Die schichtenweise Bruchanalyse ist die beste zur Verfügung stehende Methode zum Nachvollziehen der Vorgänge im Laminat und der einzige zielgerichtete Weg, Verbesserungen im Laminat-Aufbau zu erzielen.

Wegen der geschilderten Schädigungen von Fasern durch ZFB in angrenzenden UD-Schichten (Kerbwirkung) kommt der zuverlässigen Voraussage des ZFB-Geschehens bei Schwingbelastung des Laminates große Bedeutung zu. Wenngleich vorerst mit Hilfe der schichtenweisen Bruchanalyse noch keine rechnerische Voraussage der Schwingfestigkeit beliebiger Laminare möglich ist, ermöglicht sie doch den tiefstmöglichen Einblick. Sie erlaubt für spezielle Laminare zumindest eine grobe Abschätzung der Lebensdauer [Gar93; Puc96a; Gar96]. Der erfahrene FKV-Strukturanalytiker kann anhand der schichtenweisen Bruchanalyse, durchgeführt für die Lastfälle „übliche Betriebslasten“ und „extreme Lastfälle“, eine Vorstellung über die sukzessiven Schädigungsvorgänge im Laminat erlangen und wichtige Rückschlüsse für die Optimierung eines Laminates gewinnen. Sie ermöglicht z.B. eine gezielte Reduktion der ZFB-Anstrengung (z.B. durch Umschichtung oder Umorientierung von Schichten), was sich generell positiv auf die Schwingfestigkeit von Laminaten auswirkt.

In einigen Industriezweigen wird ein vergleichsweise einfacher Schwingfestigkeitsnachweis nach der hier „Lineare Typ 2-WL/Goodman“ genannten Methode praktiziert, der auf der pauschalen Auswertung einer

With these load spectra, values for service life before failure are calculated for fatigue strength quantification either experimentally or by using Miner's rule and fatigue strength data (S-N curves).

Tests with a randomlike sequence of the loads contained in the load spectrum are the so-called Gassner tests whose results are known accordingly as the Gassner curves [Hai89, p. 40 et seq.]. The result of a Gassner test, like that of a S-N test, consists of a data pair, here the stress amplitude in the collective maximum load and the number of load cycles to failure – in other words, the total number of load cycles endured before failure occurs.

#### 5.4.4 Methods of fatigue strength analysis

It is as yet not possible to provide a purely calculation based verification of fatigue strength for laminates of any lay-up which fully takes into account the phenomenology described in Section 5.4.1. Damage to the load-bearing UD lamina due to the notch effect resulting from IFF during cyclic stress and the progress of damage in the laminate which this unleashes cannot as yet be predicted theoretically with any adequate degree of reliability.

Lamina-by-lamina failure analysis is the best method available for understanding the processes occurring in the laminate and the only rational method of achieving improvements in the laminate lay-up.

Due to the damage to fibres caused by IFF in adjacent UD lamina (notch effect) which we have described, a reliable prediction of the IFF event when the laminate is subject to cyclic loading takes on a great importance. Although no theoretical prediction concerning the fatigue strength of any laminate is initially possible with the aid of lamina-by-lamina failure analysis, it does nevertheless allow the most penetrating insight possible into the problem. For special laminates it does at least permit a rough estimation of their service lives [Gar93; Puc96a; Gar96]. With lamina-by-lamina failure analysis carried out for the loading cases of “normal operating stresses” and for “extreme loading cases” the experienced analyst of FRP structures can get a good idea of the successive damage events in the laminate and draw some important conclusions regarding laminate optimization. It may make possible, for example, a deliberate reduction in the IFF stress exposure (for example, by changing the laminae stacking sequence or by re-orienting laminae), something which generally will have a positive effect on the fatigue strength of laminates.

In some branches of industry a comparatively simple verification of fatigue strength is practiced on the basis of the method we have here called the “type 2 S-N/Goodman” method, which is based on an all-in-

breiten Versuchsdatenbasis beruht, aber die spezielle Phänomenologie des jeweiligen Laminates und des angenommenen Lastwechselkollektivs nicht berücksichtigt. Die Versuchsdaten wurden konservativ interpretiert und die Methode wird mit einem entsprechenden Sicherheitsfaktor angewandt [GL99].

Diese Nachweismethode wird nur in Kombination mit einer schichtenweisen Bruchanalyse empfohlen. Die Methode basiert auf folgenden Grundgedanken:

- In Richtlinien [GL99; DNV03] festgelegte Neigungen von linearen Typ-2-Wöhlerlinien für bestimmte FKV-Typen und  $R = -1$  ausgehend von der statischen Kurzzeitfestigkeit (siehe Abschnitt 5.4.2)
- Berücksichtigung des Mittelspannungseinflusses mit Hilfe des Goodman-Diagramms
- Beurteilung des Schädigungsverhaltens und Berechnung der Lebensdauer mit der Miner-Regel

Die lineare Typ-2-WL („Masterwöhlerlinie“) ist hier durch die Kurzzeitfestigkeit und eine Steigung im doppelt-logarithmisch aufgetragenen Wöhlerdiagramm für wechselnde Beanspruchung ( $R = -1$ ) oder für den „kritischen  $R$ -Wert“ definiert. Aus der Typ-2-WL können die zulässigen Lastwechselanzahlen für jedes mögliche Spannungsniveau kleiner als die Kurzzeitfestigkeit entnommen werden.

Für alle Lastfälle, die Beanspruchungen des Laminates mit anderen Verhältnissen von Unter- zu Ober-spannung als  $R = -1$  ergeben, muss aus der Masterwöhlerlinie für  $R = -1$  die für das jeweilige Spannungsverhältnis  $R$  gültige Bruchlastspielzahl ermittelt werden. Die Methode benutzt hierzu das Goodman-Diagramm, siehe Bild 34.

Es ist für Laminates experimentell belegt, dass eine Abhängigkeit der Schwingfestigkeit von der Reihenfolge der Lastwechsel mit großer und kleinerer Amplitude vorhanden ist (Lastfolgeeffekte). Auch diesbezüglich trifft die Methode eine Vereinfachung, indem sie als Schadensakkumulationshypothese die so genannte Miner-Regel anwendet, die solche Effekte vernachlässigt. Es wird für jedes Lastniveau das Verhältnis aus den während der Laminat-Lebensdauer auftretenden Lastwechseln und der für dieses Lastniveau aus der WL ermittelten Bruchlastspielzahl gebildet und diese Verhältnisse zur Schädigungssumme  $D$  addiert, siehe Bild 36).

$$D = \sum_i n_i / N_i \tag{99}$$

Darin ist  $n_i$  die Anzahl der vorhandenen und  $N_i$  die Anzahl der ertragbaren Lastspiele der  $i$ -ten „Lastspielklasse“. Schwingbruch wird nach Miner für  $D = 1$  vorausgesagt.

clusive evaluation of a broad database of test data but which does not take into account the special phenomenology of the laminate in question and of the assumed load cycle spectrum. The test data have been interpreted conservatively and this method is applied with a corresponding safety factor [GL99].

This verification method is only recommended when used in combination with a lamina-by-lamina failure analysis. The method is based on the following fundamental concepts:

- Slopes (defined in guidelines [GL99; DNV03]) of linear type 2 S-N curves for specific types of FRP and  $R = -1$  starting from the statistic short-term strength (see Section 5.4.2)
- Taking into consideration the influence of mean stress with the aid of the Goodman diagram
- Evaluation of the damage behaviour and calculation of the service life using Miner’s rule

The linear type 2 S-N curve (“master S-N curve”) is here defined by the short-term strength and an increase in the log-log S-N diagram for alternating loading ( $R = -1$ ) or for the “critical  $R$  value”. Permissible load-cycle numbers for any possible stress level lower than the short-term strength can be taken from the type 2 S-N curve.

For all load cases which result in loading of the laminate with maximum/minimum stress ratios other than  $R = -1$ , the number of stress cycles before failure applicable to the stress ratio  $R$  in question must be determined from the master S-N curve for  $R = -1$ . To do so, the method makes use of the Goodman diagram (see Figure 34).

It has been demonstrated experimentally for laminates that the fatigue strength is a function of the sequence of load cycles of large and small amplitude (load sequence effect). In this regard too, the method simplifies matters by applying as a damage accumulation hypothesis the so-called Miner’s rule which ignores effects of this kind. For each load level the ratio of the load cycles occurring during the laminate’s service life and the number of stress cycles to failure determined from the S-N curve for this stress level is formed and these ratios added to the damage accumulation  $D$  (Figure 36).

$$D = \sum_i n_i / N_i \tag{99}$$

Here  $n_i$  is the number of completed stress cycles and  $N_i$  the number of stress cycles in the  $i^{\text{th}}$  “stress cycle block” which can be sustained. Fatigue failure is predicted by Miner for  $D = 1$ .

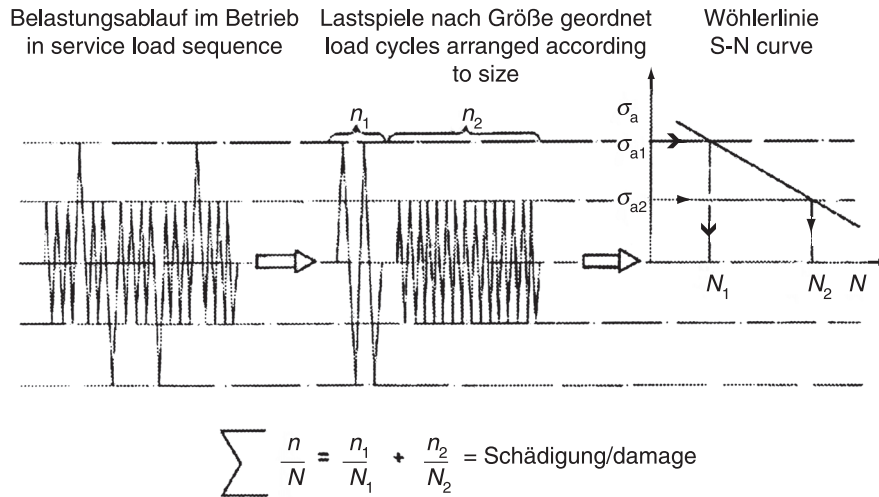


Bild 36. Illustration der Miner-Regel

Figure 36. Illustration of Miner's rule

Die vorhandenen Vergleiche zwischen dieser Voraussage und Versuchen an FKV zeigen, dass die Mehrzahl der mit der Miner-Regel errechneten Lebensdauern um einen Faktor 1 bis 10 überschätzt werden, das heißt auf der *unsicheren* Seite liegen. Nach [Mat92] liegt man mit dem Ansatz  $D = 0,1$  anstelle von  $D = 1$  (Original Miner) für FKV allgemein auf der sicheren Seite.

Existing comparisons between these predictions and FRP tests indicate that the majority of the service lives calculated using Miner's rule are overestimated by a factor of 1 to 10 – in other words, they are on the *unsafe* side. According to [Mat92], using  $D = 0,1$  instead of  $D = 1$  (original Miner) for FRP will generally put one on the safe side.

### 5.4.5 Auslegungshinweise

Wie in Abschnitt 5.4.1 phänomenologisch begründet, ist es bei schwingbeanspruchten FKV-Bauteilen entscheidend, die Beanspruchung des Laminates konstruktiv durch Fasern aufzunehmen (siehe Abschnitt 5.1.1) und damit auch unter Schwingbelastung einen faserdominierten Versagensmodus des gesamten Laminates zu erzwingen, siehe auch Anmerkungen zum Versagensverhalten der UD-Schicht bei Schwingbelastung unter Abschnitt 4.4.3.

### 5.4.5 Advices for design

As has been demonstrated on phenomenological grounds in Section 5.4.1, it is of decisive importance with FRP components subject to cyclic loading to design the component such that the fibres will carry the load in the laminate (see Section 5.1.1) and thus even under cyclic loading to compel a fibre-dominated failure mode of the entire laminate. See also Section 4.4.3 for comments on the failure behaviour of the UD lamina under cyclic stress.

Da die rein rechnerische Auslegung eines FKV-Bauteils unter Schwingbelastung nach heutigem Stand nicht möglich und nicht empfehlenswert ist, werden je nach Komplexität des Bauteils experimentelle Befunde von Schwingfestigkeitsversuchen an Probekörpern, Subkomponenten des Bauteils oder am gesamten Bauteil benötigt.

Since the present state of knowledge means that a purely calculation based design for an FRP component subject to cyclic loading is not possible and not recommended, experimental findings from fatigue strength tests on test specimens, component sub-components or the entire component will be required, depending on the complexity of the component.

Es ist gerade bei Schwingbeanspruchung unabdingbar, ein Bauteil im Versuch zum Versagen zu bringen, um das Versagensverhalten des Laminates analysieren zu können. Ein Bauteil-Schwingversuch muss nicht notwendigerweise an einem Originalbauteil im Maßstab 1:1 ausgeführt werden. Auch FKV-Bauteile, die maßstäblich verkleinert sind (alle Geometriedaten werden so skaliert, dass gleiche Spannungen und nach Möglichkeit gleiche Schichtdicken wie

It is precisely with cyclic loading that taking the tested component to the point of failure is absolutely essential to being able to analyse the failure behaviour of the laminate. Cyclic testing of the component need not necessarily be carried out with a full-size component. Even scaled-down FRP components (all geometrical data are scaled down such that the same stresses and – where possible – the same laminae thickness as in the original component are present)

beim Originalbauteil vorliegen) liefern zuverlässige Ergebnisse.

Nach derzeitigem Stand des Wissens darf die rechnerische Voraussage der Schwingfestigkeit nur für einfach strukturierte Bauteile mit experimentell nachgewiesenem faserdominierten Versagensverhalten oder auf Grund von experimentellen Befunden an ähnlichen erprobten Bauweisen durchgeführt werden. Insofern ist es möglich, eine rechnerische Abschätzung der Schwingfestigkeit von FKV-Bauteilen durch Nachweise an ermüdungskritischen Substrukturen mit klarem Versagensverhalten zu erhalten. Bei Rotorblättern von Windenergieanlagen oder Tragflächen von Segelflugzeugen wäre dies ein getrennter Schwingfestigkeitsnachweis für die nachzuweisenden Substrukturen wie Holmgurte, Stege und Schale.

## 5.5 Anwendung von Berechnungsprogrammen

### 5.5.1 Laminat-Analyseprogramme

Es existiert eine große Zahl von Laminat-Analyseprogrammen auf Basis der CLT (siehe Abschnitt „Berechnungssoftware“). Mit ihrer Hilfe können bei bekannten Schnittgrößen für verschiedene Bauteilbereiche geeignete Laminat ausgelegt werden.

Durch entsprechende Wahl der Eingabedaten für die Schichtkennwerte kann man mit CLT-Programmen auch nach der Netztheorie rechnen.

Auch räumlich beanspruchte Laminat können mit der CLT analysiert werden. So sind für räumlich beanspruchte dickwandige FKV-Rohre spezielle Programme entwickelt worden [Jak87; Kro92].

Für die schichtenweise Bruchanalyse von Laminaten wurde in jüngster Zeit ein spezielles Rechenprogramm am Fachgebiet „Konstruktiver Leichtbau und Bauweisen (KLuB)“ der TU Darmstadt (Programm AlfaLam.nl, Advanced layerwise failure analysis of **Laminates.nonlinear**) entwickelt.

Dieses Programm berücksichtigt das nichtlineare Verhalten der Einzelschicht und den Stand der Technik in Bezug auf das Festigkeitsverhalten von Laminaten wie in Abschnitt 5.2 angegeben. Das nichtlineare Werkstoffverhalten kann an Hand eines physikalisch begründeten allgemeinen Modells (siehe [Puc07]) oder von Messdaten einfließen. Zusätzlich wird die Schichtwinkeländerung, die infolge der Laminatverzerrung im Verlauf der nichtlinearen Berechnung auftritt, berücksichtigt.

Das Programm kann als Freeware von der Internetseite des Fachgebiets KLuB herunter geladen werden (Details siehe Abschnitt „Berechnungssoftware“ im Anschluss an das Schrifttum).

may supply trustworthy results.

According to the present state of knowledge, calculation-based prediction of fatigue strength should only be made for components with a simple structure and experimentally demonstrated fibre-dominated failure behaviour or on the basis of experimental findings with similarly tested designs. If possible, a calculated estimate of the fatigue strength of FRP components should be obtained by means of analyses of fatigue critical sub-structures with clear failure behaviour. In the case of rotor blades in wind-energy installations or glider aerofoils, for example, this would mean a separate fatigue strength analysis for the relevant sub-structures such as spars, webs and skin.

## 5.5 Application of calculation programs

### 5.5.1 Laminate analysis programs

There is a large number of laminate analysis programs based on CLT (see Section “Calculation Software”). With their help suitable laminates can be designed when the section forces and moments are known for the various parts of the component.

Provided a suitable choice of input data for the lamina properties has been made, it is also possible to calculate on the basis of netting theory by means of CLT programs.

Laminates subject to a three-dimensional stress state can also be analysed by means of CLT. For thick FRP tubes subject to three-dimensional stresses special programs have been developed [Jak87; Kro92].

With regard to the lamina-by-lamina fracture analysis of laminates a specialized calculation software has recently been developed at the Institute “Konstruktiver Leichtbau und Bauweisen (KLuB)” of Darmstadt Technical University (Program name AlfaLam.nl, Advanced layerwise failure analysis of **Laminates.nonlinear**).

This software considers the non-linear behaviour of the lamina and the state of the art regarding to the strength of laminates as given in Section 5.2. The non-linear material behaviour can be incorporated by using a physically based universal model (see [Puc07]) or by means of measured data. In addition the lamina angle variation due to the laminate deformation during the nonlinear calculation is considered.

The software is available as freeware and can be downloaded from the Internet home pages of the above mentioned institute (For details see Section “Calculation Software” following the Bibliography).

**5.5.2 FEM**

Die FEM-Analyse für Bauteile, die aus Laminaten mit dünnen, eben beanspruchten Schichten bestehen, wird mit Hilfe so genannter „geschichteter Schalenelemente“ (layered shell elements) durchgeführt. Das Bauteil muss hierzu nur in seiner flächigen Ausdehnung generiert werden. Der Laminat-Aufbau und die daraus resultierende Wanddicke wird den Schalenelementen als „physikalische Eigenschaft“ zugewiesen. Es werden die Schicht-Werkstoffkennwerte (Tabelle 1), die Schicht-Orientierungswinkel und -dicken eingegeben.

Die geschichteten Schalenelemente beruhen aufgrund numerischer Vorteile in aller Regel **nicht** auf der klassischen Laminattheorie (CLT), sondern auf der Schubverformungstheorie erster Ordnung (Whitney-Pagano-Theorie; bei isotropem Werkstoff die Mindlin-Reissner-Theorie), die die transversale Schubverzerrung beinhaltet. Sie liefern daher häufig auch Werte für die Querschubspannungen. Hier ist jedoch Vorsicht geboten, da der Benutzer in der Regel keinen Einblick in die zu Grunde liegende Theorie hat. Wurden die Querschubspannungen aus dem Materialgesetz ermittelt, so sind sie schichtweise konstant und zumeist von schlechter Qualität. Einige neuere Programme benutzen stattdessen intern die Gleichgewichtsbedingungen zur Ermittlung der Querschubspannungen (siehe auch Abschnitt 5.1.3) und liefern weit bessere Ergebnisse. Die Quernormalspannung wird in der Regel nicht berechnet. Hierzu existieren aber bereits neue Verfahren [RoI97; RoI98].

Einige FEM-Programme bieten spezielle Sandwichelemente an, die die Schubweichheit des Kerns berücksichtigen [Zen97]. Ferner unterscheiden sich finite Schalenelemente hinsichtlich des verwendeten Verschiebungsansatzes (siehe Bild 37).

Sind räumliche Spannungszustände zu erwarten, wie beispielsweise im Bereich von Krafteinleitungen und

**5.5.2 FEM**

FEM for components consisting of laminates with thin, inplane loaded laminae is carried out with the aid of so-called “layered shell elements”. Here the component only needs to be generated in its planar extension. The laminate lay-up and the wall thickness resulting from this are assigned to the shell elements as a “physical property”. The material properties of the lamina (Table 1), and the orientation angles and thicknesses of the layer are input.

Layered shell elements are regularly not based on the classical laminate theory (CLT) due to numerical advantages but on the shear deformation theory of first order/(Whitney-Pagano-theory; in case of isotropic material the Mindlin-Reissner theory) which includes the transversal shear strain. Therefore, they often deliver values for the transversal shear stresses. However one has to pay attention here because the user has no got any insight into the fundamentals of the theory. If the transversal shear stresses are established from the material law then they are layer-wise constant and most often of a bad quality. In place of the above methods some new programmes internally utilize the equilibrium equations for the determination of the transversal shear stresses (see Section 5.1.3) delivering much better results. Normally, a transversal normal stress will be not computed. However new procedures already exist [RoI97; RoI98] for this.

Some FEM programs offer special sandwich elements which take into account the shear compliance of the core [Zen97]. In addition, finite shell elements may be distinguished on the basis of the displacement approaches used (Figure 37).

If three-dimensional stress states are to be expected – such as in the region of load introduction areas and in

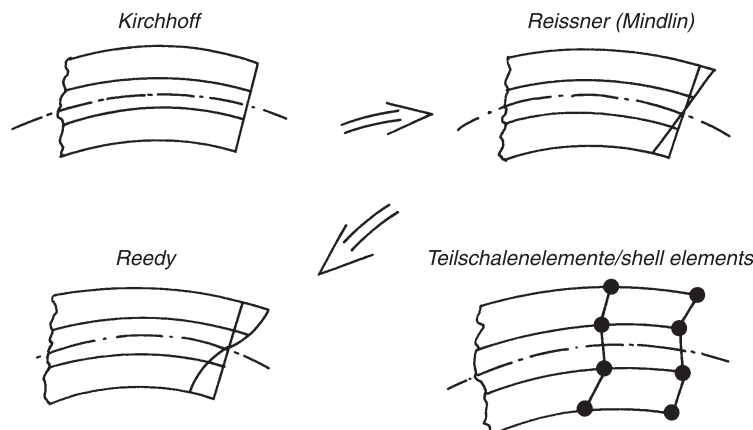


Bild 37. Verschiebungsansätze für Laminat-Shell

Figure 37. Displacement approaches for laminated shells

bei dickwandigen Laminaten, wird die FEM-Modellierung deutlich aufwändiger. Für räumlich beanspruchte Schichten gibt es noch kein ingenieurgerechtes „Laminatenelement“, das in kommerzieller Software verfügbar wäre. Hierarchische Elementformulierungen, die die Zusammenfassung vieler Schichten in einem Volumenelement erlauben, wurden aber bereits entwickelt [Kuh04]. Bei Verwendung kommerzieller Programme muss noch jede Schicht mit Volumenelementen modelliert werden, wobei mehr als ein Element für die Dicke jeder Schicht empfohlen wird. Dies führt in der Regel zu einer sehr hohen Elementanzahl und damit langen Rechenzeiten und großem Speicherplatzbedarf.

Bei der Verwendung von FEM-Programmen ist der richtigen Eingabe der Orientierungswinkel besondere Beachtung zu widmen. Man unterscheidet in der Regel das globale Bauteil-, das Element- und das Werkstoff-KOS. Die Schicht-Eingabedaten liegen im Werkstoff-KOS vor. Die Orientierungswinkel werden oft bezogen auf das Element-KOS definiert. Es kann nur ein konstanter Orientierungswinkel für die gesamten Elementabmessungen eingegeben werden. Bei im Durchmesser veränderlichen und im Wickelverfahren hergestellten Bauteilen, bei denen der Winkel lokal veränderlich ist, muss dann der mittlere Winkel eingegeben und dieser für jede Elementreihe neu bestimmt werden.

Ebenso ist beim „Postprocessing“ von Schicht-Berechnungsergebnissen darauf zu achten, dass wieder das Werkstoff-KOS verwendet wird.

### 5.5.3 Berechnung des Streckungsfaktors $f_S^L$ der lastbedingten Spannungen bei gleichzeitig vorhandenen Eigenspannungen

In Abschnitte 4.5 und Abschnitt 5.2 wurde als Maß dafür, wie weit ein zu beurteilender Spannungszustand einer Schicht vom Bruchzustand entfernt ist, die Anstrengung  $f_E$  benutzt. Kein Bruch tritt ein, wenn  $f_E < 1$  ist,  $f_E \geq 1$  bedeutet Bruch. Weil damit im allgemeinen Fall keine direkte Antwort auf die den Konstrukteur hauptsächlich interessierende Frage möglich ist, um welchen Faktor die vorhandenen *lastbedingten Spannungen* noch gesteigert werden können, bis der Bruch eintritt, wird im Folgenden beschrieben, wie man einen Steigerungsfaktor der lastbedingten Schichtspannungen ermitteln kann.

Für den *Kehrwert der Anstrengung*  $f_E$ , die als das Verhältnis der Länge des resultierenden Vektors  $\{\sigma\}$  der auftretenden Spannungen zur Länge des zugehörigen Bruchvektors  $\{\sigma\}_{fr}$  definiert ist (siehe Bild 12 und Bild 38a), wird als einprägsamer Begriff der des *Streckungsfaktors*  $f_S$  benutzt. Dies ist jener (Steigerungs-)Faktor, mit dem die vorhandenen Spannungen

thick-walled laminates, for example – then the FEM modelling will be considerably more complex. As yet no “laminatenelement” suitable for engineering design purposes exists for three-dimensionally stressed laminae, which would be available in commercial software. Hierarchical element formulations permitting the summing-up of many layers in one volume element are already developed [Kuh04]. When applying commercial programmes each lamina needs to be modelled using volume elements, and here more than one element is recommended over the thickness of each lamina. This usually results in a large number of elements and a great deal of computing time and data storage space being required.

When FEM programs are used, special attention should be given to the correct inputting of the orientation angle. As a rule a distinction is drawn between the global component COS, the element COS and the material COS. The lamina input data are found in the material COS. The orientation angles are frequently defined with respect to the element COS. Only one constant orientation angle may be input for the entirety of the element dimensions. In the case of components with a changing diameter and manufactured by a winding process, where the angle changes locally, the mean angle will have to be input and this angle will need to be determined afresh for each series of elements.

Similarly, in post-processing of lamina calculation results, care should be taken that the material COS is again used.

### 5.5.3 Calculation of the stretch factor $f_S^L$ of the load-determined stresses when residual stresses are also present

In Section 4.5 and Section 5.2, the stress exposure  $f_E$  was used as a measure, when judging a stress state, of how far the stress state in a lamina is from the fracture state. Fracture will not occur if  $f_E < 1$  while  $f_E \geq 1$  does mean fracture. This means that in the general case there can be no direct answer to the question which mainly interests the designer that is, by what factor the existing *load-determined stresses* can be further increased before fracture occurs. In what follows we will describe how it is possible to obtain an increase factor for the load-determined lamina stresses.

For the *reciprocal of the stress exposure*  $f_E$  which is defined as the ratio between the length of the resulting vector  $\{\sigma\}$  of the stresses occurring and the length of the corresponding fracture vector  $\{\sigma\}_{fr}$  (see Figure 12 and Figure 38a), an expressive term is used: the *stretch factor*  $f_S$ . This is the (increase) factor by which the existing stresses must be multiplied un-



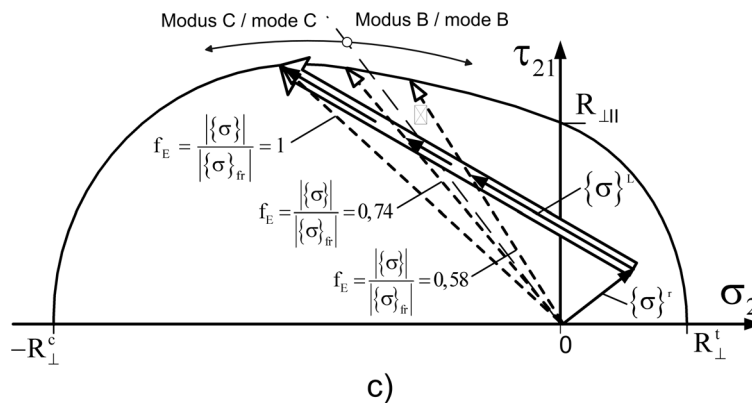
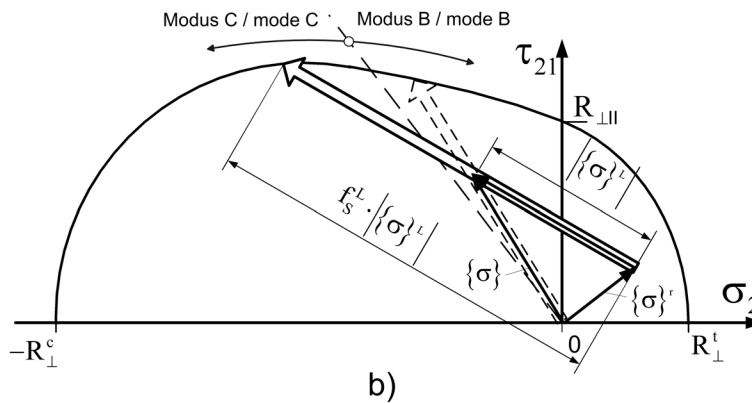
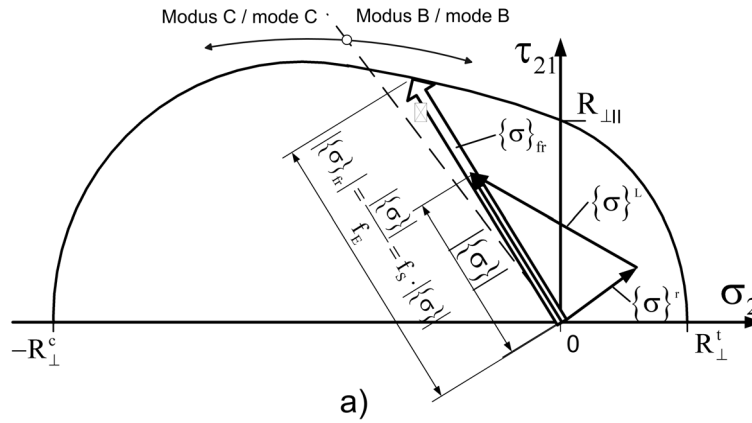


Bild 38. Zur Definition von Anstrengung  $f_E$  (siehe auch Bild 12), Streckungsfaktor  $f_S$  und Streckungsfaktor der lastbedingten Spannungen  $f_S^L$

- a) Definition von Anstrengung  $f_E$  und Streckungsfaktor:  $f_S = 1/f_E$
- b) Streckungsfaktor  $f_S^L$  der lastbedingten Spannungen bei gleichzeitig wirkenden Eigenspannungen
- c) Veränderung des Wertes der Anstrengung  $f_E$  bei stufenweiser Steigerung der lastbedingten Spannungen

Figure 38. Definition of stress exposure  $f_E$  (see also Figure 12), stretch factor  $f_S$  and stretch factor of the load-determined stresses  $f_S^L$

- a) Definition of stress exposure  $f_E$  and stretch factor:  $f_S = 1/f_E$
- b) Stretch factor  $f_S^L$  of the load-determined stresses while residual stresses exist
- c) Change of stress exposure  $f_E$  due to a stepwise increase of the load-determined stresses

multipliziert werden müssen bis die Bruchgrenze erreicht wird, siehe Bild 38a. Dabei wird der resultierende Vektor der vorhandenen Spannungen *unter Beibehaltung seiner Richtung* so weit verlängert („gestreckt“), bis er die Bruchkurve erreicht.

til the fracture limit is reached (see Figure 38a). Here the resulting vector of the stresses present is extended (stretched) *while retaining its direction* until it reaches the fracture curve.

In der Praxis liegt meistens der Fall vor, dass sich den mit der Belastung des Laminates *anwachsenden lastbedingten Spannungen* in einer Schicht annähernd *konstante Eigenspannungen* (z.B. infolge einer Differenz zwischen der Aushärtungstemperatur und der Betriebstemperatur des Bauteils) überlagern. Aus Bild 38b ist ersichtlich, dass vorhandenen Eigenspannungen sogar den Bruchmodus der Schicht ändern können. Würde man den im Bild 38b eingetragenen resultierenden Spannungsvektor  $\{\sigma\}$  als rein lastbedingten Spannungsvektor auffassen, dann würde dieser zu einem ZFB des Modus B führen (gestrichelter Pfeil in Bild 38b). Steigert man jedoch den lastbedingten Spannungsvektor  $\{\sigma\}^L$  bei gleichzeitig vorhandenen Eigenspannungen  $\{\sigma\}^r$  bis zur Bruchgrenze, dann hat dies einen ZFB des Modus C zur Folge.

Will man an einem Laminat einen lastbedingten Spannungszustand beurteilen, der mit Eigenspannungen überlagert ist, so ist für die zu berechnende Anstrengung der Schicht die in Bild 12 und Bild 38a angegebene Definition zu beachten. In diesem Fall liefert der Streckungsfaktor  $f_s$ , der als Kehrwert der Anstrengung  $f_E$  definiert ist, keine sinnvolle Information für den Konstrukteur. Der so berechnete Streckungsfaktor bezieht sich nämlich auf den in der Praxis seltenen Fall, dass der Eigen- und der Lastspannungszustand gleichzeitig proportional zueinander bis zum Bruch gesteigert (gestreckt) werden. Sinnvoll ist es, einen nur auf die lastbedingten Spannungen bezogenen Streckungsfaktor einzuführen, der zur Unterscheidung von  $f_s$  mit  $f_s^L$  bezeichnet wird, siehe Bild 38b.

Einen ersten groben Überblick über die unterschiedliche Bruchgefahr in den Schichten eines Laminates infolge von anwachsenden lastbedingten Spannungen bei gleichzeitig wirkenden konstanten Eigenspannungen kann man sich durch eine direkte Berechnung der Streckungsfaktoren  $f_s^L$  der lastbedingten Spannungen der Schichten verschaffen. Die dazu benötigten Formeln auf der Basis der wirkebenebezogenen ZFB-Kriterien nach den Gleichungen (45) bis (47) für ebene Spannungszustände sind im Anhang A2 aufgeführt. Die darin vorkommenden lastbedingten Spannungen und Eigenspannungen berechnet man zunächst in einem Schritt mit der linearelastischen schichtenweisen Spannungsanalyse für die maßgebende Betriebslast und -temperatur. Aus den mit den Gleichungen im Anhang A2 berechneten Werten für  $f_s^L$  der einzelnen Schichten wird dann schnell erkennbar, welche die bei einer Laststeigerung am meisten ZFB-gefährdeten Schichten sind. Auf diese kann man sich bei der Verbesserung des Laminataufbaus zunächst konzentrieren.

What is normally found in practice is the case where approximately *constant residual stresses* (for example, resulting from a difference between the curing temperature and the operating temperature of the component) are superimposed on the *load-determined stresses* in a lamina which *increase as the load on the laminate increases*. It is evident from Figure 38b that existing residual stresses can even change the fracture mode of the lamina. If the resulting stress vector  $\{\sigma\}$  shown in Figure 38b is supposed to be purely load determined then this would result in an IFF of mode B (dashed arrow in Figure 38b). However if the load-determined stress vector  $\{\sigma\}^L$  is stretched while residual stresses  $\{\sigma\}^r$  exist this will lead to an IFF of mode C.

If you wish to assess a load-determined stress state in a laminate where this stress state has superimposed residual stresses, for the lamina's stress exposure which is to be calculated you will need to take into account the definition provided in Figure 12 and Figure 38a. In this case the stretch factor  $f_s$  as the reciprocal of the stress exposure  $f_E$  would not provide the designer with useful information. This is because a stretch factor calculated in this manner relates to a case seldom met in practice whereby the residual and the load stress states are increased (stretched) simultaneously proportionally to each other up until fracture. What makes sense is to introduce a stretch factor which relates solely to the load-determined stresses and which is – in order to distinguish it from  $f_s$  – referred to as  $f_s^L$  (see Figure 38b).

A first rough overview of the various failure risks in the laminae of a laminate which result from growing load-determined stresses coupled with simultaneously acting constant residual stresses may be obtained by a direct calculation of the stretch factors  $f_s^L$  of the load-determined stresses in the laminae. The requisite formulae based on action-plane IFF criteria according to Equations (45) to (47) are provided for plane stress state in Annex A2. The load-determined stresses and residual stresses found in these are first calculated in a single step with the linear-elastic lamina-by-lamina stress analysis for the decisive operating load and temperature. From the values of  $f_s^L$  of the individual laminae calculated using the equations in Annex A2 it can then be rapidly seen which are the laminae most at risk of IFF in case of increasing the load. Improvement work on the laminate structure can initially concentrate on these laminae first.

Ein alternativer Weg zur Bestimmung des Streckungsfaktors der lastbedingten Spannungen  $f_S^L$  einer betrachteten Schicht ohne Benutzung der Gleichungen im Anhang A2 ist die iterative Erhöhung der lastbedingten Spannungen dieser Schicht (bei gleichzeitig festgehaltenen Eigenspannungen) so lange, bis sich für diese Schicht die Anstrengung  $f_E = 1$  ergibt, das heißt die Bruchgrenze erreicht ist, siehe Bild 38c. Den gesuchten Streckungsfaktor der lastbedingten Spannungen  $f_S^L$  erhält man dann als Verhältnis der lastbedingten Spannungen beim Bruch zu den am Belastungsbeginn tatsächlich vorhandenen lastbedingten Spannungen der Schicht.

Für einen genaueren Festigkeitsnachweis ist die Anwendung der nichtlinearen schichtenweisen Bruchanalyse nach Abschnitt 5.2 geboten. Dabei kann es sich zeigen, dass die in der vorangegangenen linear elastischen Analyse als am höchsten ZFB-gefährdet erkannte Schicht nicht mehr die am höchsten gefährdete ist. (Damit muss insbesondere dann gerechnet werden, wenn bei der linear-elastischen Rechnung für mehrere Schichten etwa gleich hohe  $f_S^L$ -Werte gefunden wurden.)

## 6 Bauteilberechnung

Die Spannungs-, Verformungs- und Festigkeitsanalyse von FKV-Bauteilen basiert bezüglich der Modellierung des Laminates, aus dem die Bauteilwandung besteht, auf den Ausführungen in Abschnitt 5.

Die dort gegebenen Hinweise können ohne Einschränkung für die Bauteilberechnung angewandt werden. Darüber hinaus wird in Abschnitt 6.2 die Stabilitätsberechnung und in Abschnitt 6.3 die Berechnung von Verbindungen und Krafeinleitungen dargestellt.

### 6.1 Allgemeines

Der Ablauf der Bauteilberechnung ist kurz in Bild 5 und ausführlich im Bild 39 skizziert.

Für die Spannungs-, Verformungs- und Festigkeitsanalyse ist zwischen statisch bestimmten und statisch unbestimmten FKV-Bauteilen wie folgt zu unterscheiden:

- *Statisch bestimmte* Bauteile: Die Berechnung der globalen Schnittgrößen und Verformungen kann – unter Zugrundelegung von Bauteilsteifigkeiten aus der Laminat-Berechnung (Abschnitt 5) – mit Hilfe analytischer Formeln erfolgen (z.B. Torsionsrohre, statisch bestimmte Biegeträger, Druckbehälter).
- *Statisch unbestimmte* Bauteile, Platten, Schalen: Die Berechnung der Schnittkräfte und Verformun-

Another way of determining the stretch factor of the load determined stresses  $f_S^L$  of a particular lamina and which does not use the equations in Annex A2 is to increase the load-determined stresses of this lamina (while keeping the residual stresses constant) iteratively until you obtain the stress exposure  $f_E = 1$  for this lamina – in other words, the fracture limit has been reached (see Figure 38c). The desired stretch factor of the load determined stresses  $f_S^L$  is then obtained as the ratio between the load-determined stresses at fracture and the load-determined stresses in the lamina which were actually present when loading started.

If a more precise calculation of strength is required, it is advisable to use the non-linear lamina-by-lamina fracture analysis described in Section 5.2. This may reveal that the lamina which the previous linear-elastic analysis indicated to be the one most at risk of IFF is in fact no longer the lamina most endangered. (This is especially to be expected when linear-elastic analysis for multiple laminae delivered  $f_S^L$  values of roughly the same value.)

## 6 Analysis of FRP components

The stress, deformation and strength analysis of FRP components is based, as regards the modelling of the laminate from which the component walls are made, on the exposition provided in Section 5.

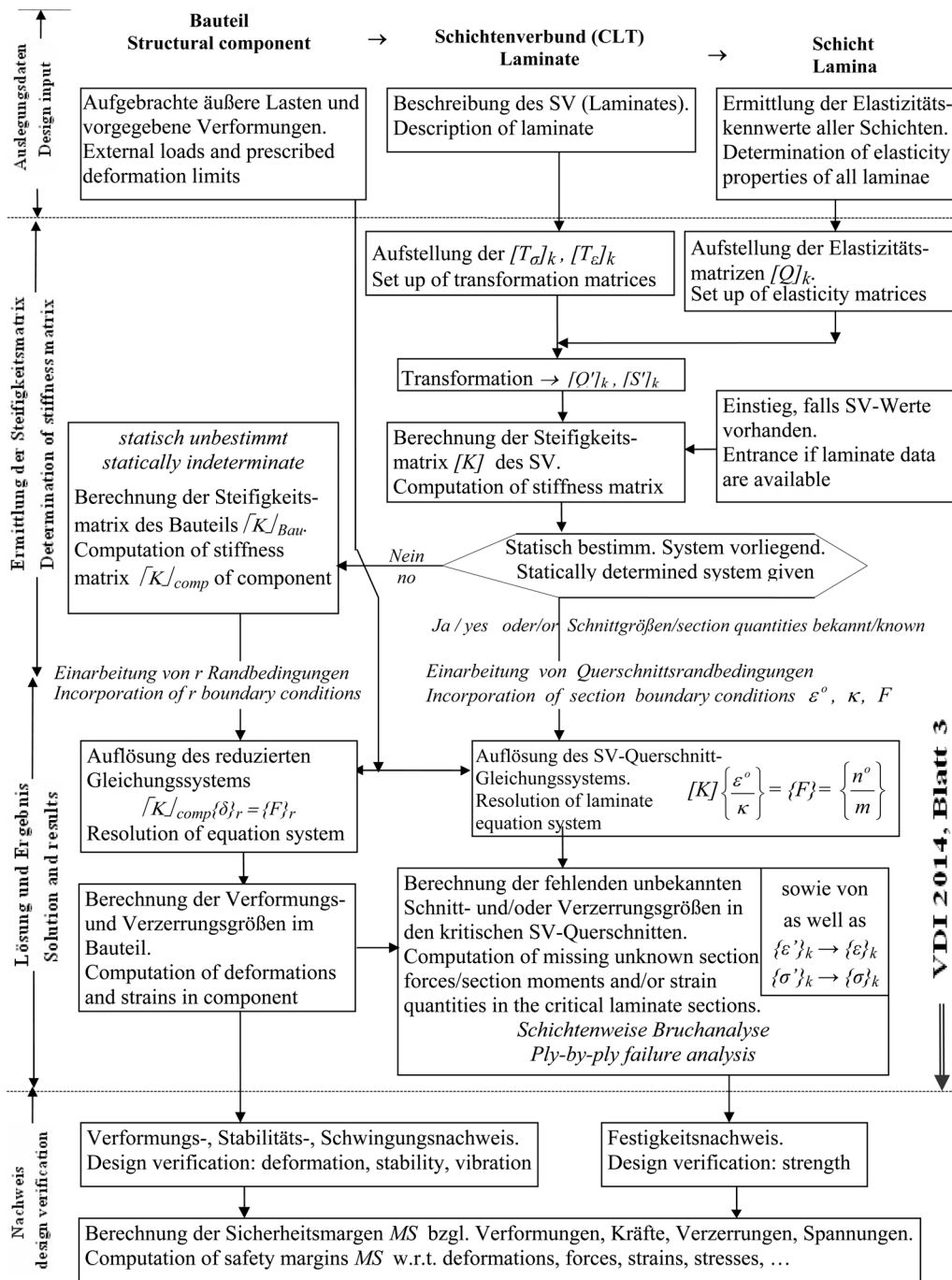
The information given there may be applied without restriction to component analysis. In addition, stability analysis is dealt with in Section 6.2 and analysis of connections and load introduction features in Section 6.3.

### 6.1 General comments

A summarizing flow chart was provided in Figure 5, while a detailed diagram follows (Figure 39).

For stress, deformation and strength analyses, a distinction is drawn as follows between statically determinate and statically indeterminate FRP components:

- *Statically determinate* components: Global section forces, section moments and strains can be calculated with the aid of analytic formulae, on the basis of component stiffness values obtained from the laminate analysis (Section 5) (for example, torsion tubes, statically determined beams subject to bending, pressurized containers).
- *Statically indeterminate* components, plates, shells: Section forces and strains are calculated



VDI 2014, Blatt 3

Bild 39. Bauteil-Berechnungsablauf

Figure 39. Component analysis flow chart

gen wird unter Zugrundelegung der in Abschnitt 5 berechneten Laminate-Steifigkeiten mit Hilfe von analytischen Formeln [Jon75] oder mit FEM durchgeführt (siehe Abschnitt 5.4).

Die im Anschluss an die Spannungs- und Verformungsanalyse durchzuführende Festigkeitsanalyse von hochbeanspruchten FKV-Bauteilen erfordert jedoch im Allgemeinen eine Absicherung durch Versuche. Umgekehrt sollen Bauteilversuche nie ohne begleitende Bauteilberechnung durchgeführt werden. Sowohl die Vorausberechnung als auch die Nach-

with the aid of analytic formulae, on the basis of the laminate stiffness values calculated in Section 5 [Jon75] or by using FEM obtained from the laminate analysis (see Section 5.4).

The strength analysis which should be carried out following the stress and strain analyses, does however generally require to be backed up by tests. The reverse is also true: component tests should never be carried out without an accompanying component analysis. Both, preliminary analysis and post-analysis of a test make for a better evaluation of test results

rechnung eines Versuches erlauben eine verbesserte Beurteilung des Versuchsergebnisses und ermöglichen meist die Extrapolation des Versuchsergebnisses auf andere ähnliche Bauteile.

Auch in Abschnitt 6 wird so wie in den anderen Abschnitten nicht auf Nachweis- und Qualifikationsverfahren für FKV-Bauteile eingegangen. In Abschnitt 6.2 werden Formeln für die Stabilitätsberechnung einfacher FKV-Bauteile angegeben. Diese basieren ausschließlich auf der linearen Stabilitätstheorie (Theorie der Gleichgewichtsverzweigung).

**6.2 Stabilitätsberechnungen**

Wenn in einem Bauteil Druckspannungen existieren, kann der anfängliche, das heißt der bei geringer Belastung wirkende Spannungs- und Verformungszustand, der *Grundzustand*, instabil werden. Das Bauteil ist dann bestrebt, sich einem weiteren Anwachsen der Druckspannungen durch seitliches Ausweichen zu entziehen. Diese zumeist unvermittelt erfolgende und häufig sehr heftig ablaufende Verformung quer zur Richtung der Druckspannungen wird bei Linienträgern (Stäben und Balken) als *Knickung* bzw. *Kippung* und bei Flächenträgern (Platten, Schalen) als *Beulung* bezeichnet. Die Belastungen, bei denen die Knickung (Beulung) eintritt, werden als *Knicklasten* (*Beullasten*) bezeichnet. Sie sind Grenzen, bei denen der Grundzustand instabil wird. Deshalb liegt ein *Stabilitätsproblem* vor. Das Muster der Verformung, die sich dem Grundzustand überlagert, ist die *Knickform* bzw. *Beulform*.

Bild 40 dient der Erklärung einiger Begriffe. Es zeigt den Verlauf der Druckkraft als Funktion der Stauchung für ein fiktives Tragwerkselement. Die

and in most cases allow test results to be transferred to similar components.

As in the other sections, Section 6 will not be dealing with verification and qualification procedures for FRP components. Section 6.2 provides formulae for the stability analysis of simple FRP components. They are based exclusively on the linear stability theory (theory of equilibrium bifurcation).

**6.2 Stability analyses**

If there are compressive stresses in a component, the initial state – in other words, the state of stress and strain effective under low loading – the so-called *fundamental state* can become instable. The component then endeavours to escape further growth in the compressive stresses by lateral deflection. This deformation transversely to the direction of the compressive stresses which usually occurs suddenly and frequently proceeds very violently is known as *buckling* in the case of linear load-bearing members (columns and beams) and also in the case of plates and shells although different terms are available in German for these two cases. The loads at which buckling occurs are termed *buckling loads*. These are limits at which the fundamental state becomes instable. For this reason a *stability problem* is present. The pattern of deformation which superimposes itself on the fundamental state is the *buckling mode*.

Figure 40 will help to explain some terms. It shows the compressive force plotted as a function of the compressive strain on an imaginary load-bearing

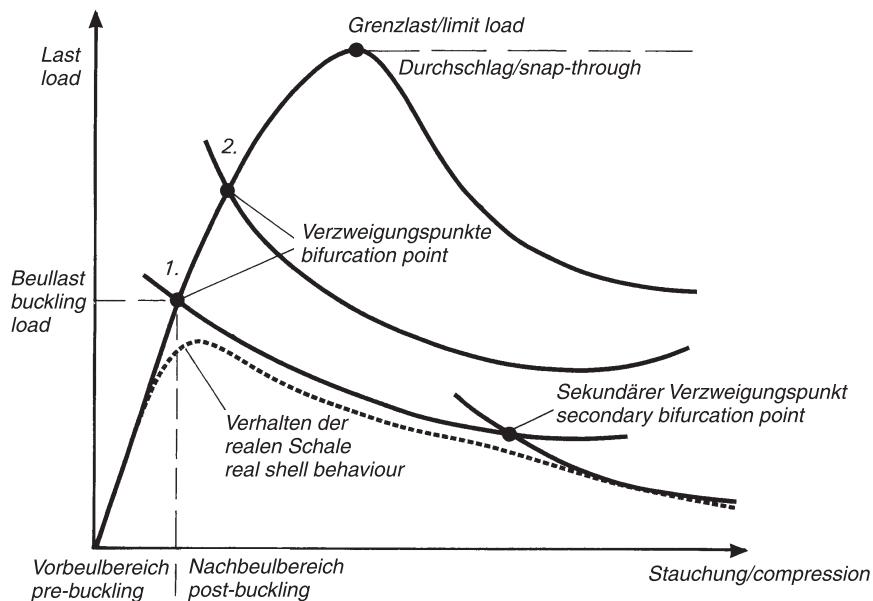


Bild 40. Beulverhalten dünnwandiger Schalen

Figure 40. Buckling behaviour of thin-walled shells

vom Nullpunkt ausgehende Last-Stauchungskurve verläuft zunächst linear und bei höherer Stauchung degressiv. Sie erreicht schließlich ein Lastmaximum, eine *Grenzlast*, und fällt danach wieder ab. Diese Last-Stauchungskurve gehört zum elementaren Spannungs- und Verformungszustand, der im Zusammenhang mit Knick- und Beulproblemen als *Grundzustand* bezeichnet wird.

Bei bestimmten Lasten, den *kritischen* Lasten, zweigen vom Grundzustand weitere Last-Stauchungskurven ab. Die Gleichgewichtszustände entlang dieser Abzweigungen sind mit rasch wachsenden Verformungen senkrecht zur Schalenfläche bzw. Stabachse verbunden. Die Kurven sind *Nachbeulkurven*, die Verformungsmuster sind *Nachbeulmuster*. Die Schnittpunkte der Nachbeulkurven mit der Last-Stauchungskurve des Grundzustandes werden als *Verzweigungspunkte* bezeichnet. Die niedrigste kritische Last ist die *Beullast*. Das Verformungsmuster, das sich dem Grundzustand unmittelbar nach der Verzweigung überlagert, ist die *Beulform*. Bei manchen Schalen liegen unterhalb der Grenzlast keine Verzweigungspunkte. In diesem Fall erfolgt vom Maximum aus ein *Durchschlagen* in eine Gleichgewichtslage mit großen Verformungen.

In der Realität weisen Strukturen Abweichungen von der idealen Gestalt auf, die als *Vorbeulen* bezeichnet werden, oder die Lasten werden nicht genau den Annahmen entsprechend eingeleitet, oder – und das trifft besonders für FKV-Strukturen zu – die Steifigkeiten zeigen örtliche Abweichungen von den Sollwerten (z. B. als Folge von Delaminationen). Diese Unregelmäßigkeiten werden unter dem Begriff *Imperfektionen* zusammengefasst. In Bild 40 deutet die gestrichelte Kurve an, in welcher Weise sich die Imperfektionen auf das Beulverhalten auswirken: Sie mindern die Traglast ab, sodass sie unterhalb der theoretischen Beullast liegt.

Für FKV-Strukturen ist die Beulung der Flächenträger von größerer Bedeutung als die Stabknickung oder das Kippen. Deshalb wird für Stäbe nur die Euler'sche Knicklast angegeben. Bei den Flächenträgern werden für Beulasten und Beulformen von Platten und zylindrischen Schalen mehrere Formeln aufgeführt, die einige Lastfälle abdecken. Es ist aber zu beachten, dass solche Formeln nur für idealisierte Strukturen wie ebene rechteckige Platten oder Kreiszyylinder mit gelenkig und ohne Wölbbehinderung gelagerten Rändern angegeben werden können. Auch die Grundzustände sind idealisiert; denn es wird vorausgesetzt, dass die Spannungen an jeder Stelle der Struktur gleich sind. Eine genauere Erfassung der tatsächlichen Formen der Strukturen, der Randbedingungen und der Spannungszustände ist durch nume-

structural element. The load-compression curve departing from the origin first runs in a straight line and at higher levels of compressive strain is degressive. It finally reaches a load maximum, a *limit load*, after which it falls. This load-compression curve belongs to the elementary stress and strain state which in connection with buckling problems is known as the *fundamental state*.

With certain loads, the *critical* loads, other load-compression curves branch off from the fundamental state. The equilibrium states along these branches are associated with rapidly increasing displacement vertical to the shell surface or strut axis. These curves are termed *post-buckling curves* and the deformation patterns are known as *post-buckling patterns*. The points at which the post-buckling curves intersect the load-compression curve of the fundamental state are called *bifurcation points*. The lowest critical load is the *buckling load*. The deformation pattern which superimposes itself on the fundamental state immediately after the branch is the *buckling mode*. With many shells there are no bifurcation points below the limit load. In such a case, after the peak of the curve there is an abrupt transition into an equilibrium position with large deformations frequently termed *snap-through*.

In reality structures do exhibit differences from the ideal shape, this being known as *initial geometric imperfections*, or the loads are not transferred precisely as had been assumed, or – and this applies in particular to FRP structures – the stiffnesses differ locally from the desired values (as a consequence of delaminations, for example). These irregularities are covered by the expression *imperfections*. The dotted line in Figure 40 shows the effect these imperfections have on the buckling behaviour: they reduce the limit load so that it lies beneath the theoretical buckling load.

For FRP structures the buckling of plates and shells is of greater importance than column buckling or lateral buckling. For this reason only Euler's buckling load is quoted for struts. In the case of plates and shells several formulae are provided for the buckling loads and buckling modes of plates and cylindrical shells and these cover a number of loading cases. It should however be noted that formulae of this kind can only be given for idealized structures such as plane rectangular plates or circular cylinders with edges which are hinged and free to warp, i.e. the end sections are free to deform out of their plane. The fundamental states, too, are idealized, since it is assumed that the stresses are identical at every point in the structure. A more precise description of the actual shapes of the structures, of the boundary conditions and of the

rische Berechnungen mit der Methode der Finiten Elemente (FEM) möglich. Allerdings erfordern solche Berechnungen erheblichen Aufwand, weil mit sehr engen Elementnetzen zu arbeiten ist. Um passende Elementteilungen und Randbedingungen zu erhalten, müssen Konvergenzstudien mit unterschiedlich feinen Netzen durchgeführt werden (siehe Abschnitt 6.2.5).

Die angegebenen Formeln sollen auf einfache Weise einen Vergleich zwischen Stäben oder Flächenträgern aus verschiedenen Laminaten ermöglichen. Sie sind daher in der Entwurfsphase von Nutzen. Darüber hinaus können sie als „Benchmark“ zur Überprüfung numerischer Berechnungsmodelle dienen. Für weitergehende Informationen muss auf die Fachliteratur verwiesen werden. Viel Information zur numerischen Berechnung findet sich in [Bus85].

Versteifte Flächenträger sind nicht Gegenstand der folgenden Ausführungen. Zwar werden diese Konstruktionen sehr oft angewandt, ihr Beulverhalten kann jedoch nicht mit einfachen analytisch gewonnenen Formeln und Steifigkeiten nach der elementaren Schichtentheorie berechnet werden. Deshalb wird auch hierfür auf das Schrifttum verwiesen.

### 6.2.1 Knicken von Stäben

Wie im Fall homogen-isotroper Stäbe gilt auch für FKV-Stäbe die Euler'sche Knickgleichung

$$F_{cr} = c \cdot D \cdot b \cdot \pi^2 / l^2 \quad (100)$$

Hierin ist  $l$  die Länge des Stabes; der Faktor  $D \cdot b$  ersetzt die Biegesteifigkeit  $EI$ . Besteht der Querschnitt des Stabes aus einem FKV, so ist

$$D = D_{11} - D_{12}^2 / D_{22} \quad (101)$$

Der Faktor  $c$  steht für den Einfluss der Randbedingungen. Es gilt:

$$\begin{aligned} c &= 1 \text{ wenn beide Ränder gelenkig gelagert sind} \\ c &= 4 \text{ wenn beide Ränder eingespannt sind} \end{aligned} \quad (102)$$

Bei gelenkig gelagerten Rändern ist die Knickform eine Sinuslinie mit einer Halbwelle.

Ist die Knicklast erreicht, so kann die vom Stab übertragene Druckkraft nur noch geringfügig gesteigert werden, siehe Bild 41. Insofern ist die Knicklast eine obere Grenze der Belastbarkeit. Ist der Stab nicht ideal gerade, kommt es vor dem Erreichen der Knicklast bereits zu nichtlinear anwachsenden Durchbiegungen (Druckbiegung). Die Dimensionierung auf Druckbiegung ist für Stäbe aus homogen-isotropen Werkstoffen seit langem Stand der Technik. Für Stäbe aus Verbundwerkstoffen können keine Unterlagen benannt werden.

stress states may be obtained by numerical analysis using finite element analysis (FEM). However, analyses of this type require great outlay of time and effort as it is necessary to work with very fine element meshes. In order to obtain suitable element subdivisions and boundary conditions, convergence studies will need to be carried out using meshes of different resolutions (see Section 6.2.5).

The formulae provided should make it possible to make comparisons in a simple manner between struts on the one hand and plates and shells made of different laminates on the other. They are therefore useful in the design phase. They can, moreover, also be used as benchmarks for checking numerical analysis models. For more detailed information recourse to the specialist literature will be required. A great deal of information about numerical analysis is provided in [Bus85].

Reinforced plates and shells are not dealt with below. Although these structures are used very frequently their buckling behaviour cannot be analyzed on the basis of elementary lamina theory using simple formulae and stiffness values obtained from analysis. For this reason, reference should be made to the bibliography.

### 6.2.1 Buckling of struts

As in the case of homogeneously isotropic struts the Eulerian buckling formula also applies to FRP struts

$$F_{cr} = c \cdot D \cdot b \cdot \pi^2 / l^2 \quad (100)$$

where  $l$  is the length of the strut, and the factor  $D \cdot b$  replaces the stiffness  $EI$ . If the cross-section of the strut consists of an FRP, then

$$D = D_{11} - D_{12}^2 / D_{22} \quad (101)$$

The factor  $c$  stands for the influence of the boundary condition, with

$$\begin{aligned} c &= 1 \text{ if both edges are hinged, and} \\ c &= 4 \text{ if both edges are hingeless (fixed)} \end{aligned} \quad (102)$$

With hinged edges the buckling pattern is a sine curve with a half-wave.

Once the buckling load has been reached, the compressive force transferred by the strut can only be increased slightly (see Figure 41). To this extent the buckling load is an upper limit of loadability. If the strut is not ideally straight, deflections (compressive bending) increasing in non-linear fashion will occur even before the buckling load is reached. For a long time dimensioning to cover compressive bending has been state of the art for struts made of homogeneously isotropic materials. No published material can be cited for struts made of composite materials.

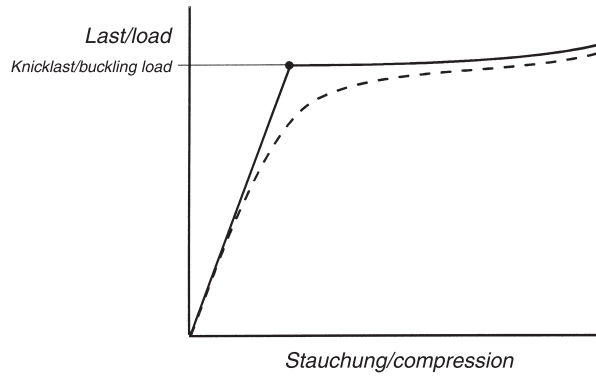


Bild 41. Verhalten von Druckstäben

Figure 41. Behaviour of compressed columns

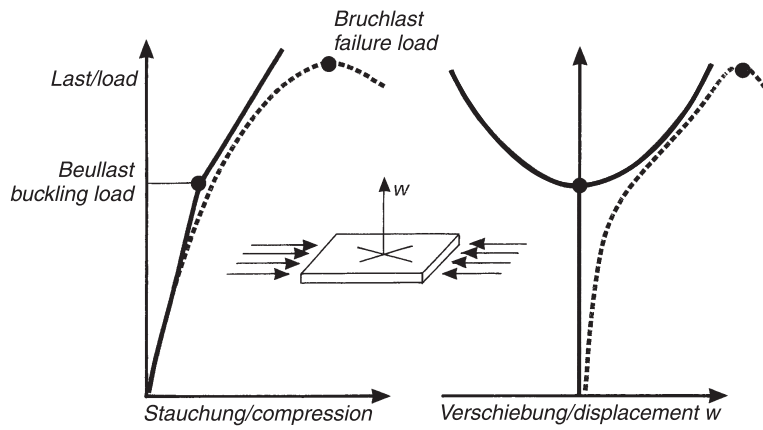


Bild 42. Beulverhalten ebener (und schwach gekrümmter) Platten

Figure 42. Buckling behaviour of flat (and slightly curved) plates

### 6.2.2 Beulung ebener Platten

#### Beullast/Bruchlast

Die Beullast ebener Platten (Bild 42) ist gewöhnlich nicht die obere Grenze der Belastbarkeit. Die Bruchlast kann bei einem Vielfachen der Beullast liegen. Mit Erreichen der Beullast vermindert sich jedoch die Steifigkeit in der Lastrichtung. Die Beulen bilden sich bei wachsender Belastung allmählich aus. Der Spannungszustand ist kein reiner, über die Plattenfläche konstanter Membranspannungszustand mehr, sondern es überlagern sich zunehmend Biegespannungen. Die Grenze der Belastbarkeit wird entweder durch sekundäres Beulen oder durch Bruch des Laminates bestimmt. Die zulässige Überschreitung der Beullast hängt wesentlich vom Verhältnis Breite/Dicke ab [Gei88].

#### Maßgebende Steifigkeiten

Die meisten theoretischen Untersuchungen und zugehörigen Versuche wurden für symmetrische Laminat durchgeführt. Liegt ein nicht-symmetrisch geschichteter Verbund vor, so berechne man zunächst

### 6.2.2 Buckling of flat plates

#### Buckling load/failure load

The buckling load of flat plates (Figure 42) is not usually the upper limit of loadability. The failure load may be a multiple of the buckling load. However, once the buckling load is reached, stiffness in the direction of loading falls. The lateral deflexions of buckling form gradually as load increases. The stress state is no longer a pure membrane stress state constant over the surface of the plate but instead is increasingly superimposed by bending stresses. The limit of loadability is determined either by secondary buckling or by failure of the laminate. The permissible amount by which the buckling load may be exceeded basically depends on the width/thickness ratio [Gei88].

#### Dominant stiffnesses

The majority of theoretical investigations and associated tests were carried out for symmetrical laminates. If a non-symmetrical layered composite is concerned, then the first thing to calculate is the modified bend-



die von der Wahl der Bezugsfläche unabhängige modifizierte Biegesteifigkeitsmatrix

$$[\tilde{D}] = [D] - [B]^T [A]^{-1} [B] \quad (103)$$

Für symmetrische Lamine ist  $[\tilde{D}] = [D]$ .

Die im Folgenden angegebenen Formeln gelten für orthotrope Lamine, das heißt es wird vorausgesetzt, dass die Komponenten mit den Indices 13 und 23 verschwinden:

$$A_{13} = A_{31} = A_{23} = A_{32} = 0$$

$$B_{13} = B_{31} = B_{23} = B_{32} = 0$$

$$D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32} = 0$$

Lamine mit ausgeglichener Schichtung sind hinsichtlich der Membransteifigkeit  $[A]$  orthotrop ( $A_{13} = A_{23} = 0$ ), aber die Orthotropie besteht nicht zwangsläufig auch hinsichtlich der Plattensteifigkeit  $[D]$  und der Koppelsteifigkeit  $[B]$ . Die theoretischen Beullasten und Beulformen werden gegenüber der orthotropen Berechnung vermindert. Der Aufwand zu ihrer Berechnung ist beträchtlich und lohnt sich zumindest im Entwurfsstadium nicht, da der Anisotropieeinfluss bei „vernünftig“ gestalteten Verbunden gering bleibt (siehe Anmerkungen am Ende des Abschnittes).

**Formeln für Beullasten**

*Belastung durch einachsigen Druck, verschiedene Randbedingungen*

Die Last wirkt in  $x$ -Richtung. Die kritische Membrankraft ist

$$n_{xcr} = -k_x \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \sqrt{\tilde{D}_{11} \tilde{D}_{22}} \quad (104)$$

Sie ist eine Druckkraft und daher negativ. Der Beulfaktor  $k_x$  hängt von den Randbedingungen, dem Seydel'schen Plattenparameter  $\vartheta$  und dem modifizierten Seitenverhältnis  $\bar{a}$  ab. Es ist

$$\vartheta = (\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{33}) / \sqrt{\tilde{D}_{11} \tilde{D}_{22}} \quad (105)$$

$$\bar{a} = (l/b) \cdot \sqrt[4]{\tilde{D}_{22} / \tilde{D}_{11}} \quad (106)$$

$$k_x = h(\bar{a}) + q \cdot \vartheta \quad (107)$$

wobei  $b$  die Plattenbreite,  $l$  die Plattenlänge und  $q$  ein Korrekturparameter ist.

Die Funktion  $h(\bar{a})$  ist in [HSB] für verschiedene Randbedingungen grafisch dargestellt. In Tabelle 3 sind Grenzwerte für die Funktion  $h(\bar{a})$  sowie Werte für den Faktor  $q$  angegeben.

Falls die Drucklast in  $y$ -Richtung wirkt, sind  $\tilde{D}_{11}$  und  $\tilde{D}_{12}$  sowie  $l$  und  $b$  zu vertauschen.

ing stiffness matrix which is independent of the choice of reference plane

$$[\tilde{D}] = [D] - [B]^T [A]^{-1} [B] \quad (103)$$

For symmetrical laminates  $[\tilde{D}] = [D]$ .

The formulae given below apply to orthotropic laminates – in other words, it is assumed that the components with subscripts 13 and 23 will disappear:

$$A_{13} = A_{31} = A_{23} = A_{32} = 0$$

$$B_{13} = B_{31} = B_{23} = B_{32} = 0$$

$$D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32} = 0$$

With regard to the in-plane or membrane stiffness  $[A]$ , laminates with a balanced lay-up are orthotropic ( $A_{13} = A_{23} = 0$ ) but this orthotropy does not necessarily exist with regard to bending stiffness  $[D]$  and laminate bending-stretching coupling stiffness  $[B]$  as well. In comparison with orthotropic analysis, the theoretical buckling loads and buckling modes are reduced. Their analysis calls for considerable effort and is not worthwhile, at least in the design study stage, since the influence of anisotropy on “rationally” designed composites remains minor (see comments at the end of this section).

**Formulae for buckling loads**

*Loading from uniaxial pressure, different boundary conditions*

The load acts along the  $x$  axis. The critical membrane force is

$$n_{xcr} = -k_x \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \sqrt{\tilde{D}_{11} \tilde{D}_{22}} \quad (104)$$

This is a compressive force and therefore negative. The buckling factor  $k_x$  depends on the boundary conditions, on Seydel's plate parameter  $\vartheta$  and the modified ratio between the sides  $\bar{a}$ . Accordingly

$$\vartheta = (\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{33}) / \sqrt{\tilde{D}_{11} \tilde{D}_{22}} \quad (105)$$

$$\bar{a} = (l/b) \cdot \sqrt[4]{\tilde{D}_{22} / \tilde{D}_{11}} \quad (106)$$

$$k_x = h(\bar{a}) + q \cdot \vartheta \quad (107)$$

where  $b$  is the plate width,  $l$  the plate length and  $q$  a correctur parameter.

The function  $h(\bar{a})$  is presented graphically in [HSB] for various boundary conditions. Limit values for the function  $h(\bar{a})$  are provided in Table 3, as are values for the factor  $q$ .

If the compressive load acts along the  $y$  axis, then  $\tilde{D}_{11}$  and  $\tilde{D}_{12}$   $l$  and  $b$  shall be interchanged.

Tabelle 3. Beullastparameter  
Table 3. Buckling load parameters

Lagerung der unbel. Ränder Bearing of unloaded edges (y = const.)	Lagerung der belasteten Ränder/Bearing of loaded edges (x = const.)	
	gelenkig/hinged	eingespannt/clamped
Gelenkig/Hinged	$q = 2$ $h(\bar{a}) = \min_{m=1,2,\dots} \left[ \left( \frac{m}{\bar{a}} \right)^2 + \left( \frac{\bar{a}}{m} \right)^2 \right]$ $h(\infty) = 2$	$q = 2$ $h(\infty) = 2$
Eingespannt/Clamped	$q = 2,36$ $h(\infty) = 4,6$	$q = 2,36$ $h(\infty) = 4,6$

Tabelle 4. Beulfaktoren  $k_s$  für die orthotrope Platte unter Belastung durch Schub  
Table 4. Buckling factors  $k_s$  for the orthotropic plate under shear stress

$\vartheta$	0,4	0,8	1,0	1,2	1,6	2,0	2,4
$\bar{a} = \infty$	4,2	5,0	5,4	5,7	6,4	7,0	7,6
$\bar{a} = 1$	6,7	8,5	9,3	10,1	11,9	13,6	15,3

*Belastung durch Schub in der Plattenebene*

Der kritische Schubfluss ist

$$n_{xy\text{cr}} = k_s \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \sqrt[4]{\tilde{D}_{11} \tilde{D}_{22}^3} \quad (108)$$

Der Faktor  $k_s$  hängt vom effektiven Seitenverhältnis  $\bar{a}$  und vom Seydel'schen Plattenparameter  $\vartheta$  ab, Gleichung (105) und Gleichung (106). Diagramme, aus denen der Wert abgelesen werden kann, findet man in [Wie86; HSB]. Dort liest man für die sehr lange an den Längsrändern gelenkig gelagerte Platte ( $\bar{a} \rightarrow \infty$  oder  $1/\bar{a} \rightarrow 0$ ) und für die nahezu quadratische Platte  $\bar{a} = 1$  die in der Tabelle 4 angegebenen Werte ab.

Gleichung (108) gilt für zentrisch orthotrope (symmetrisch geschichtete) Platten. Für unsymmetrisch geschichtete Platten erhält man mit der modifizierten Biegesteifigkeiten  $\tilde{D}_{ij}$  brauchbare Näherungen.

*Kombinierte Belastungen*

Die vorhandenen Membrankräfte seien  $n_x, n_y, n_{xy}$ , der kritische Membranspannungszustand ist  $(\lambda n_x, \lambda n_y, \lambda n_{xy})$ . Man berechne die kritischen Membrankräfte für Druck in x-Richtung, Druck in y-Richtung und Schub. Der Beulfaktor  $\lambda$  kann dann näherungsweise mittels der Interaktionsgleichung

$$\lambda \left( \frac{n_x}{n_{x\text{cr}}} + \frac{n_y}{n_{y\text{cr}}} \right) + \lambda^2 \left( \frac{n_{xy}}{n_{xy\text{cr}}} \right)^2 = 1 \quad (109)$$

bestimmt werden.

*Loading from shear in the plate plane*

The critical shear flow is

$$n_{xy\text{cr}} = k_s \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \sqrt[4]{\tilde{D}_{11} \tilde{D}_{22}^3} \quad (108)$$

The factor  $k_s$  depends on the effective aspect ratio  $\bar{a}$  and on Seydel's plate parameter  $\vartheta$  Equation (105) and Equation (106). Diagrams from which the value may be obtained are provided in [Wie86; HSB]. The values shown in and Table 4 are given for the very long plate hinged on its longitudinal edges ( $\bar{a} \rightarrow \infty$  or  $1/\bar{a} \rightarrow 0$ ) and for the almost square plate  $\bar{a} = 1$ .

Equation (108) applies to centrally orthotropic (symmetrically layered) plates. Serviceable approximations for asymmetrically layered plates may be obtained using the modified bending stiffnesses  $\tilde{D}_{ij}$ .

*Combined loading*

Let the membrane section forces present be  $n_x, n_y, n_{xy}$ , the critical membrane tension state will then be  $(\lambda n_x, \lambda n_y, \lambda n_{xy})$ . Let the critical membrane forces for compression along the x axis, compression along the y axis and for shear be calculated. The buckling factor  $\lambda$  can then be calculated approximately by means of the interaction equation

$$\lambda \left( \frac{n_x}{n_{x\text{cr}}} + \frac{n_y}{n_{y\text{cr}}} \right) + \lambda^2 \left( \frac{n_{xy}}{n_{xy\text{cr}}} \right)^2 = 1 \quad (109)$$

Vereinfachend kann man auch die lineare Interaktionsgleichung benutzen, mit der man auf der sicheren Seite bleibt:

$$\lambda \left( \frac{n_x}{n_{xcr}} + \frac{n_y}{n_{ycr}} + \frac{n_{xy}}{n_{xycr}} \right) = 1 \quad (110)$$

### 6.2.3 Beulung zylindrisch gekrümmter Flächenträger

#### Koordinaten

Den folgenden Formeln liegt ein Koordinatensystem zugrunde, dessen  $x$ -Achse entlang einer Mantellinie, also parallel zur Krümmungsachse läuft; die  $y$ -Werte werden entlang des Umfangs gemessen, und die  $z$ -Achse weist in Normalenrichtung nach innen. Der Koordinatenursprung liegt in einer Bezugsfläche, die innerhalb der Schale, also zwischen äußerer und innerer Leibung zu wählen ist. Bei symmetrisch geschichteten Laminaten ist die Mittelfläche als Bezugsfläche festzulegen. Es wird empfohlen, diese Wahl auch bei unsymmetrischen Laminaten zu treffen.

#### Steifigkeiten

In den Formeln für die Beullasten gekrümmter Flächenträger treten neben der Plattensteifigkeit  $[D]$  bzw.  $[D]$  auch die Membransteifigkeit  $[A]$  und die Koppelsteifigkeit  $[B]$  in verschiedenen Kombinationen auf. Zur Vereinfachung der Formeln werden die Inverse  $[\tilde{a}]$  der Membransteifigkeitsmatrix  $[A]$  und die Exzentrizitätsmatrix  $[e]$

$$[\tilde{a}] = [A]^{-1} \quad \text{und} \quad [e] = -[\tilde{a}][B] \quad (111)$$

benutzt. Die Exzentrizitätsmatrix  $[e]$  ist nicht symmetrisch.

Anders als bei homogen-isotropen Flächenträgern sind beim Laminat die Steifigkeiten gegen Querkraftschub relativ gering im Vergleich zu den Dehn- oder Biegesteifigkeiten. Deshalb wird häufig argumentiert, dass deren Einfluss auf die Beullasten berücksichtigt werden muss, weil er diese verringert. Vergleichende Analysen [Gei89; Gei97] haben gezeigt, dass bei üblichen Flächenträgern, insbesondere bei Schalen und gekrümmten Platten, dieser Einfluss gering ist und zumindest im Entwurfsstadium unberücksichtigt bleiben kann.

#### Einfluss von Imperfektionen

Bild 43 zeigt das typische Beulverhalten einer axial belasteten Kreiszyklinderschale. Die theoretischen Beullasten der Kreiszyklinderschalen sind obere Grenzen der Belastbarkeit. Die Gleichgewichtszustände der ausgebeulten Schale liegen meistens unterhalb der Beullast, das heißt die Last fällt beim Erreichen

More simply, the linear interaction equation can also be used, which will keep the results on the safe side:

$$\lambda \left( \frac{n_x}{n_{xcr}} + \frac{n_y}{n_{ycr}} + \frac{n_{xy}}{n_{xycr}} \right) = 1 \quad (110)$$

### 6.2.3 Buckling of cylindrically curved plates and shells

#### Coordinates

The following formulae are based on a coordinate system whose  $x$  axis runs along a generator, in other words, parallel to the axis of curvature; the  $y$  values are measured along the circumference, while the  $z$  axis runs inwardly in the direction of the normal. The origin of the coordinates is located in a reference surface, which should be inside the shell – in other words, between the inner and the outer shell surfaces. In the case of symmetrically layered laminates, the middle surface should be defined as the reference surface. It is recommended that this choice should be made for even when laminates are asymmetrical.

#### Stiffnesses

In the formulae for the buckling loads of curved plates and shells, not only bending stiffness  $[D]$  or  $[D]$  but also membrane stiffness  $[A]$  and laminate bending-stretching coupling stiffness  $[B]$  are found in various combinations. In order to simplify the formulae the inverse  $[\tilde{a}]$  of the membrane stiffness matrix  $[A]$  and the eccentricity matrix

$$[\tilde{a}] = [A]^{-1} \quad \text{and} \quad [e] = -[\tilde{a}][B] \quad (111)$$

are used. The eccentricity matrix  $[e]$  is not symmetrical.

Unlike the case of homogeneous isotropic plates and shells, in the laminate the resistances to transverse shear is relatively low in comparison to membrane or bending resistances. For this reason it is frequently argued that its influence should be taken into account since it reduces the buckling load. Comparative analyses [Gei89; Gei97] have demonstrated that with the usual plates and shells, and shells and curved plates in particular, this influence is minor and may be ignored, at least in the draft design phase.

#### Influence of imperfections

Figure 43 shows the typical buckling behaviour of an axially loaded circular cylindrical shell. The theoretical buckling loads of circular cylindrical shells are the upper limits of load-bearing capacity. In most cases the equilibrium states of the buckled shells are below the buckling load – in other words, the load

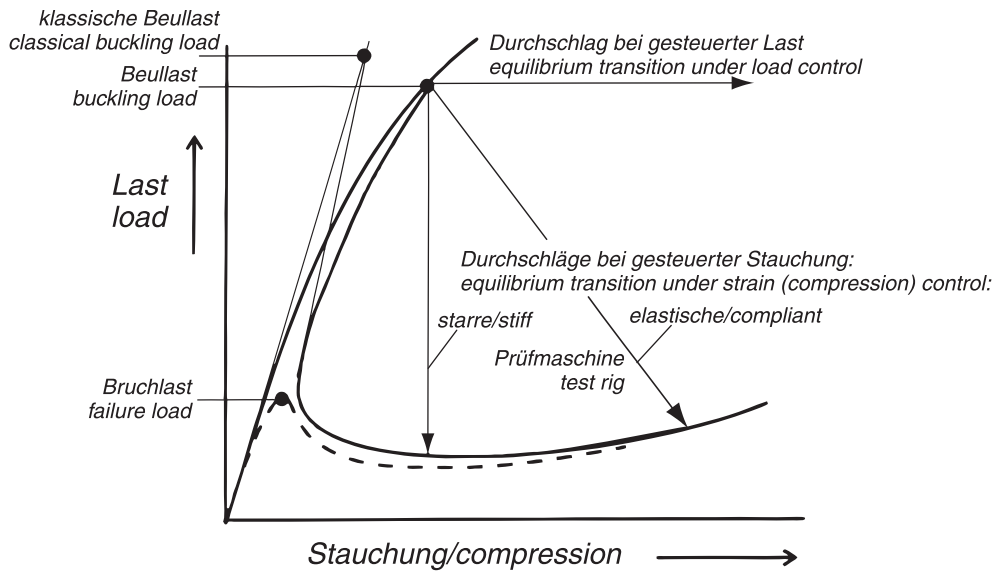


Bild 43. Beulverhalten einer axial gedrückten Kreiszylinderschale

Figure 43. Buckling behaviour of an axially compressed circular cylindrical shell

der Beullast stark ab oder die Schale geht sofort zu Bruch. Das Verhalten im Versuch hängt von der Steifigkeit der Prüfmaschine und der Art der Lastaufbringung ab. Wird der Versuch kraftgesteuert durchgeführt, erfolgt ein Durchschlagen zu sehr großen Verformungen und die Schale geht sofort zu Bruch. Bei weggesteuerter Belastung wird hingegen eine Gleichgewichtslage im Nachbeulbereich eingenommen, die bei der gleichen Stauchung, aber niedrigerer Last liegt. Da die Last schlagartig abnimmt, federt die Versuchsanlage nach, sodass der tatsächlich eingenommene Gleichgewichtszustand bei etwas höherer Stauchung liegt.

falls markedly when the buckling load is reached or the shell goes immediately into failure. Behaviour during the test depends on the stiffness of the test rig and on how the load is applied. If the test is carried out with load control, there will be a transition to very great deformations and the shell will break immediately. If the load is applied with controlled end displacement, an equilibrium position will arise in the post-buckling range, being located at the same compressive displacement but at a lower loading. Since the load drops abruptly, the test set-up will lag behind with the result that the equilibrium state actually taken up will be at a somewhat higher level of compression.

Unvermeidliche Imperfektionen der Schalenform (Vorbeulen), der Spannungsverteilung, der Randbedingungen oder der Steifigkeiten (u.a. Delaminationen) bewirken, dass die theoretischen Beullasten nicht erreicht werden. Deshalb müssen Abminderungen eingeführt werden. Ist  $n_{zcr}$  eine theoretische kritische Membrankraft (der Index  $z$  steht hier für  $x$ ,  $y$ , oder  $xy$ ), so ist für die Membrankraft bei der erreichbaren Beullast der abgeminderte Wert  $n_{zbl} = \rho \cdot n_{zcr}$  anzusetzen mit dem Abminderungsfaktor  $\rho < 1$ . Der Abminderungsfaktor ist nicht mit einem Sicherheitsfaktor zu verwechseln, der natürlich auch anzuwenden ist.

Unavoidable imperfections of the shell shape (pre-buckling), of the distribution of stresses, of the boundary conditions or of the stiffnesses (including delaminations) will lead to the theoretical buckling loads not being reached. For this reason it is necessary to introduce reductions. If  $n_{zcr}$  is a theoretical critical membrane force (here the subscript  $z$  stands for  $x$ ,  $y$ , or  $xy$ ), then the reduced value  $n_{zbl} = \rho \cdot n_{zcr}$  with the reduction factor  $\rho < 1$  should be used for the membrane force at the attainable buckling load. The reduction factor should not be confused with a safety factor, which should of course also be used.

Es gibt ebenfalls verschiedene Vorschläge, die Abminderung der Beullasten durch Imperfektionen abzuschätzen [Gei98]. Üblich ist es, Berechnungen mit verschiedenen angenommenen Abweichungen von der idealen Form des Flächenträgers durchzuführen. In vielen Fällen werden Imperfektionen angenom-

There are also various suggested methods of estimating the reduction in buckling loads due to imperfections [Gei98]. The normal procedure is to carry out analyses with different assumed deviations from the ideal shape of the plates or shell. In many cases, imperfections are assumed which correspond to the the-

men, welche den theoretischen Beulformen oder Linearkombinationen aus denselben entsprechen. Solche Berechnungen müssen auf einer nichtlinearen Schalentheorie basieren und sind daher sehr aufwändig.

Die Imperfektionsempfindlichkeit ist bei Zylinderschalen unter Axialdruck besonders groß. Sie ist umso größer, je größer das Verhältnis Radius/Wanddicke, das heißt je dünnwandiger die Schale ist. Die besondere Imperfektionsempfindlichkeit liegt daran, dass es (nahezu) abwickelbare, das heißt dehnungslose Nachbeulmuster gibt, deren Formänderungsenergie nur um eine verhältnismäßig geringe Biegeenergie von der Formänderungsenergie der unausgebeulerten Schale abweicht. Diese Nachbeulmuster sind nur über dehnungsbehaftete Zwischenzustände erreichbar. Imperfektionen können den Übergang erleichtern und vermindern daher die Traglast.

Durch eine Krümmung quer zur Lastrichtung, das heißt durch Krümmung in  $y$ -Richtung, wird die theoretische Beullast gekrümmter Platten im Vergleich zur ebenen Platte erhöht, wie die im Folgenden angegebenen Formeln zeigen. Der Einfluss beruht darauf, dass infolge der Krümmung zusätzlich zum Biege widerstand ein Membranwiderstand zu überwinden ist. Dieser Membrananteil kann entsprechend der Imperfektionsempfindlichkeit der Schale stark reduziert werden.

Gekrümmte Platten, oft auch als Teilschalen bezeichnet, liegen in ihrem Nachbeulverhalten und daher auch in ihrer Imperfektionsempfindlichkeit zwischen den ebenen Platten und Zylinderschalen. Durch Krümmung wird die Beullast im Vergleich zur ebenen Platte erhöht.

Bild 44 illustriert das Beulverhalten gekrümmter Platten. Der Krümmungsanteil an der Beullast kann durch Imperfektionen verringert werden.

oretical buckling modes or linear combinations of these. Analyses of this kind must be based on a non-linear shell theory and are therefore very time-consuming to compute.

Sensitivity to imperfections is particularly high in cylindrical shells under axial loading, and all the more sensitive, the greater the ratio between radius and wall thickness – in other words, the thinner the shell wall is. The particular sensitivity to imperfections lies in the fact that there exist (virtually) developable – in other words, strainless – post-buckling patterns whose deformation energy differs from the deformation energy of the unbuckled shell by only a relatively low amount of bending energy. These post-buckling types can only be reached via intermediate strain-dependent states. Imperfections can make the transition easier and thus reduce the limit load.

In comparison with the flat plate, the theoretical buckling load of the curved plate (often termed curved panel) is increased by a curvature transverse to the direction of loading – in other words, by curvature along the  $y$  axis, as is indicated in the following formulae. This effect is due to the fact that as a result of the curvature, a membrane resistance needs to be overcome in addition to the bending resistance. This membrane component can be greatly reduced, depending on the imperfection sensitivity of the shell.

Curved plates fall between flat plates and cylindrical shells as regards their post-buckling behaviour and imperfection sensitivity. Due to the curvature, the buckling load is higher than is the case with flat plates.

Figure 44 illustrates the buckling behaviour of curved plates. The curvature component in the buckling load can be reduced by imperfections.

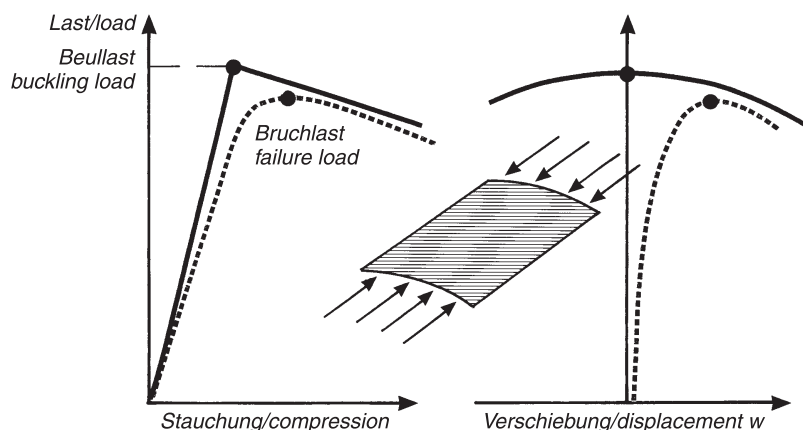


Bild 44. Beulverhalten gekrümmter Platten (Teilschalen)

Figure 44. Buckling behaviour of curved plates (sub-shells)

Maßgebend für den Krümmungseinfluss ist der Krümmungsparameter [Gei87]

$$\Theta = \frac{b}{\sqrt{2R\sqrt{\tilde{D}_{22}/A_{22}}}} \quad (112)$$

**Beulformen**

Die Beulformen bei axialem Druck und bei Außen- druck sind

$$w^* = \sin\beta x \cdot \sin\eta y \quad (113)$$

mit  $\beta = \frac{m\pi}{l}$

und  $\eta = \frac{n\pi}{b}$  bei gekrümmten Platten

bzw.  $\eta = \frac{n}{R}$  bei Zylindern.

Demnach ist  $m$  die Zahl der Halbwellen über die Länge. Bei gekrümmten Platten ist  $n$  die Zahl der Halbwellen über die Breite und bei Zylindern ist  $n$  die Zahl der Vollwellen über den Umfang. Die Ränder sind als gelenkig gelagert angenommen. Darüber hinaus wird vorausgesetzt, dass sich der Querschnitt beim Beulen frei verwölben, also in axialer Richtung verformen kann. Die Markierung durch einen hoch- gestellten Stern „\*“ soll andeuten, dass es sich um einen Zuwachs handelt, der sich der entsprechenden Größe des Grundzustandes überlagert.

Bei Torsion besteht die Beulform aus schraubenför- migen Wellen, wobei sich über die Länge eine Halb- welle und über den Umfang mehrere Vollwellen aus- bilden.

**Formeln für Beullasten**

Um lange Formeln zu vermeiden, werden einige häu- fig wiederkehrende Ausdrücke zusammengefasst. Es sind dies Biege- widerstand und Membranwiderstand

$$W_b = \tilde{D}_{11}\beta^4 + 2(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{33})\beta^2\eta^2 + \tilde{D}_{22}\eta^4 \quad (114)$$

$$W_m = \frac{W_{mZ}}{W_{mN}} \quad (115)$$

mit Zähler und Nenner

$$W_{mZ} = [e_{21}\beta^4 + (e_{11} + e_{22} - 2e_{33})\beta^2\eta^2 + e_{12}\eta^4 + \beta^2/R]^2 \quad (116)$$

$$W_{mN} = a_{22}\beta^4 + 2(a_{12} + 0,5a_{33})\beta^2\eta^2 + a_{11}\eta^4 \quad (117)$$

Die Lösungen sind nur für diskrete Werte  $n_{xi}$ ,  $n_{yi}$  der Membranspannungen des Grundzustandes definiert. Die allgemeine Lösung ist

$$n_{xi}\beta^2 + n_{yi}\eta^2 = W_b + W_m \quad (118)$$

Of decisive importance to the effect of curvature is the curvature parameter [Gei87]

$$\Theta = \frac{b}{\sqrt{2R\sqrt{\tilde{D}_{22}/A_{22}}}} \quad (112)$$

**Buckling modes**

With axial compression and with external compres- sion the buckling modes are

$$w^* = \sin\beta x \cdot \sin\eta y \quad (113)$$

where  $\beta = \frac{m\pi}{l}$

and  $\eta = \frac{n\pi}{b}$  for curved plates

or  $\eta = \frac{n}{R}$  for cylinders.

$m$  is therefore the number of half-waves over the length. In the case of curved plates,  $n$  is the number of half-waves over the width, while in the case of cylin- ders  $n$  is the number of full waves over the circumfer- ence. The edges are assumed to be hinged. A further assumption is that the cross-section can warp freely during buckling, in other words, can deform freely in the axial direction. The use of an asterisk (\*) as super- script is to indicate that this is an increase which is su- perimposed on the corresponding variable in the fun- damental state.

With torsion the buckling mode consists of helical waves where a half-wave forms over the length and several full waves form over the circumference.

**Formulae for buckling loads**

To avoid lengthy formulae, a number of frequently recurring expressions are condensed. These are bend- ing resistance and membrane resistance

$$W_b = \tilde{D}_{11}\beta^4 + 2(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{33})\beta^2\eta^2 + \tilde{D}_{22}\eta^4 \quad (114)$$

$$W_m = \frac{W_{mZ}}{W_{mN}} \quad (115)$$

whereby numerator and denominator are

$$W_{mZ} = [e_{21}\beta^4 + (e_{11} + e_{22} - 2e_{33})\beta^2\eta^2 + e_{12}\eta^4 + \beta^2/R]^2 \quad (116)$$

$$W_{mN} = a_{22}\beta^4 + 2(a_{12} + 0,5a_{33})\beta^2\eta^2 + a_{11}\eta^4 \quad (117)$$

The solutions are only defined for discrete values  $n_{xi}$ ,  $n_{yi}$  of the membrane stresses of the fundamental state. The general solution is

$$n_{xi}\beta^2 + n_{yi}\eta^2 = W_b + W_m \quad (118)$$

Hierin sind die Membrankräfte  $n_{xi}$ ,  $n_{yi}$  als Druckkräfte positiv. Von allen Wertepaaren definieren diejenigen eine Beullast, welche bei wachsender Belastung zuerst erreicht werden. Die nachfolgend angegebenen Formeln sind aus den Gleichungen (114) bis (118) abgeleitete Sonderfälle.

*Gekrümmte Platten unter Längsdruck*

- Allgemeines Laminat und symmetrisches Laminat  
Die Gleichungen sind identisch mit denen für Zylinderschalen unter Axialdruck. Der Umfangwellenzahlparameter  $n$  ist in den Formeln  $\eta = n\pi/b$  einzusetzen. Bei schwacher Krümmung ergibt sich das Minimum bei  $n = 1$ .
- Einfluss der Randbedingungen  
Die angegebenen Lösungen gelten für gelenkige Lagerung aller Ränder. Einspannung der Ränder, insbesondere der unbelasteten Längsränder, erhöht die Beullast.
- Abminderungsfaktor bei axialem Druck  
Imperfektionen mindern nur den Membranwiderstand. Zahlenwerte für den Abminderungsfaktor können nicht gegeben werden, weil zu viele Einflüsse zu berücksichtigen wären.

*Zylinderschalen unter Axialdruck*

- Allgemeines Laminat

$$n_{xcr} = \text{Min}_{m, n} \left( \frac{W_b + W_m}{\beta^2} \right) \quad (119)$$

- Symmetrisches Laminat

$$n_{xcr} = \text{Min}_{m, n} \left( \frac{W_b}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{R^2 W_{mN}} \right) \quad (120)$$

- Einfluss der Randbedingungen  
Unter Belastung durch Axialdruck ist der Einfluss der Randbedingungen auf das Beulgeschehen bei Zylinderschalen gering.
- Abminderungsfaktor bei axialem Druck  
In [NAS80] wird folgender Abminderungsfaktor empfohlen:

$$\rho = 1 - 0,901(1 - \exp(-\Phi))$$

mit 
$$\Phi = \frac{1}{29,8} \sqrt[4]{\bar{R} \frac{A_{11} A_{22}}{D_{11} D_{22}}} \quad (121)$$

*Zylinderschalen unter Axialdruck und konstantem Innendruck p*

Die Membrankraft  $n_x$  (positiv bei Druck) hängt von der axialen Druckkraft  $-F$  und dem Innendruck  $p$  ab:

$$n_x = -F/(2\pi R) - pR/2$$

Here the membrane forces  $n_{xi}$ ,  $n_{yi}$  are positive if they are compressive forces. Of all of the pairs of values the ones which define the buckling load are those which are first reached as the loading increases. The formulae given below are special cases derived from Equations (114) to (118).

*Curved plates under longitudinal compression*

- General laminate and symmetrical laminate  
The equations are identical to those for cylindrical shells under axial compression. The parameter for the number of waves circumferentially  $n$  is to be used in the formulae  $\eta = n\pi/b$ . With slight curvature the minimum occurs at  $n = 1$ .
- Influence of boundary conditions  
The solutions given apply when all the edges are hinged. Restraining the edges, particularly the unloaded longitudinal edges, will increase the buckling load.
- Reduction factor with axial compression  
Imperfections reduce only the membrane resistance. Numerical values for the reduction factor cannot be quoted since too many different influences would have to be taken into account.

*Cylindrical shells under axial compression*

- General laminate

$$n_{xcr} = \text{Min}_{m, n} \left( \frac{W_b + W_m}{\beta^2} \right) \quad (119)$$

- Symmetrical laminate

$$n_{xcr} = \text{Min}_{m, n} \left( \frac{W_b}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{R^2 W_{mN}} \right) \quad (120)$$

- Influence of boundary conditions  
Under loading by axial compression the influence of the boundary conditions on buckling is minor in the case of cylindrical shells.
- Reduction factor with axial compression  
In [NAS80] the following reduction factor is recommended

$$\rho = 1 - 0,901(1 - \exp(-\Phi))$$

where 
$$\Phi = \frac{1}{29,8} \sqrt[4]{\bar{R} \frac{A_{11} A_{22}}{D_{11} D_{22}}} \quad (121)$$

*Cylindrical shells under axial compression and constant internal pressure p*

The membrane force  $n_x$  (positive in the case of compression) is a function of the axial compressive force  $-F$  and the internal pressure  $p$ :

$$n_x = -F/(2\pi R) - pR/2$$

das heißt die axiale Druckkraft beim Beulen ist

$$F_{bl} = -2\pi R(\rho_p n_{xcr} + pR/2) \quad (122)$$

$F$  ist positiv als Zugkraft,  $p$  ist positiv als Innendruck. Der für  $n_{xcr}$  einzusetzende Wert ist nachfolgend angegeben

- Allgemeines Laminat

$$n_{xcr} = \text{Min}_{m, n} \frac{1}{\beta^2} (W_b + W_m + pR\eta^2) \quad (123)$$

- Symmetrisches Laminat

$$n_{xcr} = \text{Min}_{m, n} \left( \frac{W_b}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{R^2 W_{mN}} + pR\eta^2 \right) \quad (124)$$

Das Minimum ergibt sich bei Axiallast und gleichzeitigem Innendruck meistens für  $n = 0$ .

- Abminderungsfaktor bei Axialdruck und gleichzeitigem Innendruck [NAS80]

$$\rho_p = \rho + \Delta\rho$$

wobei  $\rho$  nach Gleichung (121) einzusetzen und  $\Delta\rho$  ein mit zunehmendem Innendruck von 0 auf 0,2 wachsender Wert ist, mit dem berücksichtigt wird, dass die Imperfektionsempfindlichkeit mit zunehmendem Innendruck geringer wird. Da im Schrifttum keine gesicherten genaueren Angaben zu finden sind, wird vorgeschlagen, diesen Effekt nicht zu berücksichtigen und mit  $\Delta\rho = 0$  zu arbeiten. Ohnehin wird häufig der vom Innendruck erzeugte Anteil aus der Axialbeanspruchung überwiegen, sodass der Einfluss von  $\Delta\rho$  auf die gesamte Axiallast relativ gering ist.

*Zylinderschalen unter allseitigem Außendruck oder Manteldruck –p*

Zylinderschalen, die einer Belastung durch Außendruck ausgesetzt sind, werden oft mit Steifen in Ringrichtung ausgeführt. In diesem Fall muss man zwischen allgemeinem Beulen und örtlichem Beulen unterscheiden. Beim allgemeinen Beulen nehmen die Versteifungsringe am Beulvorgang teil; beim örtlichen Beulen bleiben die Versteifungsringe unverformt, und es beulen nur die Schalenabschnitte dazwischen. Die nachfolgend angegebenen Formeln können zur Abschätzung des örtlichen Beulens benutzt werden. Als Länge  $l$  ist dabei der Abstand zwischen den Versteifungsringen einzusetzen. Bezüglich weiterer Ausführungen zum Beulen versteifter Schalen wird auf [Bus85] verwiesen.

Die Beulform hat immer (außer bei sehr kurzen Zylindern, die praktisch keine Bedeutung haben) eine axiale Halbwelle,  $m = 1$ . Deshalb ist das Minimum

in other words, the axial compressive force during buckling is

$$F_{bl} = -2\pi R(\rho_p n_{xcr} + pR/2) \quad (122)$$

$F$  is positive as tensile force,  $p$  is positive as internal pressure. The value  $n_{xcr}$  to be used for is given below

- General laminate

$$n_{xcr} = \text{Min}_{m, n} \frac{1}{\beta^2} (W_b + W_m + pR\eta^2) \quad (123)$$

- Symmetrical laminate

$$n_{xcr} = \text{Min}_{m, n} \left( \frac{W_b}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{R^2 W_{mN}} + pR\eta^2 \right) \quad (124)$$

With axial loading and simultaneous internal pressure the minimum is usually obtained for  $n = 0$ .

- Reduction factor with axial loading and simultaneous internal pressure [NAS80]

$$\rho_p = \rho + \Delta\rho$$

where  $\rho$  is to be inserted as per Equation (121) and  $\Delta\rho$  is a value which grows as internal pressure increases from 0 to 0,2 which is used to take into consideration the fact the imperfection sensitivity falls as internal pressure increases. Since no more precise and well-founded information is found in the literature, it is suggested that this effect should be ignored and  $\Delta\rho = 0$  should be used. Anyway that part of the axial loading which is generated by the internal pressure will frequently prevail so that the influence of  $\Delta\rho$  on the total axial load is relatively minor.

*Cylindrical shells under hydrostatic external pressure or lateral pressure –p*

Cylindrical shells which are exposed to loading by external pressure are often provided with stiffeners circumferentially. In such a case it is necessary to distinguish between general buckling and local buckling. In the case of general buckling, the stiffening rings take part in the buckling process while with local buckling the stiffening rings remain undeformed with only the intervening sections of shell actually buckling. The formulae given below can be used for estimating the local buckling. Here the length  $l$  is the distance between the stiffening rings. Please refer to [Bus85] for further implementations of shells provided with stiffening against buckling.

Apart from very short cylinders which have in practice virtually no importance at all, the buckling mode always has one axial half-wave,  $m = 1$ . For this rea-



nur bezüglich der Umfangswellenzahl  $n$  zu bestimmen.

- Allseitiger Außendruck, allgemeines Laminat:

$$-p_{cr} = \text{Min}_n \frac{1}{R} \left( \frac{W_b + W_m}{\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 + \eta^2} \right) \quad (125)$$

- Allseitiger Außendruck, symmetrisches Laminat

$$-p_{cr} = \text{Min}_n \frac{1}{R} \left( \frac{W_b + \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 / (R^2 \cdot W_{mN})}{\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 + \eta^2} \right) \quad (126)$$

- Manteldruck, allgemeines Laminat

$$-p_{cr} = \text{Min}_n \frac{1}{R} \left( \frac{W_b + W_m}{\eta^2} \right) \quad (127)$$

- Manteldruck, symmetrisches Laminat

$$-p_{cr} = \text{Min}_n \frac{1}{R} \left( \frac{W_b + \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 / (R^2 \cdot W_{mN})}{\eta^2} \right) \quad (128)$$

- Allseitiger Außendruck oder Manteldruck, Näherungslösung  
Für Zylinder mittlerer Länge mit

$$l \geq 8^4 \sqrt{4R^2 \tilde{D}_{11} a_{22}}$$

gilt die Näherungsformel

$$-p_{cr} = \frac{4\pi}{4\sqrt{27}} \frac{1}{l\sqrt{R^3}} \sqrt[4]{\frac{\tilde{D}_{22}^3}{a_{11}}} \quad (129)$$

Bei ihr erübrigt sich die Suche nach dem Minimum bezüglich der Umfangswellenzahl. Diese ergibt sich aus

$$\eta^4 = \frac{\sqrt{3}(\pi/l)^2}{R\sqrt{\tilde{D}_{22}a_{11}}} \quad (130)$$

- Allseitiger Außendruck oder Manteldruck, sehr lange Zylinder

Sehr lange Zylinder beulen mit der ovalisierenden Beulform  $n=2$  bei 75 % des Drucks nach Gleichung (127) und Gleichung (128). Diese Abminderung ist zu beachten, wenn die Auswertung ein Beulmuster mit  $n=2$  ergibt.

- Abminderungsfaktor bei Außendruck und Manteldruck

Die Imperfektionsempfindlichkeit ist bei Außendruck wesentlich geringer als bei Längsdruck. Empfohlen wird [NAS80]

$$\rho = 0,75 \quad (131)$$

son the minimum is to be determined with respect to the number of circumferential waves  $n$  only.

- Hydrostatic external pressure, general laminate

$$-p_{cr} = \text{Min}_n \frac{1}{R} \left( \frac{W_b + W_m}{\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 + \eta^2} \right) \quad (125)$$

- Hydrostatic external pressure, symmetrical laminate

$$-p_{cr} = \text{Min}_n \frac{1}{R} \left( \frac{W_b + \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 / (R^2 \cdot W_{mN})}{\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 + \eta^2} \right) \quad (126)$$

- Lateral pressure, general laminate

$$-p_{cr} = \text{Min}_n \frac{1}{R} \left( \frac{W_b + W_m}{\eta^2} \right) \quad (127)$$

- Lateral pressure, symmetrical laminate

$$-p_{cr} = \text{Min}_n \frac{1}{R} \left( \frac{W_b + \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 / (R^2 \cdot W_{mN})}{\eta^2} \right) \quad (128)$$

- Hydrostatic external pressure or lateral pressure, approximative solution  
For cylinders of length

$$l \geq 8^4 \sqrt{4R^2 \tilde{D}_{11} a_{22}}$$

the following approximative formula will apply

$$-p_{cr} = \frac{4\pi}{4\sqrt{27}} \frac{1}{l\sqrt{R^3}} \sqrt[4]{\frac{\tilde{D}_{22}^3}{a_{11}}} \quad (129)$$

With this formula there is no need to look for the minimum as regards the number of circumferential waves as it may be obtained from

$$\eta^4 = \frac{\sqrt{3}(\pi/l)^2}{R\sqrt{\tilde{D}_{22}a_{11}}} \quad (130)$$

- Hydrostatic external pressure or lateral pressure, very long cylinders

Very long cylinders buckle at 75 % of the pressure in accordance with Equation (127) and Equation (128) with the ovalizing buckling mode  $n=2$ . This reduction should be kept in mind if evaluation results in a buckling mode where  $n=2$ .

- Reduction factor with hydrostatic pressure and lateral pressure

Imperfektion sensitivity is considerably less with external pressure than with longitudinal pressure. [NAS80] recommends

$$\rho = 0,75 \quad (131)$$

- Einfluss der Randbedingungen bei Außendruck und Manteldruck  
Eine Einspannung der Ränder hat nur einen unbedeutenden Einfluss auf den Beuldruck. Eine Behinderung der Querschnittsverwölbung erhöht dagegen den Beuldruck um bis zu 50 %.

*Belastung durch Torsion*

- Beullast, symmetrisches Laminat  
Der kritische Schubfluss bei Zylindern aus symmetrischen Laminaten ist in Anlehnung an [NAS80]

$$n_{xycr} = \frac{21,75}{2\pi} \frac{D_{22}^{5/8}}{a_{11}^{3/8} R^{3/4} l^{1/2}} \quad (132)$$

- Abminderungsfaktor bei Belastung durch Torsion  
 $\rho = 0,67$  (133)

*Kombinierte Belastung*

Bei Zylinderschalen und gekrümmten Flächenträgern ist die lineare Interaktionsformel, Gleichung (110), anzuwenden. Dabei sollte man die abgeminderten Beullasten einsetzen. Aus dem Lastfall reiner Axialdruck berechne man  $n_{xcr}$ , aus dem Lastfall Manteldruck  $n_{ycr} = -P_{cr}R$  und aus dem Lastfall Torsion  $n_{xycr}$ . Die Schale beult, wenn die Membrankräfte  $\lambda n_x, \lambda n_y, \lambda n_{xy}$  gemäß Gleichung (134) erreicht werden

$$\lambda \left( \frac{n_x}{n_{xcr}} + \frac{n_y}{n_{ycr}} + \frac{n_{xy}}{n_{xycr}} \right) = 1 \quad (134)$$

**6.2.4 Anmerkungen**

Die oben angegebenen Formeln sind unter den folgenden vereinfachenden Annahmen gültig:

1. Die Ränder sind gelenkig gelagert, die Verwölbung (das heißt die Verschiebung in  $x$ -Richtung an Rändern  $x = \text{const.}$  und die Verschiebung in  $y$ -Richtung an Rändern  $y = \text{const.}$ ) ist nicht behindert. Diese Bedingungen werden beim Beulvorgang wirksam. Sie gelten in der Regel nicht für den Grundzustand.
2. Der Grundzustand ist linear und homogen, das heißt die Spannungen des Grundzustandes sind über die Trägerfläche konstant und wachsen bis zum Beulen proportional zur aufgetragenen Last an.
3. Die Flächenträger sind frei von Imperfektionen. Der Imperfektionseinfluss wird durch Abminderungsfaktoren berücksichtigt.
4. Die Theorie flacher Schalen ist anwendbar. Das ist der Fall, wenn in Umfangsrichtung die Halbwellenlänge groß gegenüber der Dicke ist.

- Influence of the boundary conditions with hydrostatic pressure and lateral pressure  
Clamping the edges has only an insignificant effect on the buckling pressure. Preventing the cross-section from warping, on the other hand, will increase the buckling pressure by up to 50 %.

*Loading from torsion*

- Buckling load, symmetrical laminate  
The critical shear flow in cylinders consisting of symmetrical laminates, as based on [NAS80], is

$$n_{xycr} = \frac{21,75}{2\pi} \frac{D_{22}^{5/8}}{a_{11}^{3/8} R^{3/4} l^{1/2}} \quad (132)$$

- Reduction factor with loading from torsion  
 $\rho = 0,67$  (133)

*Combined loading*

With cylindrical shells and curved plates and shells the linear interaction formula, Equation (110), should be used. In this the reduced buckling loads should be input. From the loading case of pure axial compression,  $n_{xcr}$  is calculated and  $n_{ycr} = -P_{cr}R$  from the loading case of lateral pressure, and  $n_{xycr}$  from the loading case of torsion. The shell will buckle when the membrane forces  $\lambda n_x, \lambda n_y, \lambda n_{xy}$  as indicated in Equation (134) are reached.

$$\lambda \left( \frac{n_x}{n_{xcr}} + \frac{n_y}{n_{ycr}} + \frac{n_{xy}}{n_{xycr}} \right) = 1 \quad (134)$$

**6.2.4 Comments**

The formulae given above are valid when the following assumptions are made for the sake of simplification:

1. The edges are hinged and warping (in other words, displacement along the  $x$  axis at edges where  $x = \text{const.}$  and displacement along the  $y$  axis at edges where  $y = \text{const.}$ ) is not prevented. These conditions become effective during the buckling event. They do not as a rule apply to the fundamental state.
2. The fundamental state is linear and homogeneous – in other words, the stresses in the fundamental state are constant over the plates and shells and increase proportionally with the applied load until buckling occurs.
3. The plates and shells are free of imperfections. The influence of imperfections is taken into account by the use of reduction factors.
4. The theory of shallow shells is applicable. This is the case when circumferentially the half-wave-length is large compared to the thickness.

lenlängen der Beulformen kleiner als etwa  $0,75 \cdot R$  sind, wobei  $R$  der Krümmungsradius der Schale ist.

5. Das Laminat ist orthotrop. Orthotropieachsen sind identisch mit den  $x$ - und  $y$ -Achsen des Flächenträgers.
6. Der Einfluss der Nachgiebigkeit gegen Querkräfte (geringe Werte der Schubmoduln  $G_{zx}$ ,  $G_{zy}$ ) ist vernachlässigbar.

Vergleiche mit Berechnungen, die die Vereinfachungen 1 bis 3 nicht voraussetzen, haben gezeigt, dass die angegebenen Formeln für Flächenträger, die frei von Imperfektionen sind, gute Näherungen ergeben und mit einem Bruchteil des Aufwandes der genaueren Rechnung erzielt werden.

Genauere Berechnungen erfordern die Anwendung einer nichtlinearen Schalentheorie. Der damit verbundene Aufwand lohnt sich vor allem dann, wenn der Grundzustand stark veränderlich ist, beispielsweise in der Umgebung von Ausschnitten oder konzentrierten Krafteinleitungen.

Zur Abschätzung der Imperfektionsempfindlichkeit der Schale sollten Berechnungen für verschiedene angenommene Imperfektionen durchgeführt werden. Als Imperfektion stehen in den seltensten Fällen an realen Schalen gemessene geometrische Abweichungen zur Verfügung. Die FEM bietet die Möglichkeit Eigenmodes bzw. Linearkombinationen derselben als Imperfektionen zu verwenden. Dabei sollte jedoch durch mehrere Berechnungen mit unterschiedlichen Formen und Amplituden die für die Traglast ungünstigste Vorverformung festgestellt werden. Wenn möglich, sollten die in der nichtlinearen Berechnung verwendeten Imperfektionen mit entsprechender Literatur untermauert werden.

Anisotropie, das heißt Verletzung der Vereinfachung 5, mindert die Beullasten und bewirkt veränderte Beulformen, deren Knotenlinien nicht parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Für Zylinderschalen gibt es analytische Lösungswege, die jedoch ein Computerprogramm erfordern [Gei85]. Bei dünnen Schalen und ausgeglichenen Laminaten bleibt der Effekt gering.

Die angegebenen Abminderungsfaktoren  $\rho$  zur Berücksichtigung des Imperfektionseinflusses basieren auf Versuchen mit isotropen Zylindern und führen auf untere Grenzen für die Beullasten. Die Anzahl der gut dokumentierten Versuche mit Schalen aus Laminaten reicht nicht aus, um statistisch gesicherte Aussagen über die Abminderungsfaktoren zu treffen. Es zeichnet sich jedoch ab, dass Schalen aus Laminaten weniger imperfektionsempfindlich sind als isotrope Schalen. Mithin erhält man Ergebnisse, die auf der sicheren Seite liegen.

lengths of the buckling modes are less than  $0,75 \cdot R$  or so where  $R$  is the radius of curvature of the shell.

5. The laminate is orthotropic. Orthotropic axes are identical to the  $x$  and  $y$  axes of the plates or shell.
6. The influence of compliance to transverse forces (low values of the shear moduli  $G_{zx}$ ,  $G_{zy}$ ) is negligible.

Comparisons with analyses which do not assume the first three of these simplifications have indicated that the formulae given for plates and shells which are free of imperfections produce good approximations and may be obtained with a fraction of the time and effort required for more precise analyses.

Such more precise analyses require the application of a non-linear shell theory. The greater time expenditure associated with this is primarily worthwhile in cases where the fundamental state is very changeable, such as in the vicinity of cut-outs or concentrated load introduction features.

In order to estimate the imperfection sensitivity of the shell, analyses should be carried out for different assumed imperfections. It is only in the rarest cases that geometric deviations measured on real shells are available as imperfections. FEM makes it possible for eigenmodes or linear combinations of these to be used as imperfections. Here, however, the imperfections which are most unfavourable for the limit load should be determined by carrying out several analyses with different shapes and amplitudes. If possible, the imperfections used in the non-linear analysis should be backed up with the corresponding literature.

Anisotropy – in other words, an infringement of the fifth simplification – reduces the buckling loads and creates modified buckling modes whose nodal lines do not run parallel with the coordinate axes. Analytical solution methods do exist for cylindrical shells but they require a computer program [Gei85]. The effect remains minor in the case of thin shells and balanced laminates.

The reduction factors  $\rho$  indicated for taking into account the influence of imperfections are based on tests with isotropic cylinders and produce lower limits for the buckling loads. However the number of well-documented tests conducted with shells made of laminates is not sufficient to enable statistically substantiated statements to be made regarding reduction factors. It does, however, appear that shells made of laminates are less sensitive to imperfections than isotropic shells. Consequently, results are obtained which lie on the safe side.

Die angegebenen Formeln für Beullasten von gekrümmten Flächenträgern sind unter vereinfachten Annahmen mit der Theorie flacher Schalen ermittelt und berücksichtigen nicht – wie bereits erwähnt – den Einfluss der im Vergleich zu homogenisotropen Schalen geringen Steifigkeit gegenüber Schubkräften quer zur Schalenfläche. Es gibt analytische Lösungen, die diese Vereinfachungen nicht benutzen. Sie führen jedoch nicht zu geschlossenen Formeln für die Beullasten, lassen sich aber mit einem kleinen Rechenprogramm auswerten [Gei97].

### 6.2.5 Berechnungen mit FEM

Stabilitätsberechnungen von geometrisch komplexen FKV-Bauteilen werden zweckmäßig mit Hilfe von FEM-Programmen durchgeführt. Hierbei ist zwischen *linearen* und *nichtlinearen* Stabilitätsberechnungen zu unterscheiden:

- *Lineare* Stabilitätsberechnungen mit FEM erfolgen nach der Theorie der Gleichgewichtsverzweigung (auf dieser beruhen auch alle Formeln in Abschnitt 6.2.3) und führen zur so genannten Verzweigungslast. Imperfektionen können mit dieser Berechnungsmethode nicht implizit berücksichtigt werden. Es gelten die in Abschnitt 6.2.4 gemachten Einschränkungen. Die meisten FEM-Programme bieten diese Berechnungsmöglichkeit. Für die Modellierung der Bauteilwandung (Laminat) siehe Abschnitt 5.4.
- Wesentlich realitätsnähere Ergebnisse bei allerdings deutlich größerem Rechenaufwand liefern geometrisch *nichtlineare* Stabilitätsberechnungen mittels FEM. Dabei wird die für die Bauteilstabilität maßgebende (Druck-)Belastung unter Berücksichtigung des geometrisch nichtlinearen Bauteilverhaltens nach Aufbringen von Bauteilimperfektionen solange iterativ gesteigert, bis die Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr erfüllt werden können (Erreichen der Traglast). Bauteilimperfektionen werden z.B. bei einem Rohr dadurch berücksichtigt, dass einige Knoten des Kreisquerschnittes neben der Kreislinie angeordnet werden. Derartige Berechnungen erfordern stabile nichtlineare Lösungsalgorithmen, die nicht in allen FEM-Programmen verfügbar sind. Für die Modellierung der Bauteilwandung (Laminat) siehe Abschnitt 5.4.

### 6.3 Verbindungen und Krafteinleitungen

Man unterscheidet *kraftschlüssige* Krafteinleitungen (z.B. Kleben), wo die Kraftübertragung zwischen den Fügebauteilen primär großflächig über Schubspannungen stattfindet und *formschlüssige* Krafteinleitun-

The formulae given for the buckling loads of curved plates and shells were obtained on the basis of assumed simplifications by application of the theory of shallow shells and – as has already been stated – do not take into consideration the influence of the lower resistance (in comparison with homogeneously isotropic shells) to transverse forces across the shell surface. There are analytical solutions which do not make use of these simplifications. They do not however result in closed formulae for the buckling loads but can instead be evaluated by means of a small calculating program [Gei97].

### 6.2.5 Finite element analyses

Stability analyses of geometrically complex FRP components are advisably carried out with the aid of FEM programs. A distinction should be drawn here between *linear* and *non-linear* stability analyses.

- *Linear* stability analyses by FEM are carried out in accordance with the theory of equilibrium bifurcation (all of the formulae in Section 6.2.3 are based on this as well) and result in the so-called bifurcation load. Imperfections cannot be covered implicitly with this method of analysis. Most FEM programs support this method. For information about modelling the component walls (laminate), see Section 5.4.
- Results a good deal closer to reality are provided by geometrically *non-linear* stability analyses by FEM although this method has much greater computing power requirements. Here, while taking into consideration the geometrically non-linear behaviour of the component following the addition of component imperfections, the (compressive) loading which is of decisive importance to the component stability is increased to the point where the equilibrium conditions can no longer be satisfied (attainment of limit load). In the case of a tube, for example, component imperfections are included by some nodes of the circular cross-section being arranged next to the circumference. Analyses of this kind require stable non-linear algorithms and not all FEM programs provide them. For information about modelling the component walls (laminate) see Section 5.4.

### 6.3 Joints

A distinction is drawn between chemically *adhesive force* load introduction features (such as glue bonds) where forces are primarily transferred between the two joined components over a large area by means of

gen (Schrauben, Nieten, Bolzen, Schlaufen), wo die Kräfte kleinflächig hauptsächlich über Kontakt-Druckspannungen übertragen werden.

Gegenüber Metallstrukturen sind bei Faserverbunden zusätzlich spezifische Aufgabenstellungen zu beachten, die von der starken Richtungsabhängigkeit der Laminat-Eigenschaften herrühren [Ste93].

**6.3.1 Klebverbindungen**

Das wichtigste Klassifizierungsmerkmal von Klebverbindungen ist die Unterscheidung zwischen einschnittig und zweischnittig, siehe Bild 45.

Mit allen oben skizzierten Verbindungstypen können sowohl Zugkräfte als auch Scherkräfte übertragen werden. Ihre Berechnung gestaltet sich analog: Bei Schub werden Schubspannungen und Schubmoduli der Füge­teile in die entsprechenden Gleichungen eingesetzt, bei Zugkraftübertragung Zugspannungen und (Zug-)Elastizitätsmoduli. Druckkraftübertragungen sind nicht üblich, da dünnwandige Schalen – denn nur solche können, wie gezeigt werden wird, sinnvollerweise durch Klebung gefügt werden – leicht knicken oder beulen würden.

Nachfolgend werden daher nur Klebverbindungen behandelt, die Zugkräfte übertragen können.

**Zweischnittige Klebverbindungen**

Klebverbindungen sollten, wenn irgend möglich, zweischnittig ausgeführt werden, um in der Klebfuge an den Füge­teilkanten zusätzlich zur Schubspannung eine Zugbelastung senkrecht zur Klebfläche zu vermeiden. Dann können die Verhältnisse auf Grund der als groß angenommenen Steifigkeitsunterschiede von Füge­teil und Klebstoff nach der Schubfeldmethode folgendermaßen idealisiert werden, siehe Bild 46.

Die Füge­teile weisen lediglich Normalspannungen auf (die Schubsteifigkeit ist sehr groß), der Klebstoff

shear stresses, and *mechanically* interlocking load introduction features (screws, rivets, bolts, loops, and so on) where forces are transferred primarily over a small area via contact compressive stresses.

Unlike metal structures, with fibre components specific problems will also need to be taken into consideration which are due to the way laminate properties vary greatly according to direction [Ste93].

**6.3.1 Bonded joints**

The most important classificatory feature with bonded joints is the distinction between single-lap (or simple) and double-lap joints (Figure 45).

In all of the types of joint appearing in the diagram not only tensile but also shear forces can be transferred. The corresponding analyses are performed analogously. In the case of shear, shear stresses and shear moduli are input into the corresponding adherent’s formulae; with tensile force transfer, this will be tensile stresses and (tensile) moduli of elasticity. Transfer of compressive force is not usual since thin-walled shells (as only this kind could realistically be joined together by bonding, as will be demonstrated) would buckle easily.

For this reason we shall only deal with bonded joints which can transfer tensile forces.

**Double-lap bonded joints**

Bonded joints should, if at all possible, be of the double-lap type so as to prevent a tensile load vertical to the adherend surface occurring in the adhesive at the adherend edges in addition to the shear stress. Then the relationships can be idealized in the following way on account of the differences in stiffness between adherent and adhesive which are assumed to be large according to the shear lag method (Figure 46).

The adherends only exhibit normal stresses (the shear stiffness is very high) while the adhesive is only ex-

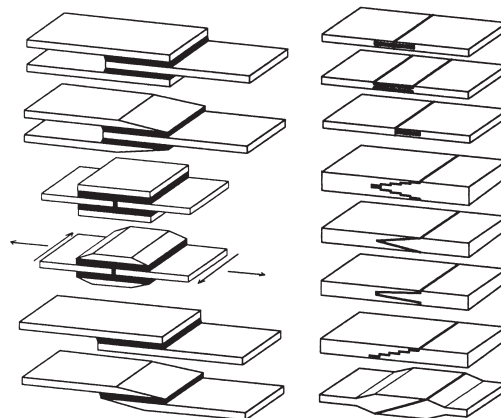


Bild 45. Wichtigste Ausführungsformen von Klebverbindungen [SMH94]

Figure 45. Main types of bonded joints [SMH94]

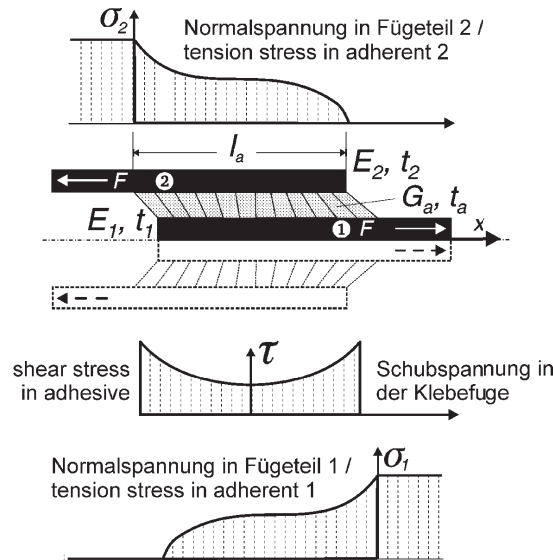


Bild 46. Idealierte Schubspannungs- und Normalspannungsverläufe in Füge­teilen und Klebfugen zweischnittiger Klebverbindungen

Figure 46. Idealized shear stress and normal stress curves in adherends and adhesive of double-lap bonded joints

$E_1, E_2$  E-Modul der Füge­teile  
 $G_a$  Schubmodul des Klebstoffs  
 $l_a$  Länge der Klebung  
 $t_1, t_2$  Dicken

$E_1, E_2$  modulus of elasticity of the adherends  
 $G_a$  shear modulus of the adhesive  
 $l_a$  length of the bonding  
 $t_1, t_2$  thicknesses

wird nur auf Schub belastet (die Zugsteifigkeit ist sehr niedrig). Schälspannungen senkrecht zur Klebfläche an den Füge­teilkanten, die auch bei zweischnittigen Verbindungen in geringem Umfang auftreten, können vernachlässigt werden, ebenso die Tatsache, dass die Schubspannung in der Klebfuge am Rande (schröff) auf Null absinken muss.

posed to shear (the tensile stiffness is very low). Peel stresses vertical to the adherend surface at the adherend edges, which can occur to a minor extent even with double-lap bonded joints, may be ignored as can the fact that the shear stress in the adhesive must fall (abruptly) to zero at the edge.

Das Materialgesetz des Klebstoffs ist in Bild 46 als ideal elastisch angenommen. Dann treten an den Rändern hohe Schubspannungsspitzen auf. Sie sind dort am größten, wo das steifere Füge­teil endet. Die Gleichung für die Schubspannung im Klebstoff entlang der Klebfuge lautet:

In Figure 46 the constitutive law of the adhesive is assumed to be ideally elastic. In this case high shear stress peaks will occur at the edges. They will be at their greatest where the more rigid adherend ends. The equation for the shear stress in the adhesive along the glue­line is:

$$\tau(x) = \Phi^* \frac{F + [\cosh(l_a \Phi^*) - 1](\theta / \Phi^*)}{\sinh(l_a \Phi^*)} \cosh(\Phi^* x) - (\theta / \Phi^*) \sinh \Phi^* x \quad (135)$$

$$\tau(x) = \Phi^* \frac{F + [\cosh(l_a \Phi^*) - 1](\theta / \Phi^*)}{\sinh(l_a \Phi^*)} \cosh(\Phi^* x) - (\theta / \Phi^*) \sinh \Phi^* x \quad (135)$$

mit  $\Phi^* = \sqrt{\Phi}$

where  $\Phi^* = \sqrt{\Phi}$

$$\Phi = \frac{G_a E_1 t_1 + E_2 t_2}{l_a E_1 t_1 E_2 t_2}$$

$$\Phi = \frac{G_a E_1 t_1 + E_2 t_2}{l_a E_1 t_1 E_2 t_2}$$

$$\theta = \frac{G_a}{t_a} \left[ \frac{F}{E_2 t_2} + (\alpha_{T_1} \Delta T_1 - \alpha_{T_1} \Delta T_2) + (\alpha_{M_1} \Delta M_2 - \alpha_{M_2} \Delta T M_2) \right]$$

$$\theta = \frac{G_a}{t_a} \left[ \frac{F}{E_2 t_2} + (\alpha_{T_1} \Delta T_1 - \alpha_{T_1} \Delta T_2) + (\alpha_{M_1} \Delta M_2 - \alpha_{M_2} \Delta T M_2) \right]$$

Darin sind  $\alpha_T$  und  $\alpha_M$  die hygrothermalen Ausdehnungskoeffizienten in Belastungsrichtung und  $\Delta T$  und  $\Delta M$  die Temperatur bzw. Feuchtedifferenz gegenüber dem Zustand beim Zusammenfügen.

Die Höhe der Schubspannungsspitzen an den Füge-teilenden hängt vor allem von den Steifigkeitsverhältnissen zwischen Klebfuge und Füge-teil ab. Der Einfluss der Überlappungslänge ist zweitrangig; insbesondere eine Verlängerung der Überlappung führt ab einer bestimmten Größe nicht mehr zu einer Verringerung der Schubspannungsspitzen. Sie bleiben nahezu unverändert, lediglich der gering belastete Bereich in der Mitte der Klebfuge wird damit verlängert.

Bei Verwendung eines linear-elastisch/ideal-plastischen Klebstoffs werden die Schubspannungsspitzen an den Enden gekappt (Bild 47). Der mittlere, elastisch verformte Teil wird mit zunehmender Last kleiner, bis schließlich die gesamte Klebfuge plastisch verformt ist. Eine weitere Lastzunahme ist dann nicht mehr möglich. Diese Höchstlast kann nur erreicht werden, wenn die maximal ertragbare Scherung des Klebstoffs auch an den Enden nicht überschritten wird. Für eine symmetrische Klebefügung ( $E_1 t_1 = E_2 t_2 = Et$ ) haben die maximale Scherung und die maximale Spannung folgende Beziehung zueinander:

$$\frac{\gamma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{l_a^2}{4t_a Et} + \frac{1}{G_a} \tag{136}$$

Here  $\alpha_T$  and  $\alpha_M$  are the hygrothermal coefficients of expansion in the direction of loading and  $\Delta T$  and  $\Delta M$  are the temperature or moisture differences with respect to the state when joining/bonding together was done.

The magnitude of the shear stress peaks at the adherend ends depends primarily on the stiffness ratio of the adhesive and the adherend. The influence of the length of the lap is of secondary importance. Indeed, beyond a particular size, increasing the overlap will no longer result in a reduction in the shear stress peaks. They will remain virtually unchanged and only the low-stressed region in the middle of the adhesive will be extended thereby.

If a linear-elastic/ideal-plastic adhesive is used, the shear stress peaks are cut at the ends (Figure 47). The elastically deformed part in the middle becomes smaller as the load increases, until finally the entire adhesive has deformed plastically. No further increase in load is then possible. This maximum load can only be reached when the maximum supportable shear strength of the adhesive is not exceeded including at the ends. In the case of a symmetrical bond ( $E_1 t_1 = E_2 t_2 = Et$ ) the maximum shear strain and the maximum shear stress have the following relationship to each other:

$$\frac{\gamma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{l_a^2}{4t_a Et} + \frac{1}{G_a} \tag{136}$$

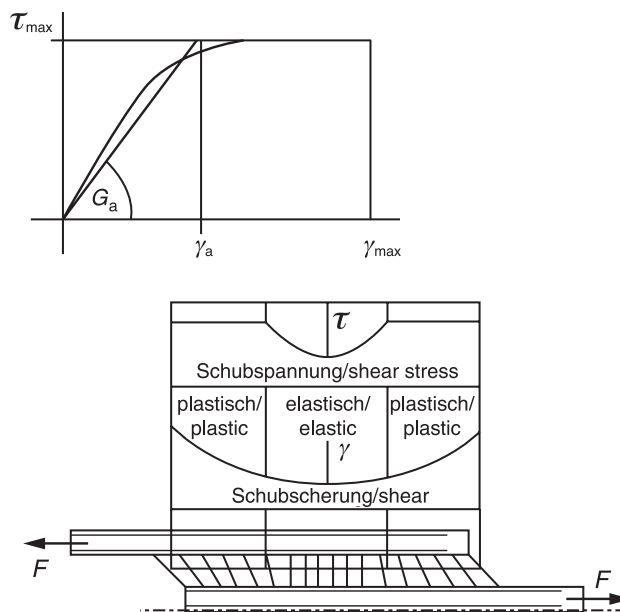


Bild 47. Materialgesetz eines linear-elastisch/ideal-plastischen Klebstoffs und die zugehörige Schubspannungsverteilung der Klebfuge

Figure 47. Constitutive law of a linear-elastic or ideal-plastic adhesive and the corresponding shear stress distribution in the adhesive

Daraus ergibt sich für hoch-scherfähige Klebstoffe eine maximal übertragbare Linienlast von

$$F_{\max}^* = \gamma_{\max} [Et \cdot G_a t_a]^{1/2} \quad (137)$$

bei optimalem  $l_a^2 = 4Et \cdot t_a / G_a$

**Einschnittige Klebverbindungen**

Zweischchnittige Klebefügungen sind nicht immer möglich und auch nicht immer nötig. Es treten an einschnittigen Verbindungen dann keine Schälspannungen auf, wenn es sich um Verklebungen von Rohren handelt oder wenn nicht Zug- sondern Schubkräfte zu übertragen sind. Ansonsten sind den oben genannten Spannungen in Kleber und Füge-teilen Biegespannungen in den Füge-teilen und Zugspannungen in der Klebfuge (Bild 48) überlagert. Sie können erhebliche Beträge annehmen.

Anders als bei metallischen Füge-teilen, können bei Laminaten die Füge-teile nicht nur durch Abreißen (senkrecht zur Krafrichtung), sondern bei ungünstiger Faserorientierung und Schichtung des Laminates auch durch „Delaminieren“ innerhalb des Laminates selbst versagen. Das erklärt sich daraus, dass wegen der durch die Fasern verursachten Dehnungsvergrößerung in der Matrix des FKV-Füge-teils die intra- und interlaminaren Schub- und Zugspannungen im Füge-teil höher sind als die Schub- und Zugspannungen im Klebstoff, während die für ZFB relevanten Festigkeiten im Füge-teil niedrigen sind als die Schub- und Zugfestigkeit des Klebstoffs. Dies gilt insbesondere für Kohlenstoff- und Aramidfaserverstärkungen. Die maximalen Schälspannungen an den Füge-teilenden (Bild 48) sind bestimmt durch

$$\sigma_{s, \max} = M_b \sqrt{(E_a / 2t_a D)} \quad (138)$$

mit dem Biegemoment im Füge-teil

$$M_b = \frac{0,5 \cdot F(t + t_a)}{[1 + (l_a/2) \sqrt{F/D} + l_a^2 \cdot F / (24 \cdot D)]} \quad (139)$$

wobei  $E_a$  der Elastizitätsmodul des Klebers ist und  $D$  die Biegesteifigkeit des Füge-teils. Die Schälspannungen  $\sigma_{s, \max}$  im Kleber (senkrecht zur Laminatenebene)

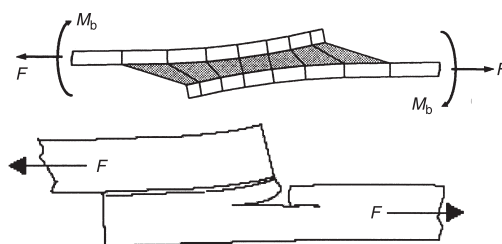


Bild 48. Überhöht dargestellte Verformungen an einer zugbelasteten, einschnittigen Klebverbindung und deren spezifische Auswirkung auf Laminat

From this we may obtain for adhesives with a high shear capability a maximum transferable line load (related to the adherend width) of

$$F_{\max}^* = \gamma_{\max} [Et \cdot G_a t_a]^{1/2} \quad (137)$$

for an optimal  $l_a^2 = 4Et \cdot t_a / G_a$

**Single-lap bonded joints**

Double-lap bonded joints are not always possible nor are they always necessary. No peel stresses will occur at single-lap joints when it is tubes which are being glued together or when shear forces rather than tensile forces are to be transferred. Apart from this, the above-mentioned stresses in the adhesive and adherends are superimposed by bending stresses in the adherends and tensile stresses in the adhesive (Figure 48). They can take on considerable magnitudes.

Unlike joined metallic parts, with laminates the adherends can in case of an unfavourable fibre orientation and laminate lay-up themselves fail not only by tearing off (vertically to the direction of force) but also by “delaminating” within the laminate. The reason is that the fibres cause a local strain magnification in the matrix of the FRP adherend, which leads to intra- and interlaminar stresses in the adherend which are higher than the shear and tensile stresses in the adhesive whilst the strength values relevant for the IFF are lower in the adherend compared to the shear and tensile strength of the adhesive. This is true of carbon and aramid fibre reinforcements in particular. The maximum peel stresses at the ends of the bonded pieces (Figure 48) are defined by

$$\sigma_{s, \max} = M_b \sqrt{(E_a / 2t_a D)} \quad (138)$$

with the bending moment in the adherend

$$M_b = \frac{0,5 \cdot F(t + t_a)}{[1 + (l_a/2) \sqrt{F/D} + l_a^2 \cdot F / (24 \cdot D)]} \quad (139)$$

where  $E_a$  is Young’s modulus of the adhesive and  $D$  is the bending stiffness of the adherend. The peel stresses  $\sigma_{s, \max}$  in the adhesive (vertically to the lami-

Figure 48. Deformations (shown with vertical scale exaggerated) in a single-lap bonded joint under tensile stress and their specific effect on laminates



sind konstruktiv relativ einfach zu minimieren: durch Schäftung der Fügeteilenden (Bild 45, 4. Ausführung von links oben). Dadurch werden allerdings die Biegemomente in den Fügeteilen nicht vermindert. Die Überlagerung von Biegespannungen und der aus der Grundlast herrührenden Zugspannung kann bis zum 4-fachen der Grundzugspannung betragen (Bild 49).

Anders als bei zweischnittigen Fügungen, wo eine Verlängerung der Klebfuge über ein bestimmtes Maß hinaus keine Erhöhung der übertragbaren Last bewirkt, nimmt hier die Effizienz der Fügung mit wachsender Fugenlänge zu, erreicht aber nie – wie bei zweischnittigen Klebungen möglich – den Wert „1“. Auch bei der einschnittigen Fügung erfolgt der Übergang der Kräfte von einem Fügeteil zum anderen durch Schubspannungen fast ausschließlich an den jeweiligen Enden (eventuell gemildert durch Schäftung). Eine überlange Überlappung dient einzig der Verringerung der Biegespannungen in den Fügeteilen.

Hart-Smith hat in einem Diagramm (Bild 50) die Verhältnisse an einer einschnittigen Fügung anschaulich qualitativ zusammengestellt [Har85].

(nate plane) are relatively easy to minimize from the design point of view – by using a tapered overlap with the ends of the bonded parts (fourth type from the top on the left in Figure 45). This will not however reduce the bending moments in the adherends. Superimposition of bending stresses and the tensile stress coming from the basic loading may be as much as four times the basic tensile stress (Figure 49).

Unlike with double-lap joints, where extending the glue-line beyond a certain length does not result in any increase in the transferable load, here the efficiency of the joint increases with the length of the joint but never reaches the value of “1” as is possible with double-lap joints. Even in the single-lap joint forces are transferred from one part to the other by shear stresses almost exclusively at the ends (possibly moderated by tapering the overlaps). Excessive length in the overlapping only serves to reduce the bending stresses in the adherends.

In a diagram (Figure 50) Hart-Smith has summarized clearly and qualitatively the relationships obtaining in a single-lap joint [Har85].

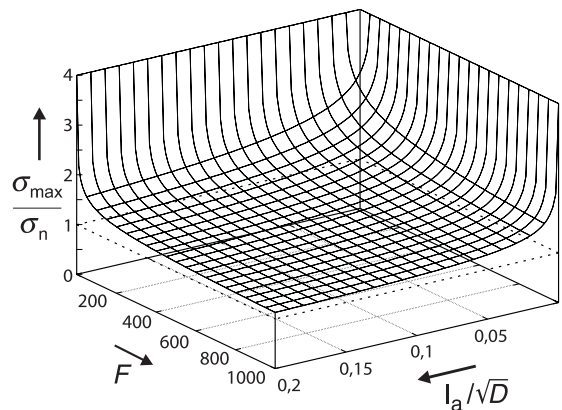


Bild 49. Biegespannungsüberhöhungen in den Fügeteilen an den Enden symmetrischer, einschnittiger Klebverbindungen ( $E$ -Modul über Dicke verschmiert)

Figure 49. Stress magnifications in the adherends at the ends of symmetrical, single-lap bonded joints (Young’s modulus plotted with smearing against thickness)

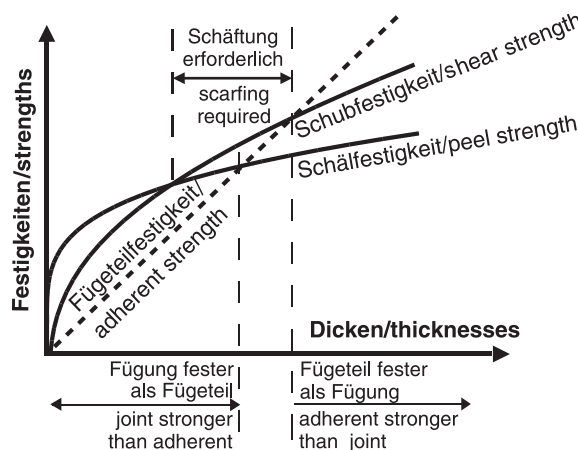


Bild 50. Qualitativer Zusammenhang der Festigkeiten über den Dicken an einschnittigen Klebfügungen

Figure 50. Qualitative relationship of strengths to thicknesses in single-lap bonded joints

Bei dünnwandigen Fügeteilen gelingt es durch ausreichende Bemessung der Überlappungslänge und Fugendicke, die Fügung fester zu gestalten als die Fügeteile selbst. Mit zunehmender Fügeteildicke (resp. Fügeteilfestigkeit) entsteht die Notwendigkeit, die Fügeteile an den Enden anzuschärfen, um Schäl- und Querspannungsspitzen zu kappen. Bei noch weiter ansteigender Fügeteildicke (und -festigkeit) kann die Fügung die Festigkeit der Fügeteile auf keinen Fall erreichen. Diese Grenze liegt bei der einschrittigen Fügung unter 50 % derjenigen der zweischrittigen.

Zur Berechnung vor allem einschrittiger Verklebungen siehe auch [Yan93; Har85; SMH94; Big89].

### **Einfluss von Materialeigenschaften**

Klebstoffe verhalten sich selten linear-elastisch – außer bei (werkstoffabhängigen) Tieftemperaturen oder (schnellen) Wechselbelastungen. Je höher die Einsatztemperatur und der Feuchtegehalt, desto mehr nähern sie sich dem in Bild 47 skizzierten linear-elastisch/ideal-plastischen Werkstoffgesetz. Dabei sinkt die ertragbare Spannung, die höchstmögliche Scherung wächst. Bei einer (plastisch) nicht voll ausgereizt dimensionierten Klebung wirken diese beiden Änderungen gegenläufig und bewirken (in Grenzen) effektiv keine Verringerung der Tragfähigkeit. Auch Langzeitbelastungen bewirken durch Kriechen einen Abbau von Spannungsspitzen und verstärken quasi-plastisches Materialverhalten. Dem entgegen wirkt allerdings die (stark umgebungsabhängige) Alterung (Versprödung) aller Kunststoffe!

### **6.3.2 Bolzenverbindungen**

Schrauben-, Bolzen-, Nietverbindungen können ein- oder mehrreihig ausgeführt werden. Wenn mehr als zwei Reihen verwirklicht werden, tragen die mittleren Reihen (bei ideal starr angenommenen Bolzen) keine Last, bei zwei Reihen ist die Lastübertragung gleichmäßig aufgeteilt. Es wird nachfolgend nur auf einreihige Verbindungen – gleiche Dehnsteifigkeit vorausgesetzt – eingegangen.

Die Spannungszustände an belasteten und unbelasteten Bohrungen in Mehrschichtverbunden sind sehr komplex, im Rahmen dieses Dokuments ist daher nur eine überschlägige Behandlung möglich. In Bild 51 sind bezüglich der unterschiedlichen Versagensarten überschlägig berechnete Spannungen und zugehörige Laminatfestigkeiten einander gegenübergestellt.

Sie ermöglichen trotz ihres offensichtlich geringen Detaillierungsgrades eine ausreichend genaue Berechnung der Tragfähigkeit von reibungsfrei belasteten Bolzenverbindungen, da viele der dabei vernach-

In the case of thin-walled adherends it is possible, by adequately dimensioning the overlap length and joint thickness, to make the joint stronger than the adherends themselves. As the thickness (or strength) of the bonded part increases the necessity arises of tapering the ends of the bonded parts in order to cut peel and transverse tensile stress peaks. If the thickness (and strength) of the bonded parts is increased even further, the joint will not under any circumstances reach the strength of the parts. With the single-lap joint this limit is below 50 % of the limit for the double-lap joint.

For information on analysing single-lap bonded joints, see also [Yan93; Har85; SMH94; Big89].

### **Influence of material properties**

Adhesives seldom behave in a linear-elastic manner – except at (material-specific) low temperatures or (rapidly) alternating loads. The higher the service temperature and the moisture content, the more they will approach the linear-elastic/ideal-plastic constitutive law outlined in Figure 47. Here the sustainable stress falls and the greatest possible shear deformation increases. With an adhesive bond which has not been dimensioned so as to utilize fully the plastic reserves, these two changes will work against each other and (within limits) effectively not cause any reduction in load-bearing capacity. Even long-term stresses will cause, by creep, a reduction in stress peaks and will increase the quasi-plastic behaviour of the material. However, this will be opposed by the (environmentally dependent) ageing effect (or embrittlement) to which all plastics are liable!

### **6.3.2 Mechanically fastened joints**

Screwed, bolted or riveted joints can be single-row or multiple-row joints. If more than two rows are used, the middle rows (with a pin assumed to have ideal stiffness) will carry no load while with two rows the load transfer will be evenly distributed. Here we will only be concerned with single-row joints, assuming that the tension stiffness is the same.

The stress states in loaded and unloaded holes in multi-ply composites are very complex and only a brief treatment will be possible in this guideline. Approximate figures calculated for the stresses and corresponding laminate strengths are compared for the various types of failure in Figure 51.

Despite their clearly low level of detail they do permit an adequately precise analysis of the load-bearing capacity of pinned joints with frictionless loading since many of the influences ignored here (such as local

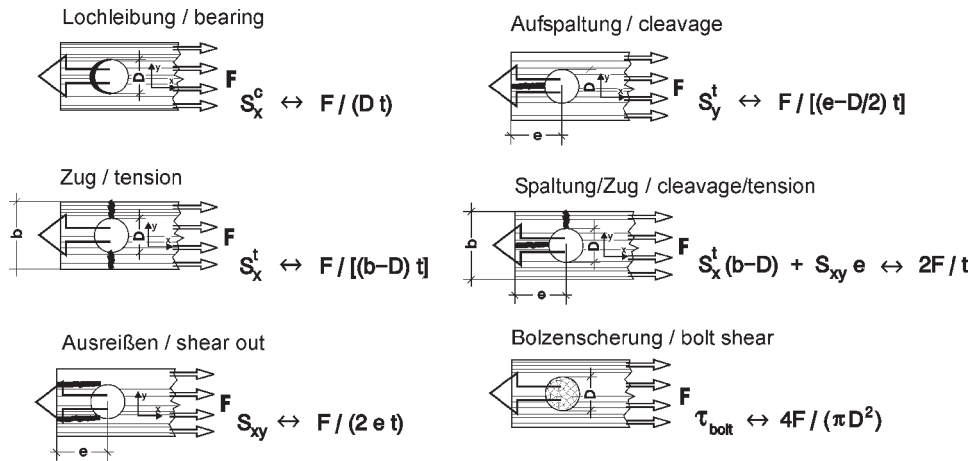


Bild 51. Versagensarten und zugehörige Laminatfestigkeiten in reibungsfrei belasteten Bolzenverbindungen

Figure 51. Failure types and corresponding laminate strengths in pinned joints with frictionless loading

lässigten Einflüsse (wie lokale Spannungsüberhöhung und Mikrorissbildung) einander entgegengesetzt wirken [Ste93].

stress concentrations and the formation of microcracks) work against each other [Ste93].

Allgemein kann gesagt werden, dass Bolzenverbindungen in Laminaten hohe Lasten übertragen können, wenn sie angemessen ausgeführt werden und gemäß Bild 51 richtig dimensioniert sind. Dazu gehört ein angepasster Laminataufbau mit etwa 50 % in 0°, 40 % bis 45 % in ±45° und 5 % bis 10 % in 90° zur Lastrichtung. Die Schichtfolge sollte nicht geblockt, sondern feinschichtig aufgeteilt und die äußeren Lagen nicht in 0°-Richtung angeordnet sein. Ein seitlicher Anpressdruck über ausreichend großflächige Unterlagscheiben erhöht die ertragbare Last (die zulässige Lochleibung) beträchtlich.

In general we may say that pinned joints can transfer high loads in laminates if they are designed appropriately and dimensioned as shown in Figure 51. This will include an appropriate laminate lay-up with, say, 50 % at 0°, 40 % to 45 % at ±45° and 5 % to 10 % at 90° to the direction of loading. The different layers should not be arranged in blocks but rather fine layers and the outer laminae should not be arranged in the 0° direction. A lateral contact pressure via washers with an adequate surface area will considerably increase the load which can be supported (the load bearing strength).

### 6.3.3 Schlaufenanschlüsse

### 6.3.3 Loop joints

Sehr spezielle Bolzenverbindungen sind Schlaufenanschlüsse. Sie können im Allgemeinen nur Zugkräfte übertragen. Bei ihnen laufen die Fasern vordergründig lastflussgerecht um einen Bolzen herum und werden in Längsrichtung scheinbar fast nur auf Zug belastet. Bild 52 zeigt die Normalspannungen im Auge einer Schlaufe in Abhängigkeit vom radialen Bolzenabstand und die Auswirkung der Steifigkeit der eingesetzten Fasern auf die Spannungsverteilung. Je steifer die Faser, desto geringer ist – außer am Innenradius – die Ausnutzung der Faserfestigkeit insgesamt. Dies gilt umso mehr, je „dicker“ die Schlaufe ist.

Racetrack-shaped loop joints are a very special kind of pinned or bolted joints. They are generally only capable of transferring tensile forces. Their fibres run around a pin seemingly in a manner appropriate to the force flow and are apparently subjected almost exclusively to tension. Figure 52 shows the normal stresses in the eye of a loop as a function of the radial pin distance and the effect of the stiffness of the fibres seemingly on the stress distribution. The more rigid the fibre, the lower will be the amount to which the fibre strength is utilized as a whole (with the exception of the inner radius). The “thicker” the loop is, the more this will apply.

Die Beanspruchungen in einer Schlaufe können überschlägig wie die eines dickwandigen Rohres errechnet werden. Dann wird auch sofort klar, dass zusätzlich zu den in Bild 52 gezeigten Tangentialspannungen, auch Radialspannungen herrschen, die am Innenrand maximal sind – dort wo auch die Tangentialspannungen am größten sind! Sie berechnen sich

The stresses in a loop can be roughly calculated if they are taken as the same as those in a thick-walled tube. This will also make it immediately clear that, in addition to the tangential stresses indicated in Figure 52, radial stresses also dominate, being at their maximum at the inner edge – precisely where the tangential stresses are also the greatest! They can

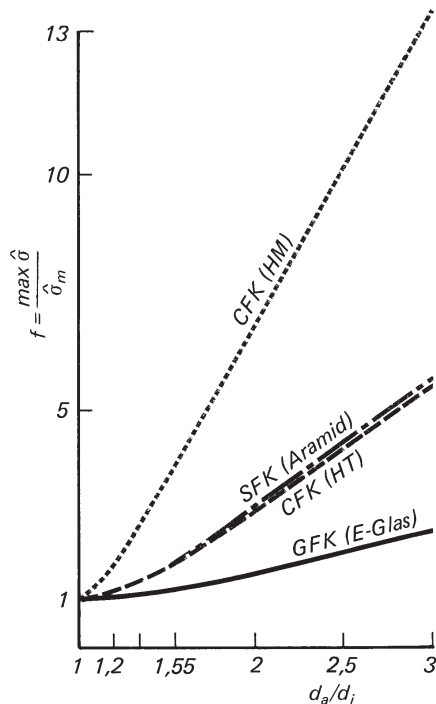


Bild 52. Schlaufenbeanspruchung in Faserlängsrichtung und Spannungsüberhöhungsfaktoren für verschiedene Verstärkungsfasern

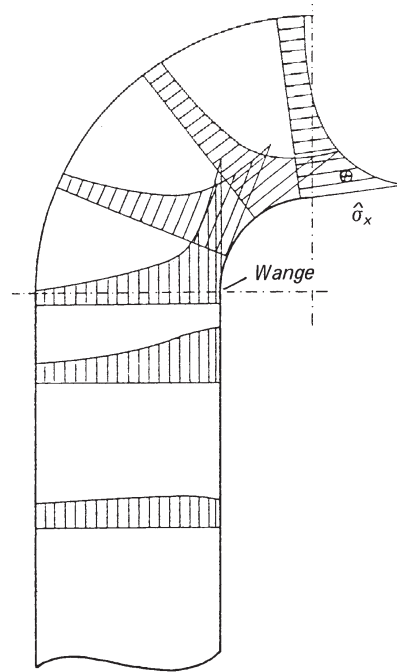


Figure 52. Loop stressing along the length of fibres and stress magnification factors for different reinforcement fibres

leicht aus der übertragenen Kraft  $F$  und den geometrischen Daten der Breite  $w$  und dem Innendurchmesser  $d_i$  zu

$$\sigma_{r,i} = F/(wd_i) \tag{140}$$

Die Tangentialspannung am Innenrand beträgt

$$\sigma_{t,i} = -\frac{F}{wd_i} e \left( \frac{1}{1 - (d_a/d_i)^{2e}} - \frac{1}{1 - (d_a/d_i)^{-2e}} \right)$$

mit  $e = \sqrt{E_t/E_r}$  (141)

Die Indices „a“ und „i“ stehen für außen und innen; „t“ und „r“ für tangential und radial. Der Faktor  $e$  gilt hier für den zweidimensionalen Spannungszustand, also ohne seitliche Begrenzungen und für relativ schmale Schlaufen. Seitliche Stützungen (die bei sehr breiten Schlaufen effektiv auch durch Reibung zwischen Bolzen und Schlaufe bewirkt werden können) erhöhen die Tragfähigkeit von Schlaufen aus Glas- und Kohlenstofffasern, nicht jedoch bei hoch anisotropen Polymerfasern, z.B. Aramid. Dies zeigt, dass es zur Dimensionierung von Schlaufen nicht ausreicht, die oben genannten Spannungen mit den entsprechenden Festigkeiten zu vergleichen. Es muss vielmehr eine zwei- oder für seitlich gestützte Schlaufen (vgl. VDI 2014 Blatt 2) eine dreidimensionale Festigkeitshypothese angewendet werden. Bei dynamischen Belastungen sind experimentelle Untersuchungen unerlässlich.

be easily calculated from the transferred force  $F$  and the geometrical data for the width  $w$  and the internal diameter  $d_i$  by

$$\sigma_{r,i} = F/(wd_i) \tag{140}$$

The tangential stress at the inner edge is

$$\sigma_{t,i} = -\frac{F}{wd_i} e \left( \frac{1}{1 - (d_a/d_i)^{2e}} - \frac{1}{1 - (d_a/d_i)^{-2e}} \right)$$

where  $e = \sqrt{E_t/E_r}$  (141)

The subscripts “a” and “i” stand for external and internal, “t” and “r” for tangential and radial. Here, the factor  $e$  applies to the two-dimensional stress state – in other words, without lateral limits and for relatively narrow loops. Lateral supports – using bolts – (which with very wide loops can be effectively also provided by friction between the pin and the loop) increase the load-bearing capacity of loops made of glass or carbon fibre but not of highly anisotropic polymer fibres such as aramid. This indicates that in dimensioning loops it is not enough to compare the above-mentioned stresses with the corresponding strengths. Instead a two-dimensional or, for laterally supported loops (cf. VDI 2014 Part 2), a three-dimensional strength hypothesis must be applied. Experimental investigations are indispensable in the case of dynamic stresses.

**Schrifttum/Bibliography****Literatur/Literature**

- [ABA99] Analyses of composite materials with ABAQUS. Seminar, Abacom, Aachen, 1999
- [ANS99] ANSYS Composites. Seminar, Cadfem, München-Grafring, 1999
- [Ash69] *Ashton, J.E.*: Approximate Solutions for Unsymmetrical Laminated Plates. *J. of Composite Materials* 3 (1969), pp. 189–191
- [ASM87] ASM-International: Engineered Materials Hdbk. Vol I „Composites“ 1987, p. 487
- [Big89] *D.A. Bigwood and A.D. Crocombe*: Elastic analysis and engineering design formulae for bonded joints. *Int. J. Adhesion and Adhesives* 9 (1989) 4, pp. 229–242
- [Bus85] *Bushnell, D.*: Computerized buckling analysis of shells. Dordrecht, Boston, Lancaster: Martinus Nijhoff Publishers (1985)
- [Cam06] *Camanho, P.P., Dávila C.G., Pinho S.T., Iannucci L., and Robinson P.*: Prediction of in situ strength and matrix cracking in composites under transverse tension and in-plane shear, *Composites Part A* 37 (2006), pp. 165–176
- [Cun83] *Cuntze, R.*: Einfluß von Schubelastizität und Drehträchtigkeit auf die Biegeeigenfrequenz gleichförmig massebelegter Einfeldbalken. *Konstruktion* 35 (1983) 5, S. 183–186
- [Cun97] *Cuntze et al.*: Neue Bruchkriterien und Festigkeitsnachweise für unidirektionalen Faserkunststoffverbund unter mehrachsiger Beanspruchung – Modellbildung und Experimente. *Fortschrittberichte VDI, Reihe 5, Nr. 506*. Düsseldorf: VDI Verlag 1997
- [DNV03] *N.N.*: Composite Components. Offshore Standard DNV-OS-C501. Det Norske Veritas (<http://www.dnv.com>), January 2003
- [SMH94] European Space Agency: ESA PSS-03-203 Issue 1, „Structural Materials Handbook“. Vol 1, Polymer Composites, 1994
- [Fis03] *Fischer, O.W.*: Faserbruchgeschehen in kohlenstoff-faserverstärkten Kunststoffen, D82 (Diss. RWTH Aachen) 2003; Verlag Mainz, Wissenschaftsverlag, Aachen (2003)
- [Fle03] *Flemming, M. and Roth, S.*: Faserverbundbauweisen, Eigenschaften, mechanische, konstruktive, thermische, elektrische, ökologische, wirtschaftliche Aspekte. Springer 2003
- [Gar92] *Garbe, J.*: Auslegung und Prüfung einer drehelastischen Antriebswelle. SKZ-Fachtagung „Ermüdungsverhalten von Faserverbundkunststoffen und Lebensdauervorhersage für Faserverbundbauteile“, 11./12. Nov. 1992, Würzburg
- [Gar93] *Garbe, J. und Puck, A.*: Erfahrungen mit Bruchkriterien an schwelend belasteten GFK-Drehfedern (Experience with criteria for fracture of FRP torsion springs in cyclic loading). *Kunststoffe, German Plastics* 83 (bilingual edition English and German), (1993) 5, pp. 28 et sqq., German text S. 406–411
- [Gar96] *Garbe, J.*: Bruchhypothesen und Bruchkriterien für schwingend beanspruchte Glasfaser-Kunststoff-Verbunde. Darmstadt: LBF-Bericht Nr. 7366, 1996
- [Gei85] *Geier B. and Rath, A.K.*: Analysis of long thin-walled tubes. Proc. of an International Conference on Large Space Structures, CNES, Toulouse, France, 3–5 Dec. 1985
- [Gei88] *Geier, B.*: Buckling and postbuckling behaviour of composite panels. Proc. 16<sup>th</sup> Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences; Jerusalem, Israel, August 28 to September 2, 1988
- [Gei89] *Geier, B. and Rohwer, K.*: On the analysis of the buckling behaviour of laminated composite plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 27 (1989), pp. 403–427
- [Gei97] *Geier, B. and Singh, G.*: Some simple solutions for buckling loads of thin and moderately thick cylindrical shells and panels made of laminated composite material. *Aerospace Science and Technology* 1 (1997), pp. 47–63
- [Gei98] *Geier, B.*: The imperfection sensitivity of axially compressed thin-walled circular cylinders – Attempts to define a measure. Proceedings of the 39<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamic and Materials Conference; Long Beach, California, April 20/23, 1998, Part 1, pp. 604–612, Paper AIAA 98-1771
- [Ger92] *Gerharz, J. J.*: Berücksichtigung von Bauteil-, Umwelt- und Belastungsparametern bei der Lebensdauervorhersage für Faserverbundbauteile. SKZ-Fachtagung „Ermüdungsverhalten von Faserverbundkunststoffen und Lebensdauervorhersage für Faserverbundbauteile“, 11./12. Nov. 1992, Würzburg
- [Gie81] *Giencke, E. und Meder, G.*: Ermittlung der Kriechfunktionen von zweiachsig beanspruchten Harzen und Laminaten aus den Meßwerten für einachsig beanspruchte Harze. *Materialprüf.* 23 (1981) 3, S. 75–85
- [Goe89] *Götte, T.*: Zur Gestaltung und Dimensionierung von LKW-Blattfedern aus Glasfaser-Kunststoff. *Fortschrittberichte VDI, Reihe 1 Nr. 174*. Düsseldorf VDI Verlag, 1989
- [GL99] *Germanischer Lloyd*: Vorschriften und Richtlinien für „IV Nichtmaritime Technik“: 1) Richtlinie für die Zertifizierung von Windenergieanlagen und 5) Rotorblätter. Ausgabe August 1999
- [Hai89] *Haibach, E.*: Betriebsfestigkeit. Düsseldorf VDI Verlag, 1989
- [Har85] *Hart-Smith, L.J.*: Designing to Minimize Peel Stresses in Adhesive-Bonded Joints. *ASTM STP 876* (1985), pp. 238–266
- [Har93] *Hart-Smith, L.J.*: An Inherent Fallacy in Composite Interaction Failure Curves. *Designers Corner, Composites* 24 (1993), pp. 523–524
- [Har98] *Hart-Smith, L.J.*: Predictions of the generalized maximum-shear-stress failure criterion for certain fibrous composite laminates. Special issue of *Composites Science and Technology* 58 (1998), pp.1179–1208; Failure Exercise, Part A
- [Has80] *Hashin, Z.*: Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. *J. of Applied Mechanics* 47 (1980), pp. 329–334
- [Her98] *Herakovich, C.T.*: Mechanics of fibrous composites. John Wiley & Sons, 1998
- [Hin04] *Hinton, M.J. and Kaddour, A.S. and Soden, P.D.*: Failure Criteria in Fibre Reinforced Polymer Composites, The World-Wide Failure Exercise. Amsterdam: Elsevier 2004
- [Hin98] *Hinton, M.J.; Soden, P.D.*: Predicting failure in composite laminates: the background to the Exercise. *Composites Science and Technology* 58 (1998) 7, pp. 1001–1010
- [HSB] Luftfahrttechnisches Handbuch für Strukturberechnung (HSB). IASB (Industrieausschuß für Strukturberechnung), DASA-Airbus, Bremen, Prof. L. Schwarmann, in German and English available at technical information library (TIB) at Hannover
- [Huf99] *Hufenbach, W. and Kroll, L.*: Stress Analysis of Notched Anisotropic Finite Plates under Mechanical and Hygrothermal Loads. *Archive of Applied Mechanics* 69 (1999), p. 145–159
- [Huy96] *Huybrechts, D.*: Ein erster Beitrag zur Verifikation des wirkebenenbezogenen ZFB-Kriteriums nach Puck. *Technisch wissenschaftlicher Bericht*. Aachen: Verlag der Augustinus Buchhandlung, 1996

- [Jak82] *Jakobi, R. und Puck, A.*: Zur Konstruktion und Berechnung von röhrenförmigen Faserverbund-Biegeträgern. 18. Jahrestagung AVK, 5.–7. Okt. 1982, Freudenstadt
- [Jak87] *Jakobi, R.*: Zur Spannungs-, Verformungs- und Bruchanalyse an dickwandigen, rohrförmigen Bauteilen aus Faserkunststoffverbunden. Fortschrittberichte VDI, Reihe 5 Nr. 126. Düsseldorf: VDI Verlag 1987
- [Jon75] *Jones, R.M.*: Mechanics of Composites Materials. New York: Mc. Graw Hill, 1975
- [Kai04] *Kaiser, C. and Kuhnel, E. and Obst, A.*: Failure criteria for non metallic materials, part 1: fibre reinforced plastics. Proceedings of the European Conference on Composite Materials ECCM-11, Rhodes, 2004
- [Kna72] *Knappe, W., Schneider W.*: Bruchkriterien für unidirektionalen Glasfaserkunststoff unter ebener Kurzzeit- und Langzeitbeanspruchung. Kunststoffe 62 (1972), S. 864–867
- [Kna88] *Knaust, U.*: Zur Analyse und Optimierung von Faserverbund-Leichtbauteilen. Fortschrittberichte VDI, Reihe 20 Nr. 11, VDI Verlag 1989
- [Kni99a] *Knickrehm, A., Schürmann, H.*: Möglichkeiten der Steigerung der Lebensdauer von unidirektionalen FKV bei Biegeschwellbeanspruchung. Vortrag, 2. Intern. AVK-Tagung Baden-Baden, Oktober 1999
- [Kni99b] *Knickrehm, A.*: Zum Versagen unidirektionaler Glasfaser-Kunststoff-Verbunde bei Biegeschwellbeanspruchung. Dissertation TU Darmstadt. Darmstadt: Shaker Verlag 1999
- [Kno03] *Knops, M.*: Sukzessives Bruchgeschehen in Faserverbundlaminate. Diss. RWTH Aachen 2003; Verlag Mainz, Wissenschaftsverlag, Aachen (2003)
- [Kno06] *Knops, M. and Bögle, C.*: Gradual failure in fibre/polymer laminates, Composites Science and Technology 66 (2006), pp. 616–625
- [Kno07] *Knops, M.*: The Puck theory of failure in fiber polymer laminates: Fundamentals, verification and application. Springer 2007
- [Kop00] *Kopp, J.*: Zur Spannungs- und Festigkeitsanalyse von unidirektionalen Faserverbundkunststoffen. D82, Diss. RWTH Aachen 1999; Verlag Mainz, Wissenschaftsverlag, Aachen (2000)
- [Kro92] *Kroll, L.*: Zur Auslegung mehrschichtiger anisotroper Faserverbundstrukturen. Diss. TU-Clausthal 1992
- [Kuh04] *Kuhlmann, G. and Rolfes, R.*: A Hierarchic 3D Finite Element for Laminated Composites. International Journal for Numerical Methods in Engineering 61 (2004), p. 96–116
- [Kro05] *Kroll, L.*: Berechnung und technische Nutzung von anisotropiebedingten Werkstoff- und Struktureffekten für multifunktionale Leichtbauanwendungen. Habilitationsschrift, TU Dresden – Fakultät Maschinenwesen, 2005
- [Lek63] *Lekhnitskii, S.G.*: Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. Holden Day Inc., San Francisco, 1963, p. 404
- [Man07] *Mannigel, M.*: Untersuchungen zum Einfluss von Schubspannungen auf das Faserbruchgeschehen in CFK. Diss. RWTH Aachen 2007; Verlag Mainz, Wissenschaftsverlag, Aachen (erscheint voraussichtlich 2007)
- [Mat92] *Mattheij, P.*: Anwendung der linearen Schadensakkumulationshypothese nach Miner bei Faserverbundwerkstoffen. SKZ-Fachtagung „Ermüdungsverhalten von Faserverbundwerkstoffen und Lebensdauer vorhersage für Faserverbundbauteile“, 11./12. Nov. 1992, Würzburg
- [Mic95] *Michaeli, W. und Huybrechts, D.*: Dimensionieren mit Faserverbundkunststoffen – Einführung und praktische Hilfen. München, Wien: Carl Hanser Verlag, 1995
- [Mit04] *Mittelstedt, C. and Becker, W.*: Interlaminar Stress Concentrations in Layered Structures – Part 1: a selective literature survey on the free edge effect since 1967. J. Compos. Mater. 38 (2004), 1037–1062
- [Mit06] *Mittelstedt, C. and Becker, W.*: Free Edge Effects in Composite Laminates. ASME Applied Mechanics Reviews (to be published in 2006)
- [NAS80] **Buckling of Thin walled circular Cylinders.** NASA-SP-8007
- [Pau61] *Paul, B.*: A Modification of the Coulomb-Mohr Theory of Fracture. Journal of Appl. Mechanics (1961), pp. 259–268
- [Pin06] *Pinho S.T., Iannucci L. and Robinson P.*: Physically-based failure models and criteria for laminated fibre-reinforced composites with emphasis on fibre kinking: Part 1: Development. Composites Part A 37 (2006), pp. 63–73
- [Pry71] *Pryer, C.W., and Barker, R.M.*: A Finite Element Analysis including Transverse Shear Effects for Application to Laminated Plates. AIAA Journal 9 (1971), pp. 912–917
- [Puc07] *Puck, A. and Mannigel, M.*: Physically based stress-strain relations for the inter-fibre-fracture analysis of FRP laminates. Composites Science and Technology (to be published 2007)
- [Puc69] *Puck, A.*: Festigkeitsberechnung an Glasfaser-Kunststoff-Laminaten bei zusammengesetzter Beanspruchung; Bruchhypothesen und schichtenweise Bruchanalyse (Strength analysis on GRP-laminates under combined stresses; fracture hypotheses and layer-by-layer fracture analysis), Kunststoffe, German Plastics 59 (bilingual edition English and German), (1969), pp 18–19, German text 780–787
- [Puc92a] *Puck, A.*: Praxisgerechte Bruchkriterien für hochbeanspruchte Faser-Kunststoffverbunde. Kunststoffe 82 (1992) 2, S. 149–155
- [Puc92b] *Puck, A.*: Faser-Kunststoff-Verbunde mit Dehnungs- oder Spannungs-Kriterien auslegen? (Should fibre-plastics composites be designed with strain or stress criteria?), Kunststoffe, German Plastics 82 (bilingual edition English and German), (1992), pp 34–36, German text 431–434
- [Puc96a] *Puck, A.*: Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten – Modelle für die Praxis, (Strength analysis of fibre-matrix laminates – models for practice), in German. Carl Hanser Verlag 1996 (vergriffen, out of print), online als PDF-File verfügbar unter <http://www.klub.tu-darmstadt.de/>, online available at <http://www.klub.tu-darmstadt.de/>
- [Puc96b] *Puck A.*: Progress in Composite Component Design through Advanced Failure Models. Proceedings of the 17th SAMPE Europe Conference; Basel, Switzerland, 1996, pp. 83–96
- [Puc97] *Puck, A.*: Physikalisch begründete Zwischenfaserbruch-Kriterien ermöglichen realistische Festigkeitsanalysen. DGLR Tagung Ottobrunn 1996, Tagungsbericht 1997, S. 315–352
- [Puc98] *Puck, A. and Schürmann, H.*: Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. Part A; Composites Science and Technology 58 (1998) 7, pp. 1045–1067
- [Puc02a] *Puck, A., Kopp, J. and Knops, M.*: Guidelines for the determination of the parameters in Puck's action plane strength criterion. Composites Science and Technology 62 (2002) 3, pp. 371–378 and 9, p. 1275

- [Puc02b] *Puck, A. and Schürmann, H.*: Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology* 62 (2002) 12–13, pp. 1633–1662; Part B of the Failure Exercise
- [Roh88] *Rohwer, K.*: Transverse Shear Stiffness of Composite and Sandwich Finite Elements. Proc. Int. Conf. „Spacecraft Structures and Mechanical Testing“ ESA SP-289, 19–21 Oct. 1988
- [Roh96] *Rohwer, K.*: Modelle und Methoden zur Berechnung von Laminaten aus unidirektionalen Faserverbunden. Fortschrittberichte VDI, Reihe 1 Nr. 264. Düsseldorf: VDI Verlag 1996
- [Rol97] *Rolfes, R., Rohwer, K.*: Improved Transverse Shear Stresses in Composite Finite Elements Based on First Order Shear Deformation Theory. *Int. J. Num. Methods in Eng.* 40 (1997), pp. 51–60
- [Rol98] *Rolfes, R., Rohwer, K. and Ballerstaedt, M.*: Efficient Linear Transverse Normal Stress Analysis of Layered Composite Plates. *Computers and Structures* 68 (1998), pp. 643–652
- [Rol00] *Rolfes, R. and Rohwer, K.*: Integrated Thermal and Mechanical Analysis of Composite Plates and Shells. *Composites Science and Technology* 60 (2000), pp. 2097–2106
- [Säh93] *Sähn, S., Göldner, H.*: Bruch- und Beurteilungskriterien in der Festigkeitslehre. 2nd edition, Fachbuchverlag Leipzig-Köln, 1993
- [Schü05] *Schürmann, H.*: Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden. Springer 2005
- [Sen81] *Sendeckyi, G.P.*: Fitting Models to Composite Materials Fatigue Data. *ASTM STP 734* (1981), pp. 245–260
- [Sod98] *Soden, P.D., Hinton, M.J. and Kaddour, A.S.*: Lamina properties lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre reinforced composite laminates. *Composite Science and Technology* 58 (1998) 7, pp. 1011–1022
- [Ste93] *Stellbrink, K.*: Dimensionierung von Krafteinleitungen in FVW-Strukturen. DLR Stuttgart, 1993
- [Wie86] *Wiedemann, J.*: Leichtbau. Bd. 1 „Elemente“. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986 und Bd. 2 „Konstruktion“, 1989
- [Yan93] *Yang, C.; Pang, S.*: Stress-Strain Analysis of Single-Lap Composite Joints under Tension. PD-Vol. 53, Composite Material Technology, ASME, 1993
- [Zen97] *Zenkert, D.*: The handbook of sandwich construction. EMAS Publishing, 1997

## Ergänzende Literatur/Further literature

### Bücher

- Altenbach, H.; Altenbach, J.; Richards, R.*: Modellierung und Berechnung von Kompositstrukturen. Einführung in die Strukturmechanik für Verbundwerkstoffe. Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart: Dt. Verlag 1996
- Bergmann, H.W.*: Konstruktionsgrundlagen für Faserverbundbauteile. Springer, 1992
- Daniel I.M. and Ishai, O.*: Engineering Mechanics of Composite Materials. Oxford University Press, 1994
- Hancox, N.L. and Mayer, R.M.*: Design Data for Reinforced Plastics. Chapman & Hall, 1994
- Heissler, H.*: Verstärkte Kunststoffe in der Luft und Raumfahrt. Kohlhammer GmbH Verlag, 1986
- Herakovich, C.T. and Tarnopolski, Y.M.*: Structures and Design. Amsterdam: North Holland, 1989
- Herakovich, C.T.*: Mechanics of fibrous composites, John Wiley & Sons, 1998
- Luftfahrttechnisches Handbuch „Faserverbund-Leichtbau (FVL)“. Airbus Deutschland GmbH, H.-P. Wentzel, Bremen

- Moser, K.*: Faserkunststoffverbund – Entwurfs- und Berechnungsgrundlagen. Düsseldorf: VDI Verlag, 1992
- Naik, N.K.*: Woven Fabric Composites. Technomic Publishing, 1994
- Niederstadt, G. et al.*: Leichtbau mit Kohlenstoff-Faserverstärkten Kunststoffen. Kontakt & Studium, Band 167; Expert Verlag, Sindelfingen, 1985
- N.N.*: The Composite Materials Handbook-MIL 17, Vol 1–3 (Commercial edition of MIL-HDBK-17E). Technomic Publishing Company Inc., USA in cooperation with DOD
- Puck, A.*: Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten – Modelle für die Praxis, (Strength analysis of fibre-matrix laminates – models for practice), in German. Carl Hanser Verlag 1996 (vergriffen, out of print), online als PDF-File verfügbar unter <http://www.klub.tu-darmstadt.de/>, online available at <http://www.klub.tu-darmstadt.de/>
- Sierakowski, R. and Newaz, G.*: Damage Tolerance in Advanced Composites. Lancaster, Technomic Publ., 1995
- Rohwer, K.*: Modelle und Methoden zur Berechnung von Laminaten aus unidirektionalen Faserverbunden. Fortschrittberichte VDI, Reihe 1 Nr. 264. Düsseldorf: VDI Verlag, 1996
- Schürmann, H.*: Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden. Springer 2005
- Tang, S.C.*: Stress Concentrations in Laminated Composites. Lancaster, Technomic Publ., 1994
- Tsai, S.W.*: Composites Design “Think composites”. Dayton, Paris, Tokyo, 5th edition (1989)
- Vinson J.R. and Sierakowski, R.L.*: The Behaviour of Structures Composed of Composite Materials. Kluwer, 1986
- Wiedemann, J.*: Leichtbau. Bd. 1 „Elemente“. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986 und Bd. 2 „Konstruktion“, 1989
- Zenkert, D.*: The handbook of sandwich construction. EMAS Publishing, 1997

## Berechnungssoftware/Calculation software

Die folgenden Hinweise auf Programme sind weder vollständig noch in Reihenfolge einer Bewertung.

The following hints are neither comprehensive nor in a rating sequence.

### Laminat- und Struktur-Analyse

#### Analysis of laminate and structural component

- AlfaLam.nl, Advanced layerwise failure analysis of Laminates – non-linear: Konstruktiver Leichtbau und Bauweisen, TU Darmstadt [www.klub.tu-darmstadt.de](http://www.klub.tu-darmstadt.de)
- CompositePro™; Peak Composite Innovations, Arvada CO, USA [www.compositepro.com](http://www.compositepro.com)
- CompositeStar: Material S.A. [www.material.be](http://www.material.be)
- ESAComp; Componeering Inc., Helsinki, Finland [www.componeering.com](http://www.componeering.com)
- ESDU; ESDU Int'l, London, UK [www.esdu.com](http://www.esdu.com)
- GENLAM/LAMRANK; Think composites user club, Paris, France [www.thinkcomposites.com](http://www.thinkcomposites.com)
- LAP/CODA; Anaglyph, London, UK [www.anaglyph.co.uk](http://www.anaglyph.co.uk)
- LAMTECH; DLR, Braunschweig, Germany [www.sm.bs.dlr.de/Strukturtechnologie](http://www.sm.bs.dlr.de/Strukturtechnologie)
- FibreSim; Vistagy Inc., Waltham MA, USA [www.vistagy.com](http://www.vistagy.com), [www.fibresim.com](http://www.fibresim.com)
- OLGA:Adoptech Inc. [www.adoptech.com](http://www.adoptech.com)

## Anhang

### A1 Berücksichtigung von nicht auf der Bruchebene wirkenden Spannungen in den wirkebenebezogenen Zwischenfaserbruchkriterien nach Abschnitt 4.5

Die wirkebenebezogenen Festigkeitskriterien für ZFB, Gleichungen (45) bis (47) sowie Gleichungen (54) und (55), basieren auf der Mohr'schen Hypothese. Nach dieser sind für die Bruchspannungen bei ZFB ausschließlich die auf der faserparallelen *Bruchebene* (Neigungswinkel  $\theta_{fp}$ ) wirkenden Spannungen  $\sigma_n(\theta_{fp})$ ,  $\tau_{nt}(\theta_{fp})$  und  $\tau_{n1}(\theta_{fp})$  maßgebend. Potenzielle Bruchebenen für ZFB sind prinzipiell alle faserparallelen Schnittebenen. Ihre Neigungswinkel  $\theta$  (Definition von  $\theta$  in Bild 16) variieren zwischen  $\theta = -90^\circ$  und  $\theta = +90^\circ$ , wobei die Schnitte mit  $\theta = -90^\circ$  und  $\theta = +90^\circ$  identisch sind. Die zu erwartende Bruchebene wird durch Aufsuchen der Schnittebene mit der höchsten schnittwinkelabhängigen Anstrengung  $f_E(\theta)_{max}$  ermittelt (Definition der Anstrengung in Bild 12). Beim Aufstellen der Gleichungen (45) bis (47) wurde die Bruchwinkelsuche analytisch vorweggenommen. Bei Anwendung der Gleichungen (54) und (55) muss die Schnittebene mit der höchsten ZFB-Anstrengung  $f_E(\theta)_{max} = f_E(\theta_{fp})$  durch numerisches Absuchen des Schnittwinkelbereichs von  $\theta = -90^\circ$  bis  $\theta = +90^\circ$  gefunden werden. Ist die Bruchebene so identifiziert, erhält man die Bruchspannungen  $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})_{fr}$  bei Eintreten des ZFB, indem man die Komponenten des gegebenen Spannungszustandes  $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$  durch die auf der Bruchebene herrschende Anstrengung  $f_E(\theta_{fp})$  dividiert. Es spielt demnach keine Rolle, ob die auf anderen Schnitten mit Winkeln  $\theta \neq \theta_{fp}$  wirkenden Spannungen  $\sigma_n(\theta)$ ,  $\tau_{n1}(\theta)$ ,  $\tau_{nt}(\theta)$  relativ hohe oder niedrige ZFB-Anstrengungen hervorrufen. Wegen der allmählichen Entwicklung eines ZFB durch fortschreitende Mikrorissbildung und aus Gründen der Probabilistik ist jedoch zu erwarten, dass es Spannungszustände gibt, bei denen die „Mohr'sche“ Betrachtungsweise Ergebnisse liefert, die bei Dimensionierungsrechnungen auf die „unsichere Seite“ führen. Mit dieser Problematik befasst sich der Anhang A1.1.

Nach der Mohr'schen Hypothese hat auch die faserparallele Spannung  $\sigma_1$  keinen Einfluss auf den ZFB, weil sie nicht auf einer faserparallelen Schnittebene und damit nicht auf einer potenziellen Bruchebene für ZFB wirkt. Mikromechanische Betrachtungen machen auch in diesem Fall eine Korrektur erforderlich. Eine solche wird im Anhang A1.2 beschrieben.

## Annex

### A1 Inclusion of stresses not acting on the fracture plane in the action-plane-related inter-fibre fracture criteria described in Section 4.5

The action-plane-related strength criteria for inter-fibre fracture (IFF) – Equations (45) to (47) and also Equations (54) and (55) – are based on Mohr's hypothesis. According to this, only the stresses  $\sigma_n(\theta_{fp})$ ,  $\tau_{nt}(\theta_{fp})$  and  $\tau_{n1}(\theta_{fp})$  acting on the parallel-to-fibre *fracture plane* (angle of inclination  $\theta_{fp}$ ) are of decisive importance for fracture stresses at IFF. All parallel-to-fibre section planes are in principle potential fracture planes for IFF. Their angles of inclination  $\theta$  (definition of  $\theta$  in Figure 16) vary between  $\theta = -90^\circ$  and  $\theta = +90^\circ$ , where the section planes with  $\theta = -90^\circ$  and  $\theta = +90^\circ$  are identical. The fracture plane which is to be expected is determined by finding the section plane with the highest stress exposure  $f_E(\theta)_{max}$  dependent on the angle of intersection (The stress exposure is defined in Figure 12.). The search for the angle of the fracture plane was analytically anticipated when Equations (45) to (47) were set up. If Equations (54) and (55) are used, the section plane with the highest IFF stress exposure  $f_E(\theta)_{max} = f_E(\theta_{fp})$  must be found by a numerical search of the intersection-angle range from  $\theta = -90^\circ$  to  $\theta = +90^\circ$ . If the fracture plane has been identified in this way, the stresses  $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})_{fr}$  when the IFF occurs may be obtained by dividing the components of the given stress  $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$  by the stress exposure  $f_E(\theta_{fp})$  present on the fracture plane. This therefore means that it does not matter whether the stresses  $\sigma_n(\theta)$ ,  $\tau_{n1}(\theta)$ ,  $\tau_{nt}(\theta)$  acting on other sections with angles  $\theta \neq \theta_{fp}$  bring about relatively high or low IFF stress exposures. On account of the gradual development of an IFF due to progressive formation of microcracks and for probabilistic reasons, it is, however, to be expected that there are stress states where the Mohr approach gives results which in dimensioning calculations would tend to be on the unconservative side. This problem will be the subject of Annex A1.1.

According to Mohr's hypothesis, even the parallel-to-fibre stress  $\sigma_1$  does not have any influence on the IFF since it does not act on a parallel-to-fibre section plane and thus does not act on a potential fracture plane for IFF. Micromechanical aspects do mean that even in this case a correction will be needed. Annex A1.2 will deal with a correction of this kind.



### A1.1 Berücksichtigung von Spannungen $\sigma_n(\theta)$ , $\tau_{nt}(\theta)$ , $\tau_{n1}(\theta)$ , die auf faserparallelen Ebenen, jedoch nicht auf der Bruchebene wirken

#### Physikalische Grundlagen

Die zu betrachtenden Effekte werden zunächst am Beispiel einer  $(\sigma_2, \tau_{31})$ -Spannungskombination dargestellt, wobei  $\sigma_2$  eine Zugspannung sein soll. Nach der Mohr'schen Hypothese tritt bei solchen  $(\sigma_2, \tau_{31})$ -Kombinationen entweder ein  $\sigma_{\perp}$ -Zugbruch auf der Wirkebene von  $\sigma_2$  ein, das heißt bei  $\theta_{fp} = 0^\circ$ , wenn  $\sigma_2 = R_{\perp}^t$  wird, oder ein  $\tau_{\perp\parallel}$ -Scherbruch auf der Wirkebene von  $\tau_{31}$ , das heißt bei  $\theta_{fp} = \pm 90^\circ$ , und zwar wenn  $\tau_{31} = R_{\perp\parallel}$  wird. Welcher Bruch eintritt, hängt davon ab, wo der  $(\sigma_2, \tau_{31})$ -Spannungszustandsvektor die Bruchkurve trifft, die nach der Mohr'schen Hypothese aus den beiden Geraden  $\sigma_2 = R_{\perp}^t$  und  $\tau_{31} = R_{\perp\parallel}$  besteht (Bruchkurve für  $(\sigma_2, \tau_{31})$  siehe Bild A2). Würde es sich um einen einachsigen  $\sigma_2$ -Spannungszustand handeln, so würden auf den der Bruchebene benachbarten Schnitten unter Neigungswinkeln  $\theta \neq 0^\circ$  Spannungen  $\sigma_n(\theta) = \sigma_2 \cdot \cos^2 \theta$  und  $\tau_{nt}(\theta) = -\sigma_2 \sin \theta \cos \theta$  wirken. Es wird nun ein  $(\sigma_2, \tau_{31})$ -Vektor betrachtet, der die Gerade  $\sigma_2 = R_{\perp}^t$  nahe bei ihrem Schnittpunkt mit der Geraden  $\tau_{31} = R_{\perp\parallel}$  trifft. Dann ergibt sich der Bruchwinkel nach Mohr ebenfalls eindeutig als  $\theta_{fp} = 0^\circ$ . Wenn gleichzeitig Spannungen  $\sigma_2$  und  $\tau_{31}$  vorhanden sind, tritt auf Schnitten unter Winkeln  $\theta \neq 0^\circ$  zusätzlich zu  $\sigma_n(\theta)$  und  $\tau_{nt}(\theta)$  eine Quer/Längs-Schubspannung  $\tau_{n1}(\theta) = \tau_{31} \cdot \sin \theta$  auf. Mit dieser ergibt sich bei Annäherung an  $\theta = -90^\circ$  und  $\theta = +90^\circ$ , wenn  $\tau_{31}/R_{\perp\parallel}$  nur wenig kleiner als  $\sigma_2/R_{\perp}^t$  ist, eine Anstrengung  $f_E(\theta)$ , die fast so hoch ist wie diejenige auf der Bruchebene bei  $\theta_{fp} = 0^\circ$  (siehe normalisierte Anstrengung  $f'_E(\theta)$  in Bild A1). Für die betrachtete Kombination von  $\sigma_2$  mit  $\tau_{31}$  ist die ZFB-Anstrengung im ganzen Bereich zwischen  $\theta = -90^\circ$  und  $\theta = +90^\circ$  nicht wesentlich niedriger als auf der Bruchebene selbst.

Mikromechanische Untersuchungen zeigen, dass ein ZFB nicht plötzlich „aus dem Nichts heraus“ entsteht. Wenn die auf  $f_{E, \max} = 1$  normierte ZFB-Anstrengung  $f'_E$  einen Schwellenwert von etwa  $f'_E \approx 0,5$  überschreitet, entstehen bereits Mikroschädigungen des Faser/Matrix-Verbundes, die mit einer Spannungssteigerung progressiv zunehmen. Bei Quer/Längs-Schubbeanspruchung  $\tau_{\perp\parallel}$  sind dies die bekannten  $45^\circ$ -Mikrorisse, die an Fasern gestoppt werden und dort oft winzige Delaminationen hervorrufen (siehe Bild 30a). Erst wenn Mikroschädigungen ein gewisses Ausmaß überschreiten, erfolgt plötzlich der ZFB.

Bei der betrachteten  $(\sigma_2, \tau_{31})$ -Kombination entwickeln sich – anders als bei einachsiger  $\sigma_2$ -Spannung – gleichzeitig sowohl Mikrobrüche infolge von  $\sigma_2$  als

### A1.1 Inclusion of stresses $\sigma_n(\theta)$ , $\tau_{nt}(\theta)$ , $\tau_{n1}(\theta)$ which act on parallel-to-fibre planes but not on the fracture plane

#### Physical fundamentals

The effects which we are to examine will first be presented by taking the example of a  $(\sigma_2, \tau_{31})$ -stress combination, where  $\sigma_2$  is to be a tensile stress. According to Mohr's hypothesis, with  $(\sigma_2, \tau_{31})$ -combinations of this kind there either occurs a  $\sigma_{\perp}$ -tensile fracture on the action plane of  $\sigma_2$  – in other words, at  $\theta_{fp} = 0^\circ$  when  $\sigma_2 = R_{\perp}^t$  – or a  $\tau_{\perp\parallel}$ -shear fracture on the action plane of  $\tau_{31}$  – in other words, at  $\theta_{fp} = \pm 90^\circ$  and this when  $\tau_{31} = R_{\perp\parallel}$ . Which fracture actually does occur depends on where the  $(\sigma_2, \tau_{31})$ -stress state vector intersects the fracture curve which, according to Mohr's hypothesis, consists of the two straight lines  $\sigma_2 = R_{\perp}^t$  and  $\tau_{31} = R_{\perp\parallel}$  (fracture curve for  $(\sigma_2, \tau_{31})$ , see Figure A2). If we had a uniaxial  $\sigma_2$ -stress state, then stresses  $\sigma_n(\theta) = \sigma_2 \cdot \cos^2 \theta$  and  $\tau_{nt}(\theta) = -\sigma_2 \sin \theta \cos \theta$  would act on the sections adjacent to the fracture plane at angles of inclination  $\theta \neq 0^\circ$ . We will now consider a  $(\sigma_2, \tau_{31})$ -vector which meets the straight line  $\sigma_2 = R_{\perp}^t$  close to its intersection with the straight line  $\tau_{31} = R_{\perp\parallel}$ . In this case the angle of the fracture plane according to Mohr will clearly also be  $\theta_{fp} = 0^\circ$ . But if stresses  $\sigma_2$  and  $\tau_{31}$  are present simultaneously, in addition to  $\sigma_n(\theta)$  and  $\tau_{nt}(\theta)$  a transverse/longitudinal shear stress  $\tau_{n1}(\theta) = \tau_{31} \cdot \sin \theta$  will occur on sections at an angle  $\theta \neq 0^\circ$ . With this, as  $\theta = -90^\circ$  and  $\theta = +90^\circ$  is approached and provided  $\tau_{31}/R_{\perp\parallel}$  is only a little less than  $\sigma_2/R_{\perp}^t$ , there follows an IFF stress exposure  $f_E(\theta)$  which is almost as high as that on the action plane at  $\theta_{fp} = 0^\circ$  (see standardized stress exposure  $f'_E(\theta)$  in Figure A1). For the combination of  $\sigma_2$  with  $\tau_{31}$  which we are considering, the IFF stress exposure over the whole range between  $\theta = -90^\circ$  and  $\theta = +90^\circ$  will not be much lower than on the fracture plane itself.

Micromechanical studies show that an IFF does not simply happen suddenly for no particular reason. Once the IFF stress exposure  $f'_E$  (standardized to  $f_{E, \max} = 1$ ), exceeds a threshold value of about  $f'_E \approx 0,5$ , instances of micro-damage to the fibre/matrix composite will already occur which increase progressively as stress increases. In the case of transverse/longitudinal shear stressing  $\tau_{\perp\parallel}$ , these are the familiar  $45^\circ$  microcracks (hackles) which are stopped at fibres and cause often tiny delaminations there (see Figure 30a). It is only when microfractures have exceeded a certain magnitude that the IFF will suddenly occur.

In the case of the  $(\sigma_2, \tau_{31})$ -combination under consideration here, not only microfractures resulting from  $\sigma_2$  but also those resulting from  $\tau_{31}$  develop si-

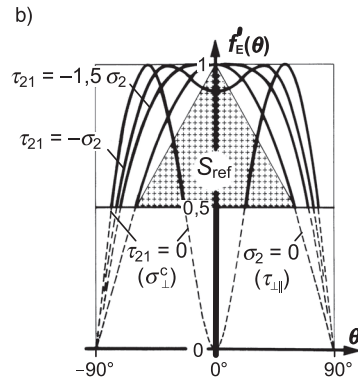
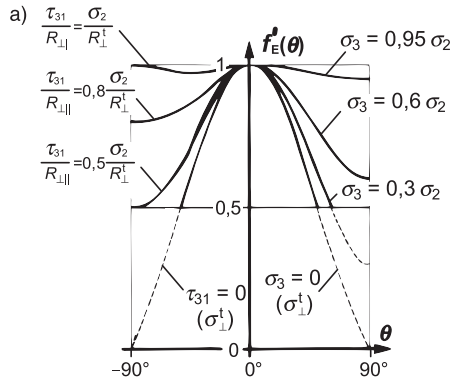


Bild A1. Normierte Anstrengungskurven  $f_E(\theta)$  (berechnet mit Parametern aus Bild A2)

Figure A1. Standardized stress exposure curves  $f_E(\theta)$  (calculated using parameters from Figure A2)

- a) Linke Diagrammhälfte für verschiedene  $(\sigma_2, \tau_{31})$ -Spannungskombinationen; rechte Diagrammhälfte für  $(\sigma_2, \sigma_3)$ -Spannungskombinationen. Die vollständigen  $f_E(\theta)$ -Kurven für  $(\sigma_2, \tau_{31})$ - und  $(\sigma_2, \sigma_3)$ -Spannungskombinationen sind symmetrisch zur  $f_E$ -Achse bei  $\theta = 0$ .
- b) für verschiedene  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungskombinationen  
Die im Bild markierte Dreiecksfläche vermittelt einen Eindruck von der Größe des Referenzwertes  $S_{ref}$ .

- a) Left-hand side of diagram for different  $(\sigma_2, \tau_{31})$ -stress combinations; right-hand side for  $(\sigma_2, \sigma_3)$ -stress combinations. The complete  $f_E(\theta)$ -curves for  $(\sigma_2, \tau_{31})$ - and  $(\sigma_2, \sigma_3)$ -stress combinations are symmetrical to the  $f_E$  axis at  $\theta = 0$ .
- b) for different  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -stress combinations  
The triangular area marked in the figure gives an impression of the magnitude of the reference sum  $S_{ref}$ .

auch solche infolge von  $\tau_{31}$ . Letztere schwächen im Vergleich zur Situation bei einachsiger  $\sigma_2$ -Spannung den Faser/Matrix-Verbund zusätzlich. Die Mikrorisse wirken sich auf **allen Schnitten** mit Neigungswinkeln zwischen  $\theta = -90^\circ$  und  $\theta = +90^\circ$  schwächend aus. **Sie erniedrigen auch die Querkzugfestigkeit**, die schließlich auf der Bruchebene beim ZFB unter  $\theta_{fp} = 0^\circ$  noch zur Verfügung steht. Es ist deshalb zu erwarten, dass  $\sigma_2$  in Kombination mit einer relativ hohen Spannung  $\tau_{31}$  beim ZFB nicht jene Bruchspannung erreicht, die man im einachsigen Quer-Zugversuch mit  $\sigma_2 = R_\perp^t$  erhält.

multaneously – the case is different with a uniaxial  $\sigma_2$  stress. The latter type of microfractures due to  $\tau_{31}$  further weaken the fibre/matrix composite as compared with the situation with uniaxial  $\sigma_2$ -stress. The microfractures have a weakening effect on **all sections** with inclination angles between  $\theta = -90^\circ$  and  $\theta = +90^\circ$ . **They also reduce the transverse tensile strength** which in the end is still available on the fracture plane when IFF happens at  $\theta_{fp} = 0^\circ$ . It is therefore to be expected that  $\sigma_2$  in combination with a relatively high  $\tau_{31}$  stress will not reach at IFF that fracture stress which is obtained in the uniaxial transverse tension test with  $\sigma_2 = R_\perp^t$ .

Als weiteres Beispiel wird eine zweiachsige  $(\sigma_2, \sigma_3)$ -Quer-Zugspannung betrachtet. In diesem Fall tritt ein Zugbruch bei  $\theta_{fp} = 0^\circ$  ein, wenn  $\sigma_2 > \sigma_3$  ist, oder bei  $\theta_{fp} = \pm 90^\circ$ , wenn  $\sigma_3 > \sigma_2$  ist. Wenn  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$  wäre, würde auf allen Schnitten unter beliebigen Winkeln  $\theta$  wegen der Beziehung  $\alpha(\theta) = \sigma_2 \cdot \cos^2\theta + \sigma_3 \cdot \sin^2\theta = \sigma$  die gleiche Spannung herrschen und damit die schnitwinkelabhängige Anstrengung  $f_E(\theta)$  auf jeder Schnittebene mit  $\theta$  zwischen  $-90^\circ$  und  $+90^\circ$  gleich hoch sein. In diesem speziellen Einzelfall sagt die Mohr'sche Hypothese voraus, dass auf allen Schnittebenen unter Winkeln  $\theta$  zwischen  $-90^\circ$  und  $+90^\circ$  gleichzeitig ZFB eintritt. Unter welchem Winkel bei einem zweiachsigen Querzugversuch mit zwei gleich hohen Spannungen der Bruch tatsächlich erfolgt, hängt von Zufälligkeiten ab, wie zum Beispiel der Verteilung von Fehlstellen.

As a further example let us examine a biaxial  $(\sigma_2, \sigma_3)$ -transverse tensile stress. In this case a tensile fracture occurs at  $\theta_{fp} = 0^\circ$  if  $\sigma_2 > \sigma_3$  or at  $\theta_{fp} = \pm 90^\circ$  if  $\sigma_3 > \sigma_2$ . If  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$  were the case, the same stress would prevail at all sections at any angle  $\theta$  due to the relation  $\alpha(\theta) = \sigma_2 \cdot \cos^2\theta + \sigma_3 \cdot \sin^2\theta = \sigma$  and thus the intersection-angle-dependent stress exposure  $f_E(\theta)$  would be equally high on every section plane with  $\theta$  between  $-90^\circ$  and  $+90^\circ$ . In this special individual case Mohr's hypothesis predicts that IFF will occur simultaneously on all section planes with angles of  $\theta$  between  $-90^\circ$  and  $+90^\circ$ . At what angle fracture will actually take place in a biaxial transverse tension test with two stresses of equal magnitude depends on contingencies, e.g. on the distribution of flaws.

Jetzt wird eine  $(\sigma_2, \sigma_3)$ -Kombination betrachtet, bei der  $\sigma_3 = 0,95 \cdot \sigma_2$  ist. In diesem Fall ist auf allen Schnitten mit Winkeln  $\theta$  zwischen  $-90^\circ$  und  $+90^\circ$  die

We will now pass on to a  $(\sigma_2, \sigma_3)$ -combination where  $\sigma_3 = 0,95 \cdot \sigma_2$ . In this case the stress exposure  $f_E(\theta)$  is nearly the same in all sections with angles  $\theta$  between

Anstrengung  $f_E(\theta)$  fast gleich hoch (im Bild A1 ist wiederum die normierte Anstrengung  $f'_E(\theta)$  gezeigt). Deshalb ist eine massivere Mikroschädigung vor dem Eintritt des ZFB zu erwarten als bei einachsiger Quer-Zugbeanspruchung.

Ein realer Faser/Matrix-Verbund enthält zudem immer Fehlstellen, beispielsweise in Form von Härtingrissen, flachen Lufteinschlüssen oder örtlichen Imperfektionen in der Verklebung zwischen Faser und Matrix, die sich oft nur über einen Teil des Umfangs der Faser erstrecken. Derartige Fehlstellen haben einen „Richtungssinn“. Beispielsweise wirkt sich ein Härtingriss dann besonders festigkeitsmindernd aus, wenn eine Zugspannung  $\sigma_n$  senkrecht zur Rissebene auftritt. Rechnerisch ist im betrachteten Fall, bei dem  $\sigma_3$  nur 5 % kleiner als  $\sigma_2$  ist, die Anstrengung  $f_E(\theta)$  bei  $\theta_{fp} = 0^\circ$  am höchsten. Jedoch ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass bei einem anderen Neigungswinkel  $\theta$  der Schnittebene trotz der dort etwas niedrigeren rechnerischen Anstrengung  $f_E(\theta)$  eine besonders gravierende Fehlstelle den ZFB auslöst. Dies ist ein probabilistischer Effekt. Er bewirkt, dass die Bruchwinkelvorschau unsicher wird und die Bruchspannungen beim ZFB etwas niedriger sind als die nach Mohr berechneten.

In den beiden Beispielen vermischen sich Effekte von Mikroschädigung und Probabilistik; sie lassen sich nicht getrennt behandeln. Verallgemeinernd kann man aus den Beispielen die folgende Erkenntnis ziehen: **Es ist zu erwarten, dass Auswirkungen von Mikroschädigung und Probabilistik die Höhe der Bruchspannungen bei Eintritt des ZFB um so stärker erniedrigen, je mehr faserparallele Schnitte unter verschiedenen Winkeln  $\theta$  es gibt, für die sich relativ hohe Werte der Anstrengung  $f_E(\theta)$  errechnen**, oder anders ausgedrückt, je „fülliger“ die „Anstrengungskurve“  $f_E(\theta)$  ist. Eine anschauliche Vorstellung davon, welche diesbezügliche Situation bei einem zu untersuchenden Spannungszustand vorliegt, kann man dadurch erlangen, dass man die ganze mit den „Mohr’schen“ Gleichungen (54) und (55) berechnete normierte Anstrengungskurve  $f'_E(\theta)$  betrachtet (siehe normierte Anstrengungen in Bild A1). Als Extremfall wurde die Spannungscombination  $\sigma_2 = \sigma_3 > 0$  erkannt, bei der auf jedem beliebigen Schnitt der Wert für  $f'_E(\theta)$  gleich hoch ist.

### Analytische Behandlung

Mikromechanische Bruchanalysen und mathematische Methoden der Probabilistik sind beim Bauteilentwurf nicht anwendbar. Im Folgenden wird deshalb eine Rechenmethode vorgestellt, mit der man die Auswirkungen der Mikroschädigung und Probabilistik (kurz: (m+p)-Effekte) mit Hilfe einer für die Inge-

–90° and +90° (see again the standardized stress exposures  $f'_E(\theta)$  in Figure A1). For this reason a more massive instance of microdamage is to be expected before the IFF occurs than would be the case with uniaxial transverse tensile stress.

A real fibre/matrix composite in addition always contains flaws – for example, in the form of curing cracks, flat air entrapments, or local imperfections in the bonding between fibre and matrix which often cover only a part of the circumference of the fibres. Flaws of this kind have a “sense of direction”. For example, a curing crack will have an especially strength-reducing effect when a tensile stress  $\sigma_n$  perpendicular to the crack plane occurs. In the case under consideration, in which  $\sigma_3$  is only 5 % less than  $\sigma_2$ , the stress exposure  $f_E(\theta)$  is theoretically at its maximum at  $\theta_{fp} = 0^\circ$ . There is nevertheless a high probability that with a different angle of inclination  $\theta$  of the section plane, a particularly serious flaw will trigger the IFF despite the somewhat lower theoretical stress exposure  $f_E(\theta)$  found there. This is a probabilistic effect. It makes prediction of the angle of the fracture plane uncertain and causes the fracture stresses at IFF to be somewhat lower than those calculated on the basis of Mohr’s hypothesis.

In both examples there is a mixture of the effects of microdamage and of probabilistic effects; they cannot be treated separately. Generalizing, these examples permit us to arrive at the following conclusion: **It is to be expected that effects of microdamage and probabilistics reduce the magnitude of fracture stresses when the IFF occurs the more severely the more parallel-to-fibre sections at different angles  $\theta$  there are for which relatively high values of the stress exposure  $f_E(\theta)$  can be calculated** – or, to put it another way, the “rounder” the “stress exposure curve”  $f_E(\theta)$  will be. A clear picture of which situation of this kind exists with the stress state to be investigated can be obtained by examining the entire stress exposure curve  $f'_E(\theta)$  calculated using Mohr’s Equations (54) and (55) (see standardized stress exposures in Figure A1). The stress combination  $\sigma_2 = \sigma_3 > 0$  has been recognized as being an extreme case where at any section the value for  $f'_E(\theta)$  is equally high.

### Analytical treatment

Micromechanical failure analyses and mathematical methods from probabilistics cannot be used in component design. A calculation method will therefore be presented below whereby it is possible, with minimal effort, to estimate the effects of microdamage and probabilistics (in abbreviated form: (m+p) ef-

nieurpraxis geeigneten phänomenologischen Betrachtungsweise mit physikalischem Hintergrund bei minimalem Aufwand abschätzen kann. Sie wird als  $\eta_{m+p}$ -**Korrektur** bezeichnet. Es handelt sich um eine leicht modifizierte Form des in [Puc96a] angegebenen Ansatzes. Ausführliche Erläuterungen finden sich in [Kno07].

Die  $\eta_{m+p}$ -Korrektur basiert auf folgenden Vorstellungen:

- Die Bruchebene bei ZFB tritt bei dem Schnittwinkel  $\theta_{fp}$  auf, für den sich nach der Mohr’schen Hypothese die maximale Anstrengung  $f_E(\theta)_{max} = f_E(\theta_{fp})$  nach Gleichung (54) oder Gleichung (55) errechnet.
- Die Bruchspannungen bei ZFB werden ermittelt, indem die nach der Mohr’schen Hypothese mit  $f_E(\theta_{fp})$  berechneten Bruchspannungen mit einem Korrekturfaktor  $\eta_{m+p} < 1$  zu kleineren Werten korrigiert werden. (Entsprechend werden die nach Mohr berechneten ZFB-Anstrengungen zu höheren Werten korrigiert, indem man die Mohr’schen Anstrengungen durch  $\eta_{m+p}$  dividiert.)

Formelmäßig ausgedrückt (siehe auch Bild A2a):

$$\begin{aligned} \{\sigma\}_{m+p} &= \{\sigma\}_{fr}^{Mohr} \cdot \eta_{m+p} \\ &= \frac{\{\sigma\}}{f_E(\theta_{fp})} \cdot \eta_{m+p} = \frac{\{\sigma\}}{f_{E_{m+p}}} \end{aligned} \quad (A1)$$

$$f_{E_{m+p}} = \frac{f_E(\theta_{fp})}{\eta_{m+p}} \quad (A2)$$

Dabei ist

- $\{\sigma\}_{m+p}$  Bruchspannungsvektor bei Berücksichtigung von (m+p)-Effekten
- $\{\sigma\}_{fr}^{Mohr}$  Bruchspannungsvektor ohne Berücksichtigung von (m+p)-Effekten
- $\{\sigma\}$  Vektor des wirkenden Spannungszustandes
- $\eta_{m+p}$  Korrekturfaktor der Bruchspannungen zur Berücksichtigung von (m+p)-Effekten
- $f_{E_{m+p}}$  Anstrengung der Bruchebene bei Berücksichtigung von (m+p)-Effekten
- $f_E(\theta_{fp})$  Anstrengung der Bruchebene ohne Berücksichtigung von (m+p)-Effekten

Die Abhängigkeit des (m+p)-Korrekturfaktors  $\eta_{m+p}$  von der „Fülligkeit“ der normierten Anstrengungskurve  $f'_E(\theta)$  wird durch die im Folgenden dargestellte Auswertung der Anstrengungskurve  $f'_E(\theta)$  mit Hilfe einer „Summenformel“ quantifizierbar. Bei der Bruchanalyse eines allgemeinen räumlichen Spannungszustandes berechnet man für die notwendige numerische Bruchwinkelsuche in kleinen Winkel-

facts) with the aid of a phenomenological approach on physical foundations and which is applicable in engineering practice. This method will be referred to as  $\eta_{m+p}$  **correction**. It is a slightly modified form of the approach which appears in [Puc96a]. Detailed information may be found in [Kno07].

$\eta_{m+p}$ -correction is based on the following assumptions:

- The fracture plane at IFF appears at the angle of intersection  $\theta_{fp}$  for which, according to Mohr’s hypothesis the maximum stress exposure  $f_E(\theta)_{max} = f_E(\theta_{fp})$  is calculated from Equation (54) or Equation (55).
- The fracture stresses at IFF are obtained by correcting the fracture stresses calculated from  $f_E(\theta_{fp})$  by Mohr’s hypothesis to lower stresses using a correction factor of  $\eta_{m+p} < 1$ . (Correspondingly, the IFF stress exposures calculated by Mohr are corrected to higher values by dividing the Mohr stress exposures by  $\eta_{m+p}$ .)

Expressed formally (see also Figure A2a):

$$\begin{aligned} \{\sigma\}_{m+p} &= \{\sigma\}_{fr}^{Mohr} \cdot \eta_{m+p} \\ &= \frac{\{\sigma\}}{f_E(\theta_{fp})} \cdot \eta_{m+p} = \frac{\{\sigma\}}{f_{E_{m+p}}} \end{aligned} \quad (A1)$$

$$f_{E_{m+p}} = \frac{f_E(\theta_{fp})}{\eta_{m+p}} \quad (A2)$$

where

- $\{\sigma\}_{m+p}$  fracture stress vector taking (m+p) effects into account
- $\{\sigma\}_{fr}^{Mohr}$  fracture stress vector without taking (m+p) effects into account
- $\{\sigma\}$  vector of the effective stress state
- $\eta_{m+p}$  correction factor of the fracture stresses for taking (m+p) effects into account
- $f_{E_{m+p}}$  stress exposure of the fracture plane taking (m+p) effects into account
- $f_E(\theta_{fp})$  stress exposure of the fracture plane without taking (m+p)-effects into account

The dependence of the (m+p) correction factor  $\eta_{m+p}$  on the “roundness” of the standardized stress exposure curve  $f'_E(\theta)$  can be quantified by means of the following evaluation of the stress exposure curve  $f'_E(\theta)$  with the aid of a “summation” formula. In the fracture analysis of a general three-dimensional stress state, during the necessary numerical search for the fracture plane angle the intersection-angle-dependent IFF

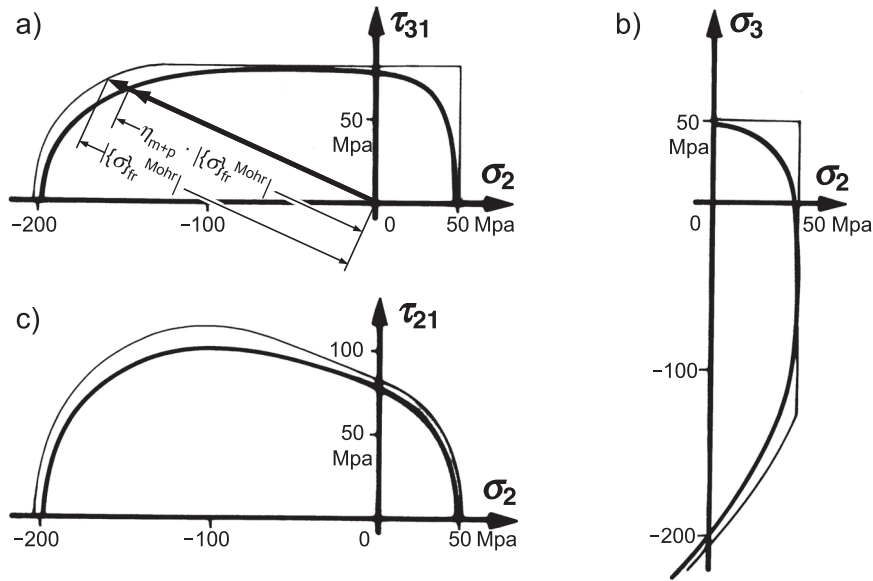


Bild A2. Bruchkurven für drei Spannungskombinationen:  
a)  $(\sigma_2, \tau_{31})$ , b)  $(\sigma_2, \sigma_3)$  und c)  $(\sigma_2, \tau_{21})$

Die dünnen Linien sind die Ausgangskurven für die  $\eta_{m+p}$ -Korrektur, berechnet mit Gleichung (54) und Gleichung (55) mit korrigierten Basisfestigkeiten und korrigiertem Parameter  $p_{\perp||cor}^c$  nach Gleichung (A5):  $R_{\perp cor}^i = 48,57$  MPa,  $R_{\perp cor}^c = 204,82$  MPa,  $R_{\perp|| cor} = 82,16$  MPa,  $p_{\perp||}^i = 0,35$ ,  $p_{\perp|| cor}^c = 0,45$ ,  $p_{\perp\perp}^i = p_{\perp\perp}^c = 0,275$ .

Die dicken Linien stellen die Ergebniskurven einer gemäß den Gleichungen (A1) bis (A4) durchgeführten  $\eta_{m+p}$ -Korrektur dar.

Figure A2. Fracture curves for three stress combinations:  
a)  $(\sigma_2, \tau_{31})$ , b)  $(\sigma_2, \sigma_3)$  and c)  $(\sigma_2, \tau_{21})$ .

The thin lines represent the starting curves for  $\eta_{m+p}$ -correction, calculated using Equation (54) and Equation (55) with corrected basic strength values and corrected parameter  $p_{\perp||cor}^c$  according to equation (A5):  $R_{\perp cor}^i = 48,57$  MPa,  $R_{\perp cor}^c = 204,82$  MPa,  $R_{\perp|| cor} = 82,16$  MPa,  $p_{\perp||}^i = 0,35$ ,  $p_{\perp|| cor}^c = 0,45$ ,  $p_{\perp\perp}^i = p_{\perp\perp}^c = 0,275$ .

The thick lines represent the result curves of an  $\eta_{m+p}$ -correction according to Equations (A1) to (A4).

schritten  $\Delta\theta$  (meistens mit  $\Delta\theta = 1^\circ$ ) mit Hilfe der Gleichung (54) oder Gleichung (55) die schnitwinkelabhängige ZFB-Anstrengung  $f_E(\theta)$  von  $\theta = -90^\circ$  bis  $\theta = +90^\circ$  und erhält somit eine große Zahl von  $f_E(\theta)$ -Werten, die Punkte der Anstrengungskurve  $f_E(\theta)$  darstellen. Zur Gewährleistung der Gleichbehandlung aller möglichen Spannungszustände werden die Anstrengungskurven so normiert, dass an der Stelle  $\theta = \theta_{fp}$  die Anstrengung den Wert 1 annimmt. Die so normierte Anstrengungskurve  $f'_E(\theta)$  gilt somit bei jeder beliebigen Spannungskombination für diejenige Höhe der Spannungen, die nach Gleichung (54) und Gleichung (55) gerade zum Bruch führt.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass Schnittebenen mit normierten  $f'_E(\theta)$ -Werten nahe beim Wert 1 eine viel stärkere Bedeutung haben als solche mit  $f'_E(\theta)$ -Werten, die erheblich kleiner sind. Deshalb werden wie schon in [Puc96a] normierte  $f'_E(\theta)$ -Werte unterhalb eines Schwellenwertes (threshold)  $f'_{E,thr} = 0,5$  nicht berücksichtigt. In Anlehnung an Gleichung (10.5) in [Puc96a] wird mit den normierten  $f'_E(\theta)$ -Werten folgende Summe gebildet:

$$S \approx \sum_{-90^\circ}^{+89^\circ} (f'_E(\theta) - f'_{E,thr}) \cdot \Delta\theta \quad (A3)$$

nur für  $f'_E(\theta) \geq f'_{E,thr}$

stress exposure  $f_E(\theta)$  from  $\theta = -90^\circ$  to  $\theta = +90^\circ$  is calculated with the aid of Equation (54) or Equation (55) in small angular increments  $\Delta\theta$  (in most cases with  $\Delta\theta = 1^\circ$ ). The result is a large number of  $f_E(\theta)$ -values which represent points of the stress exposure curve  $f_E(\theta)$ . To ensure that all possible stress states are treated alike, the stress exposure curves are standardized in such a way that at point  $\theta = \theta_{fp}$  the stress exposure factor has a value of 1. The standardized stress exposure curve  $f'_E(\theta)$  is then valid for just that magnitude of the stresses which according to Equation (54) and Equation (55) would produce fracture and this is true for any kind of stress combination.

It follows from the foregoing that section planes with  $f'_E(\theta)$ -values close to 1 are of much greater importance than those with  $f'_E(\theta)$  values which are considerably smaller. For this reason, as already occurs in [Puc96a], standardized  $f'_E(\theta)$  values below a threshold  $f'_{E,thr} = 0,5$  are not taken into consideration. On the basis of Equation (10.5) in [Puc96a], the following sum is obtained with the standardized  $f'_E(\theta)$  values:

$$S \approx \sum_{-90^\circ}^{+89^\circ} (f'_E(\theta) - f'_{E,thr}) \cdot \Delta\theta \quad (A3)$$

only for  $f'_E(\theta) \geq f'_{E,thr}$

(Die Grenzen  $-90^\circ$  und  $+89^\circ$  gelten für einen benutzten Winkelschritt  $\Delta\theta = 1^\circ$ .)

Durch diese Summenbildung (bei einer um  $f'_{E,thr}$  verschobenen Null-Linie) werden hohe  $f'_E(\theta)$ -Werte erheblich stärker gewichtet als niedrige, z.B. ein Wert  $f'_E(\theta) = 0,9$  viermal höher als ein Wert  $f'_E(\theta) = 0,6$ . Für den erwähnten Extremfall  $\sigma_2 = \sigma_3 > 0$  ergibt sich mit  $f'_{E,thr} = 0,5$  der maximale  $S$ -Wert  $S_{max} = (1 - 0,5) \cdot 180^\circ = 90^\circ$ .

Wenn man die Summenformel (A3) auf die normierten Anstrengungskurven  $f'_E(\theta)$  der Basisbeanspruchungen, einachsiger Querzug  $\sigma_\perp^t$ , einachsiger Querdruck  $\sigma_\perp^c$  und reiner Quer/Längs-Schub  $\tau_{\perp\parallel}$  (siehe Bild 10) anwendet, erhält man für die entsprechenden Summen  $S_\perp^t, S_\perp^c, S_{\perp\parallel}$  Werte, die zwischen  $30^\circ$  und  $40^\circ$  liegen.  $S_{\perp\parallel} = 39,24^\circ$  ist ein werkstoffunabhängiger Festwert;  $S_\perp^c$  hängt vom Neigungsparameter  $p_{\perp\perp}^c$  ab und hat einen Wert von etwa  $S_\perp^c \approx 36^\circ$ . Für  $S_\perp^t$  findet man werkstoffabhängige Werte bei  $S_\perp^t \approx 33^\circ$ .

Mit dem zu einem gegebenen Spannungszustand gehörenden Wert  $S$  wird in leichter Abwandlung der Gleichung (10.6) in [Puc96a] für den (m+p)-Korrekturfaktor angesetzt:

$$\eta_{m+p} = 1 - \Delta_{max} \frac{S - S_{ref}}{S_{max} - S_{ref}} \quad (A4)$$

für  $\Delta_{max} \leq 0,25$  mit  $S_{max} = 90^\circ$  und  $S_{ref} = 30^\circ$

Die Einführung eines Bezugswertes  $S_{ref}$  ist erforderlich, damit sich eine angemessene Empfindlichkeit von  $\eta_{m+p}$  gegenüber den Unterschieden der bei verschiedenen Spannungszuständen auftretenden  $S$ -Werte ergibt. Der Wert  $S_{ref} = 30^\circ$  wird erfahrungsgemäß durch keinen  $S$ -Wert eines beliebigen Spannungszustandes unterschritten. Die Größe  $\Delta_{max}$  ist die relative Differenz zwischen dem nach *Mohr* berechneten und dem mit  $\eta_{m+p}$  korrigierten Bruchspannungsvektor bei  $\sigma_2 = \sigma_3 > 0$ . Werte für  $\Delta_{max}$  dürften zwischen 0,15 und 0,25 liegen. Durch die Wahl eines Wertes für  $\Delta_{max}$  erfolgt eine „Kalibrierung“ der  $\eta_{m+p}$ -Korrektur.

### Anwendungen

Beim Entwurf und der Dimensionierung von Faser-verbundbauteilen benutzt man Bruchkriterien normalerweise, um an einigen als kritisch erachteten Stellen des Bauteils die ZFB-Anstrengung (und FB-Anstrengung) zu berechnen. Im Folgenden werden jedoch ganze Bruchkurven für ZFB vorgestellt. An solchen Bruchkurven zeigt sich, bei welchen Spannungszuständen die  $\eta_{m+p}$ -Korrektur von Bedeutung ist und bei welchen nicht. Im Bild A2 erkennt man, dass bei

(The limits  $-90^\circ$  and  $+89^\circ$  apply to the angular increment  $\Delta\theta = 1^\circ$  which was used.)

This summing (with a zero line shifted by  $f'_{E,thr}$ ) results in high  $f'_E(\theta)$  values being weighted considerably more heavily than low values – for example, a value  $f'_E(\theta) = 0,9$  is weighted four times higher than a value  $f'_E(\theta) = 0,6$ . For the extreme case which we mentioned of  $\sigma_2 = \sigma_3 > 0$ , when  $f'_{E,thr} = 0,5$  the maximum  $S$  value of  $S_{max} = (1 - 0,5) \cdot 180^\circ = 90^\circ$  is obtained.

If the summation formula (A3) is applied to the standardized stress exposure curves  $f'_E(\theta)$  for the basic stressings, uniaxial transverse tension  $\sigma_\perp^t$ , uniaxial transverse compression  $\sigma_\perp^c$  and pure transverse/longitudinal shear  $\tau_{\perp\parallel}$  (see Figure 10), we obtain values for the corresponding sums  $S_\perp^t, S_\perp^c, S_{\perp\parallel}$  which will lie between  $30^\circ$  and  $40^\circ$ .  $S_{\perp\parallel} = 39,24^\circ$  is a material-independent fixed value while  $S_\perp^c$  depends on the inclination parameter  $p_{\perp\perp}^c$  and has a value of approximately  $S_\perp^c \approx 36^\circ$ . For  $S_\perp^t$  we find material dependent values with  $S_\perp^t \approx 33^\circ$ .

Taking the value  $S$  which corresponds to a given stress state and slightly modifying equation (10.6) in [Puc96a], we obtain the following for the (m+p)-correction factor:

$$\eta_{m+p} = 1 - \Delta_{max} \frac{S - S_{ref}}{S_{max} - S_{ref}} \quad (A4)$$

for  $\Delta_{max} \leq 0,25$  with  $S_{max} = 90^\circ$  and  $S_{ref} = 30^\circ$

It is necessary to introduce a reference value  $S_{ref}$  in order to obtain a reasonable sensitivity of  $\eta_{m+p}$  to the differences in the  $S$  values occurring with different stress states. Experience shows that there is no  $S$  value of any stress state which is less than the value  $S_{ref} = 30^\circ$ . The variable  $\Delta_{max}$  is the relative difference between the fracture stress vector calculated according to *Mohr* and that corrected by  $\eta_{m+p}$  when  $\sigma_2 = \sigma_3 > 0$ . Values for  $\Delta_{max}$  should lie between 0,15 and 0,25. Selection of a value for  $\Delta_{max}$  results in a “calibration” of the  $\eta_{m+p}$ -correction factor.

### Applications

In common practice of the design and dimensioning of fibre composite components, fracture criteria are used for calculating the IFF stress exposure (and FF stress exposure) at some locations of the component which are regarded as critical. In what follows, however, entire fracture curves for IFF will be presented. Fracture curves of this kind reveal in which stress states  $\eta_{m+p}$ -correction is important and in which it is not. In Figure A2a it can be seen that with the

den  $(\sigma_2, \tau_{31})$ -Kombinationen die  $\eta_{m+p}$ -Korrektur im 1. Quadranten recht bedeutend ist. Bei den  $(\sigma_2 = \sigma_3)$ -Kombinationen, Bild A2b, tritt ebenfalls im 1. Quadranten ein sehr merklicher Einfluss auf die  $(\sigma_2 = \sigma_3)$ -Bruchkurve auf. Dort ergibt sich im Fall  $\sigma_2 = \sigma_3$  der bei der  $\eta_{m+p}$ -Korrektur benutzte „Kalibrierwert“  $\Delta_{\max} = 0,25$ . Im 4. (und 2.) Quadranten, das heißt bei  $\sigma_2 > 0$  und  $\sigma_3 < 0$ , zeigt sich demgegenüber nur eine verhältnismäßig geringe Auswirkung der  $\eta_{m+p}$ -Korrektur. Bei  $\sigma_3 = -\sigma_2$  ist die mit  $\eta_{m+p}$  berechnete Bruchspannung bei ZFB sogar ein wenig höher als die nach Mohr berechnete  $(\sigma_2 = -\sigma_3 = R_{\perp}^t)$ . Dies rührt daher, dass für die hier vorliegende reine Quer/Quer-Schubbeanspruchung  $\tau_{\perp\perp}$  die sich ergebende Summe den Wert  $S_{\perp\perp} = 31,45^\circ$  hat und damit etwas kleiner als  $S_{\perp}^t = 32,45^\circ$  für einachsige Quer-Zugbeanspruchung  $\sigma_{\perp}^t$  ist.

Es fehlen bisher glaubwürdige experimentelle Ergebnisse bei  $(\sigma_2, \tau_{31})$ - und  $(\sigma_2, \sigma_3)$ -Spannungskombinationen.

Ganz anders verhält es sich bei den im Bild A2c dargestellten  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungskombinationen. Die  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurve ist die einzige, die sowohl für CFK als auch für GFK experimentell hinreichend gesichert ist [Cun97]. Sie lässt sich mit den Gleichungen (45) bis (47) oder Gleichungen (54) und (55) unter Verwendung von Neigungsparemtern aus Tabelle 2, Abschnitt 4.5, ausgezeichnet mathematisch modellieren. Für die weiteren Betrachtungen ist die Tatsache wichtig, dass die Auswirkungen von  $\eta_{m+p}$ -Effekten auf die ZFB-Festigkeit in experimentell ermittelten Bruchspannungen schon enthalten sind, somit auch in den Versuchsergebnissen, aus denen die modellierte  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurve (dicke Linie im Bild A2c) hervorgeht. Wollte man eine  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurve mathematisch unter Anwendung der  $\eta_{m+p}$ -Korrektur erzeugen, dann wäre die mit den gemessenen Basisfestigkeiten  $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\perp\parallel}$  und Neigungsparemtern nach Tabelle 2 modellierte experimentell ermittelte  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurve nicht die Ausgangskurve für eine  $\eta_{m+p}$ -Korrektur, sondern deren *Ergebniskurve*.

Wenn ausschließlich ebene  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustände untersucht werden müssen, ist die Frage nach der unbekanntenen Ausgangskurve für eine  $\eta_{m+p}$ -Korrektur gegenstandslos, denn man benutzt für Bruchanalysen direkt die mathematisch modellierte experimentell ermittelte  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurve. Sollen hingegen bei der Dimensionierung von FKV-Bauteilen auch Krafteinleitungsbereiche analysiert werden, in denen „räumliche“ Spannungen  $\sigma_3, \tau_{32}, \tau_{31}$  etwa in ähnlicher Größe wie  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  auftreten, ist die Anwendung der  $\eta_{m+p}$ -Korrektur geboten. Damit dabei für sämtliche vorkommenden Spannungszustände

$(\sigma_2, \tau_{31})$ -combinations,  $\eta_{m+p}$ -correction is very important in the first quadrant. With the  $(\sigma_2 = \sigma_3)$ -combinations (Figure A2b), a very noticeable influence also occurs in the first quadrant of the  $(\sigma_2 = \sigma_3)$ -fracture curve. In the case where  $\sigma_2 = \sigma_3$ , this yields the utilized “calibration value”  $\Delta_{\max} = 0,25$  used with  $\eta_{m+p}$ -correction. In the fourth (and second) quadrants, on the other hand – that is, where  $\sigma_2 > 0$  and  $\sigma_3 < 0$  – only a relatively minor effect of the  $\eta_{m+p}$ -correction is found. At  $\sigma_3 = -\sigma_2$  the fracture stress at IFF calculated with  $\eta_{m+p}$  is even a little higher than that calculated on the basis of Mohr’s hypothesis  $(\sigma_2 = -\sigma_3 = R_{\perp}^t)$ . This results from the fact that for the pure transverse/transverse shear stressing  $\tau_{\perp\perp}$  which is here present the corresponding sum has the value  $S_{\perp\perp} = 31,45^\circ$ , and this is somewhat less than  $S_{\perp}^t = 32,45^\circ$  for uniaxial transverse tension stressing  $\sigma_{\perp}^t$ .

To date there has been a lack of credible experimental results for  $(\sigma_2, \tau_{31})$ - and  $(\sigma_2, \sigma_3)$ -stress combinations.

The situation is entirely different for the  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -stress combinations shown in Figure A2c. The  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -fracture curve is the only one which has adequate experimental backing not only for CFRP but also for GFRP [Cun97]. An outstandingly good mathematical model is obtained with Equations (45) to (47) or Equations (54) and (55) using inclination parameters from Table 2, Section 4.5. Before proceeding further, it is important to bear in mind the fact that the consequences of  $\eta_{m+p}$ -effects on IFF strength are basically already included in experimentally determined fracture stresses, as also in the test results from which the modelled  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -fracture curve (thick line in Figure A2c) is obtained. If one wished to generate mathematically a  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -fracture curve which involves use of  $\eta_{m+p}$ -correction, then the experimentally obtained  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -fracture curve which was modelled using the measured basic strengths  $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\perp\parallel}$  and inclination parameters from Table 2 is not the *starting curve* for the  $\eta_{m+p}$ -correction procedure but instead represents the *result curve*.

If it is exclusively plane  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -stress states which have to be investigated, then the question of the unknown starting curve for an  $\eta_{m+p}$ -correction is irrelevant since the mathematically modelled, experimentally determined  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -fracture curve is being used directly for fracture analysis. On the other hand, use of  $\eta_{m+p}$ -correction is advisable in those cases where it is necessary, during dimensioning of FRP components, to also analyse load application zones in which spatial stresses  $\sigma_3, \tau_{32}, \tau_{31}$  of a similar magnitude to  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  occur. To ensure that absolutely consistent calculation results are obtained here,

absolut konsistente Rechenergebnisse erhalten werden, müssen natürlich einheitlich – also auch für die in ungestörten Bereichen vorherrschenden  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustände – in Gleichung (54) und Gleichung (55) dieselben Parameter benutzt werden. Deshalb müssen dann die für die zunächst noch unbekannte  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Ausgangskurve passenden Parameter bekannt sein.

Da im Falle der  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungskombinationen die *Ergebniskurve* bekannt ist und die Ausgangskurve gesucht wird, ist nun gewissermaßen eine Umkehrung der  $\eta_{m+p}$ -Korrektur erforderlich. Die korrigierten Basisfestigkeiten  $R_{\perp\text{cor}}^t, R_{\perp\text{cor}}^c, R_{\perp\parallel\text{cor}}$  für die Ausgangskurve erhält man durch „Umkehrung“ der  $\eta_{m+p}$ -Korrektur, indem man die gemessenen Werte  $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\perp\parallel}$  durch den zur jeweiligen Basisbeanspruchung gehörenden  $\eta_{m+p}$ -Wert nach Gleichung (A4) dividiert statt mit ihm zu multiplizieren.

**Anmerkung:** Die korrigierten Basisfestigkeiten gelten selbstverständlich nicht nur für den  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand sondern ebenso für jeden beliebigen Spannungszustand.

Weil die Summenwerte  $S_{\perp}^t, S_{\perp}^c, S_{\perp\parallel}$  der Basisbeanspruchungen nur wenig höher als der Referenzwert  $S_{\text{ref}} = 30^\circ$  sind, bleibt deren erforderliche Korrektur unter 5 %. Im Bereich hoher Druckspannungswerte  $|\sigma_2|$  und gleichzeitig hoher Werte von  $\tau_{21}$  werden jedoch in der Nähe des Umschlagspunktes zwischen Modus B ( $\theta_{\text{fp}} = 0^\circ$ ) und Modus C ( $\theta_{\text{fp}} \neq 0^\circ$ ) (siehe Bild 14) Summenwerte bis annähernd  $S \approx 60^\circ$  erreicht. Daraus folgen  $\eta_{m+p}$ -Korrekturen bis etwa 12 %, siehe Bild A1b und Bild A2c.

Die gesuchte Ausgangskurve der  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungskombinationen lässt sich nicht als Ganzes durch einfache Umkehrung der  $\eta_{m+p}$ -Korrektur aus der bekannten Ergebniskurve herleiten. Der Grund liegt in der komplexen, nur punktweise numerisch durchzuführenden  $\eta_{m+p}$ -Korrektur, die eine geschlossene mathematische Formulierung der gesuchten Ausgangskurve unmöglich macht. Benötigt wird aber eine einigermaßen passende  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Ausgangskurve, die mit Gleichung (54) und Gleichung (55) formuliert wird, denn für die Bruchanalyse allgemeiner räumlicher Spannungszustände stehen nur diese Gleichungen zur Verfügung. Deshalb muss man durch die Wahl geeigneter Parameter eine akzeptable, mit Gleichung (54) und Gleichung (55) beschreibbare, Ausgangskurve finden. Akzeptabel bedeutet, dass sich bei einer korrekt durchgeführten  $\eta_{m+p}$ -Korrektur dieser Ausgangskurve als Ergebnis eine  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurve ergibt, die von der bekannten modellierten experimentellen  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurve nur in einem akzeptablen Maße abweicht.

Durch iterative Wahl verschiedener Neigungsparameter  $p_{\perp\parallel\text{cor}}^c$  für die  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Ausgangskurve und

it is, of course, necessary that the same parameters be used uniformly in Equation (54) and Equation (55) for all stress states which occur – in other words, even for the  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -stress states prevailing in undisturbed areas. For this reason the parameters must be known which are appropriate for the  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -starting curve which is itself as yet unknown.

Since in the case of the  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -stress combinations the *result curve* is known and the starting curve is required, an inversion of the  $\eta_{m+p}$ -correction, as it were, is now necessary. The corrected basic strengths  $R_{\perp\text{cor}}^t, R_{\perp\text{cor}}^c, R_{\perp\parallel\text{cor}}$  for the starting curve are obtained by “inverting” the  $\eta_{m+p}$ -correction: the measured values  $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\perp\parallel}$  are not multiplied but are instead now divided by the  $\eta_{m+p}$ -value which is associated with the corresponding basic stressing.

**Note:** These corrected basic strengths of course apply not only to the  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -stress state but also to any stress state.

Since the sum values  $S_{\perp}^t, S_{\perp}^c, S_{\perp\parallel}$  of the basic stressings are only a little higher than the reference value  $S_{\text{ref}} = 30^\circ$ , the correction they need remains less than 5 %. In the range of high compressive stress values  $|\sigma_2|$  with at the same time high values of  $\tau_{21}$ , sum values up to around  $S \approx 60^\circ$  are however reached in the vicinity of the transition point between mode B ( $\theta_{\text{fp}} = 0^\circ$ ) and mode C ( $\theta_{\text{fp}} \neq 0^\circ$ ) (see Figure 14). This results in  $\eta_{m+p}$ -corrections up to approximately 12 %, see Figure A1b and Figure A2c.

The required starting curve of the  $(\sigma_2, \tau_{21})$  stress combinations cannot be obtained as a whole from the known result curve simply by inverting the  $\eta_{m+p}$ -correction. The reason for this lies in the complex nature of the  $\eta_{m+p}$ -correction which is only to be carried out numerically on a point by point basis and which makes impossible a closed mathematical formulation of the required starting curve. What is needed, however, is a  $(\sigma_2, \tau_{21})$  starting curve formulated using Equation (54) and Equation (55), since only these equations happen to be available for the fracture analysis of general three-dimensional stress states. For this reason, an acceptable approximated starting curve which is described using Equation (54) and Equation (55) must be found by selecting suitable parameters. What acceptable means is that when a  $\eta_{m+p}$ -correction of this starting curve has been carried out correctly, a  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -fracture curve is obtained as the result which will deviate only to an acceptable extent from the known modelled experimental  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -fracture curve.

By iterative selection of different inclination parameters  $p_{\perp\parallel\text{cor}}^c$  for the  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -starting curve and review-



Überprüfung, inwieweit die geforderte Akzeptanz damit erreicht ist, wird das folgende Ergebnis erhalten. Wenn man für die gesuchte Ausgangskurve der  $\eta_{m+p}$ -Korrektur bei einem gewählten Kalibrierwert  $\Delta_{\max}^c = 0,25$  einen korrigierten Neigungsparameter  $p_{\perp\parallel\text{cor}}^c = 0,45$  benutzt, erhält man als Ergebnis einer korrekt durchgeführten  $\eta_{m+p}$ -Korrektur eine  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurve, die der in üblicher Weise mit Gleichung (54) und Gleichung (55) modellierten experimentellen Kurve sehr nahe kommt. (Die Modellierung der experimentellen Kurve erfolgte mit den Basisfestigkeiten für CFK  $R_{\perp}^t = 48$  MPa,  $R_{\perp}^c = 200$  MPa,  $R_{\perp\parallel} = 79$  MPa [Sod98] und den Neigungsparametern  $p_{\perp\parallel}^t = 0,35$ ,  $p_{\perp\parallel}^c = 0,30$ ,  $p_{\perp\perp}^t = p_{\perp\perp}^c = 0,275$  nach [Puc02a].)

Will man auf Grund eigener experimenteller Ergebnisse von dem im Beispiel benutzten Wert  $\Delta_{\max}^c = 0,25$  und innerhalb der erlaubten Grenzen [Puc02a] auch von dem in Tabelle 2 angegebenen Richtwert  $p_{\perp\parallel}^c = 0,3$  abweichen, so kann man, um einen korrigierten Parameter  $p_{\perp\parallel\text{cor}}^c$  zu bestimmen, iterativ wie oben beschrieben verfahren, sofern ein Rechenprogramm zur Darstellung von  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurven verfügbar ist. Ansonsten ist in einem beschränkten Bereich von  $p_{\perp\parallel}^c$  und  $\Delta_{\max}^c$  die folgende Extrapolationsformel brauchbar:

$$\frac{p_{\perp\parallel\text{cor}}^c}{p_{\perp\parallel}^c} = 1 + 0,6 \cdot \frac{\Delta_{\max}^c}{p_{\perp\parallel}^c} \quad (\text{A5})$$

$$\text{für } 0,15 \leq \Delta_{\max}^c \leq 0,25$$

$$\text{und } 0,25 \leq p_{\perp\parallel}^c \leq 0,35$$

**Anmerkung:** Es wurde gezeigt, dass je nachdem, ob mit oder ohne  $\eta_{m+p}$ -Korrektur gearbeitet wird, die Anstrengungskurve  $f_E(\theta)$  mit unterschiedlichen Neigungsparametern  $p_{\perp\parallel\text{cor}}^c$  oder  $p_{\perp\parallel}^c$  berechnet werden muss, die sich nach Gleichung (A5) um einen Faktor bis 1,6 unterscheiden können. Wenn in dem zu untersuchenden Spannungszustand Schubspannungen  $\tau_{21}$  und/oder  $\tau_{31}$  vorkommen, errechnet man deshalb mit und ohne  $\eta_{m+p}$ -Korrektur etwas unterschiedliche Bruchwinkel  $\theta_{\text{fp}}$ . Bei  $(\sigma_2, \tau_{31})$ -Spannungskombinationen liegen die Unterschiede bei  $1^\circ$  bis  $5^\circ$ . Bei  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungskombinationen treten ähnliche Unterschiede auf, solange die Bruchwinkel  $|\theta_{\text{fp}}| \geq 30^\circ$  sind. Erheblich größere Unterschiede ergeben sich in der Nähe des Übergangspunktes Modus B/Modus C (siehe Bild 14). Hier sind aber Aussagen über den in der Wirklichkeit auftretenden Bruchwinkel wegen der wirksam werdenden probabilistischen Effekte, auf die man aus dem flachen Verlauf der normierten Anstrengungskurve schließen kann, ohnehin mit einer großen Unsicherheit behaftet. Dies zeigt sich auch bei Experimenten [Kop00]. Insgesamt sind diese Abweichungen bei der Bruchanalyse nicht problematisch [Kno07].

Eingehende Erläuterungen zu den in Anhang A1.1 behandelten Fragen finden sich in [Kno07].

ing to what extent the required acceptance is thereby achieved, the following result is obtained. If a corrected inclination parameter  $p_{\perp\parallel\text{cor}}^c = 0,45$  is chosen for the required starting curve of the  $\eta_{m+p}$ -correction when the calibration value  $\Delta_{\max}^c = 0,25$  is used, what is obtained as the result of a correctly performed  $\eta_{m+p}$ -correction is a  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -fracture curve which comes very close to the experimental curve modelled in the usual way using Equation (54) and Equation (55). (Modelling of the experimental curve was carried out using the basic strengths for CFRP  $R_{\perp}^t = 48$  MPa,  $R_{\perp}^c = 200$  MPa,  $R_{\perp\parallel} = 79$  MPa [Sod98] and the inclination parameters  $p_{\perp\parallel}^t = 0,35$ ,  $p_{\perp\parallel}^c = 0,30$ ,  $p_{\perp\perp}^t = p_{\perp\perp}^c = 0,275$  according to [Puc02a].)

If, in response to one's own experimental results, one wishes to use a value different from the value  $\Delta_{\max}^c = 0,25$  used in the example and also, within the permitted limits [Puc02a], to diverge from the guideline value  $p_{\perp\parallel}^c = 0,3$  given in Table 2, you can proceed iteratively as described above to obtain a corrected parameter  $p_{\perp\parallel\text{cor}}^c$  provided you have a computer program which can display  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -fracture curves. If this is not the case, the following extrapolation formula may be used within a restricted range of  $p_{\perp\parallel}^c$  and  $\Delta_{\max}^c$ :

$$\frac{p_{\perp\parallel\text{cor}}^c}{p_{\perp\parallel}^c} = 1 + 0,6 \cdot \frac{\Delta_{\max}^c}{p_{\perp\parallel}^c} \quad (\text{A5})$$

$$\text{für } 0,15 \leq \Delta_{\max}^c \leq 0,25$$

$$\text{und } 0,25 \leq p_{\perp\parallel}^c \leq 0,35$$

**Note:** It has been shown that depending on whether you work with or without  $\eta_{m+p}$ -correction, you will have to analyse the stress exposure curve  $f_E(\theta)$  by using different inclination parameters  $p_{\perp\parallel\text{cor}}^c$  or  $p_{\perp\parallel}^c$  respectively which may differ according to Equation (A5) by a factor of up to 1.6. If shear stresses  $\tau_{21}$  and/or  $\tau_{31}$  occur in the stress state under investigation, by calculating with and without  $\eta_{m+p}$ -correction you will therefore obtain angles of the fracture plane  $\theta_{\text{fp}}$  which differ somewhat. In the case of  $(\sigma_2, \tau_{31})$ -stress combinations the differences are from  $1^\circ$  to  $5^\circ$ . With  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -stress combinations similar differences are found, provided the angles of the fracture plane  $|\theta_{\text{fp}}| \geq 30^\circ$ . Considerably greater differences occur in the vicinity of the transition point from mode B to mode C (see Figure 14). But here any statements about the angle of the fracture plane which actually occurs will be tainted with a high degree of uncertainty anyway: this is due to the probabilistic effects which occur and which can be expected due to the flat course of the standardized stress exposure curve. This has been shown in experiments as well [Kop00]. All in all, these deviations are not problematic in the fracture analysis [Kno07].

Detailed explanations to all questions examined in Annex A1.1 will be found in [Kno07].

**A1.2 Berücksichtigung der faserparallelen Spannung  $\sigma_1$  in den wirkebenebezogenen ZFB-Bedingungen**

**Physikalische Überlegungen**

Nach der Mohr’schen Hypothese hat die Spannung  $\sigma_1$  keinen Einfluss auf den ZFB, weil die Wirkebene von  $\sigma_1$  senkrecht zu derjenigen steht, auf der die für den ZFB maßgebenden Spannungen  $\sigma_n$ ,  $\tau_{nt}$  und  $\tau_{n1}$  wirken. Es gibt jedoch eine Reihe von Effekten, die es nötig erscheinen lassen, in die ZFB-Kriterien einen von  $\sigma_1$  abhängigen Term aufzunehmen, der die „ZFB-Festigkeit“ etwas erniedrigt [Puc96a; Puc98; Kno07]. Der wesentlichste Effekt dürfte der folgende sein: Unter FB wird das Brechen einer sehr großen Anzahl von Elementarfasern verstanden, durch das eine Schicht in einem „Makrobereich“ ihre Tragfähigkeit in Faserrichtung einbüßt. Auf Grund statistischer Gesetzmäßigkeiten zerreißen bei Zugbeanspruchung durch  $\sigma_1$  aber etliche Elementarfasern bereits, bevor die FB-Grenze der UD-Schicht bei  $\sigma_1 = R_{\parallel}^t$  erreicht ist. Wahrscheinlich knicken bei Druckbeanspruchung durch  $\sigma_1$  einzelne Faserbündel schon aus, bevor bei  $|\sigma_1| = R_{\parallel}^c$  der Totalbruch eintritt. Solche vereinzelt „Mikro-Faserbrüche“ verursachen örtliche Schäden in der UD-Schicht in Form von Ablösungen an Faser/Matrix-Grenzflächen und Mikrobrüchen im Matrixmaterial. Sie schwächen den Faser/Matrix-Verbund und setzen somit auch dessen Widerstandsfähigkeit gegen ZFB herab.

**Analytische Behandlung**

Um die Schwächung durch  $\sigma_1$  im Zuge der ZFB-Analyse physikalisch sinnvoll zu berücksichtigen, reduziert man die für den ZFB maßgebende Wirkebenen-Bruchwiderstände  $R_{\perp}^t, R_{\perp\perp}^A, R_{\perp\parallel}$  mit einem Abminderungs-Faktor  $\eta_{w1}$  ( $w \hat{=}$  weakening,  $1 \hat{=}$  Schwächung durch  $\sigma_1$ ). Ein solcher kann sowohl im Zugbereich als auch im Druckbereich von  $\sigma_1$  angewandt werden. Eine ausführliche Darstellung der Methode findet sich in [Kno07]. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass der „Schwächungsfaktor“  $\eta_{w1}$  für alle drei Wirkebenen-Bruchwiderstände  $R_{\perp}^t, R_{\perp\perp}^A, R_{\perp\parallel}$  den gleichen Zahlenwert hat. Diese Annahme bewirkt, dass die durch den Bruchwinkel  $\theta_{fp}$  angegebene Neigung der Bruchebene ebenso wie der damit zusammenhängende ZFB-Modus durch die Schwächung infolge von  $\sigma_1$  nicht beeinflusst wird, denn  $\sigma_1$  hängt nicht von  $\theta$  ab. **Die Bruchwinkelsuche kann wie bisher ohne  $\sigma_1$ -Einfluss durchgeführt werden.** Der mathematische Beweis findet sich in [Kno07].

Eine Erniedrigung der Bruchwiderstände bedeutet andererseits eine Erhöhung der Anstrengung. Somit wird die Anstrengung  $f_{E_1}$  mit  $\sigma_1$ -Einfluss zu:

**A1.2 Inclusion of a parallel-to-fibre stress  $\sigma_1$  in the action-plane IFF conditions**

**Physical considerations**

According to Mohr’s hypothesis, the stress  $\sigma_1$  does not have any influence on the IFF due to the fact that the action plane of  $\sigma_1$  is perpendicular to the plane which is acted on by the stresses  $\sigma_n$ ,  $\tau_{nt}$  and  $\tau_{n1}$  and which are of decisive importance to the IFF. However, a series of effects appear to make it necessary to include a  $\sigma_1$  term in the IFF criteria which reduces “IFF strength” somewhat [Puc96a; Puc98; Kno07]. The most essential effect may be the following one: FF is taken to mean the fracture of a very large number of elementary fibres which in turn causes a lamina to lose some of its load-bearing capacity in the direction of fibre direction over a “macro-region”. Statistical laws, however, state that in the event of tensile stress  $\sigma_1$  some elementary fibres will already have ruptured before the FF limit of the UD lamina at  $\sigma_1 = R_{\parallel}^t$  has been reached. In the case of compressive stress  $\sigma_1$  it is possible that individual bundles of fibres could already start kinking before total fracture occurs when  $|\sigma_1| = R_{\parallel}^c$ . Occasional “micro fibre fractures” cause local damage in the UD lamina which takes the form of debonding at fibre matrix interfaces and of micro-fractures in the matrix material. They weaken the fibre matrix cohesion and thus also reduce its resistance to IFF.

**Analytical treatment**

In order to include in IFF analysis the weakening effect resulting from  $\sigma_1$  in a way which is appropriate to the physical circumstances, the actionplane-fracture resistances  $R_{\perp}^t, R_{\perp\perp}^A, R_{\perp\parallel}$  are multiplied by a degradation factor  $\eta_{w1}$  ( $w \hat{=}$  weakening,  $1 \hat{=}$  weakening due to  $\sigma_1$ ). A factor of this kind can be used not only in the tensile range but also in the compressive range of  $\sigma_1$ . A detailed treatment of this method will be found in [Kno07]. For the sake of simplicity it is assumed that the “weakening factor”  $\eta_{w1}$  has the same numerical value for all three actionplane-fracture resistances  $R_{\perp}^t, R_{\perp\perp}^A, R_{\perp\parallel}$ . This assumption has the effect that the inclination of the fracture plane given by the fracture plane angle  $\theta_{fp}$  and the IFF fracture mode connected with it are not affected by the weakening which is now solely dependent on  $\sigma_1$ , since  $\sigma_1$  does not depend on  $\theta$ . **Searching the fracture angle can be carried out in the same way as before neglecting an influence of  $\sigma_1$ .** The mathematical proof can be found in [Kno07].

Reducing the fracture resistances results in an increased stress exposure. Therefore the stress exposure  $f_{E_1}$  when taking into account the influence of  $\sigma_1$  becomes:

$$f_{E_1} = \frac{f_{E_0}}{\eta_{w1}} \tag{A6}$$

$$f_{E_1} = \frac{f_{E_0}}{\eta_{w1}} \tag{A6}$$

Wie bereits in [Puc96a; Puc98; Puc02b] wird die progressiv mit  $\sigma_1$  zunehmende Schwächung durch eine Bruchkurve in Form eines Ellipsenabschnittes beschrieben, siehe Bild A3. Bisher musste  $\eta_{w1}$  iterativ berechnet werden; jetzt wurde jedoch eine geschlossene Lösung gefunden. Der Ellipsenabschnitt ist durch den Startpunkt der Schwächung an der Stelle  $s \cdot R_{||}$  und durch den an der Faserbruchgrenze  $|\sigma_1| = R_{||}$  erreichten Minimalwert  $m$  des Schwächungsfaktors  $\eta_{w1}$  festgelegt. Die beiden Parameter  $s$  und  $m$  können frei zwischen 0 und 1 gewählt werden, wodurch sich eine hervorragende Anpassbarkeit an Versuchsergebnisse ergibt, zumal die Parameterpaare  $s$  und  $m$  im Zugbereich und Druckbereich von  $\sigma_1$  unterschiedlich gewählt werden können, siehe Bild A3.

As has already been done in [Puc96a; Puc98; Puc02b], the weakening which increases progressively with  $\sigma_1$  is described by a fracture curve in the form of a segment of an ellipse, see Figure A3. Previously,  $\eta_{w1}$  had always to be calculated iteratively but now a closed solution has been found. The section of the ellipse starts at  $s \cdot R_{||}$  and ends at the FF-limit namely at  $|\sigma_1| = R_{||}$ . Here, at the FF-limit the weakening factor  $\eta_{w1}$  reaches its minimum  $m$ . Both parameters  $s$  and  $m$  can be chosen independently between 0 and 1 resulting in an excellent adaptability to experiments, especially as the parameter pairs  $s$  and  $m$  can be set differently in the tension area and in the compression area of  $\sigma_1$  (see Figure A3).

Unter den genannten Voraussetzungen wurde die folgende Beziehung für den Schwächungsfaktor  $\eta_{w1}$  hergeleitet:

Under the given assumptions the following formula for the weakening factor  $\eta_{w1}$  has been derived:

$$\eta_{w1} = \frac{c(a\sqrt{c^2(a^2 - s^2)} + 1 + s)}{(ca)^2 + 1} \tag{A7}$$

$$\eta_{w1} = \frac{c(a\sqrt{c^2(a^2 - s^2)} + 1 + s)}{(ca)^2 + 1} \tag{A7}$$

mit  $c = \frac{f_{E_0}}{f_E(\text{FF})}$  und  $a = \frac{1-s}{\sqrt{1-m^2}}$

with  $c = \frac{f_{E_0}}{f_E(\text{FF})}$  and  $a = \frac{1-s}{\sqrt{1-m^2}}$

$f_E(\text{FF})$  ist die FB-Anstrengung, die mit der FB-Bedingung  $|\sigma_1| = R_{||}$  nach Gleichung (42) berechnet wird. Die Anstrengung  $f_{E_0}$  ist die ZFB-Anstrengung ohne  $\sigma_1$ -Einfluss (Der Index 0 besagt:  $\sigma_1 = 0$ ). Wenn eine Schwächung durch (m+p)-Effekte nicht berücksichtigt wird, sind für  $f_{E_0}$  die mit Hilfe der Gleichungen (45) bis (47) oder Gleichungen (54) und (55) mit gemessenen Basisfestigkeiten und den in Tabelle 2, Abschnitt 4.5 angegebenen Richtwerten für die Neigungsparameter berechneten Anstrengungswerte  $f_E$  einzusetzen. Bei Berücksichtigung von (m+p)-Effekten ist für  $f_{E_0}$  der Wert von  $f_{E_{m+p}}$  nach Gleichung (A2) unter Benutzung der korrigierten Basisfestig-

$f_E(\text{FF})$  is the FF-stress exposure, which is calculated by using the FF-condition  $|\sigma_1| = R_{||}$  given in Equation (42). The stress exposure  $f_{E_0}$  is the IFF exposure without an influence of  $\sigma_1$  (The subscript 0 indicates that  $\sigma_1 = 0$ ). If weakening due to (m+p) effects is not taken into account, then what should be used for  $f_{E_0}$  are the stress exposure values  $f_E$  calculated with the aid of Equations (45) to (47) or Equations (54) and (55) with measured basic strengths and with the guide values given in Table 2, Section 4.5 for the inclination parameters. When (m+p) effects are included, what should be used for  $f_{E_0}$  is the value of  $f_{E_{m+p}}$  according to Equation (A2) and using the corrected basic

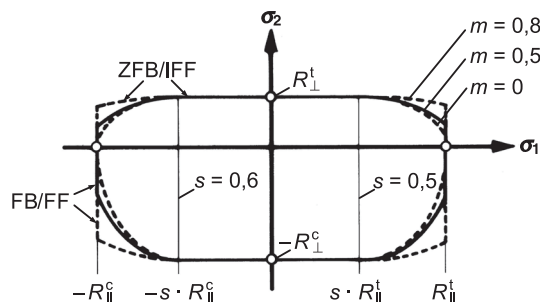


Bild A3. Gestalt einer  $(\sigma_1, \sigma_2)$ -Bruchkurve mit Einfluss von  $\sigma_1$  auf den ZFB in Abhängigkeit von den Parametern  $s$  und  $m$

Figure A3. Form of a  $(\sigma_1, \sigma_2)$ -fracture curve with influence of  $\sigma_1$  on the IFF expressed as a function of parameters  $s$  and  $m$

keiten  $R_{\perp\text{cor}}^t, R_{\perp\text{cor}}^c, R_{\parallel\text{cor}}$  und des korrigierten Parameters  $p_{\perp\text{cor}}^c$  einzusetzen.

Der Gültigkeitsbereich des Schwächungsfaktors  $\eta_{w1}$  ist gegeben durch

$$\frac{1}{s} \geq \frac{f_{E_0}}{f_E(\text{FF})} \geq m \quad (\text{A8})$$

Außerhalb dieses Bereichs tritt entweder keine Schwächung ein oder es erfolgt vor dem Erreichen der FB-Grenze überhaupt kein ZFB. Im letztgenannten Fall kann keine ZFB-Anstrengung sondern nur eine FB-Anstrengung angegeben werden. Der FB verursacht nämlich eine so weitgehende Zerstörung des Faser-Matrix-Verbundes, dass nach dem FB von einem eigenständigen ZFB keine Rede mehr sein kann.

Weil für die Wahl der Parameter  $s$  und  $m$  noch keine brauchbaren Versuchsergebnisse vorliegen [Kai04], muss vorläufig mit angenommenen Werten gerechnet werden. Empfohlen wird, sowohl bei  $\sigma_1 > 0$  als auch bei  $\sigma_1 < 0$  mit  $s = 0,5$  und  $m = 0,5$  zu rechnen. Damit wird

$$\eta_{w1} = \frac{c(\sqrt{c^2 + 12 + 3})}{2(c^2 + 3)} \text{ für } 2 \geq c \geq 0,5 \quad (\text{A9})$$

Eine ausführliche Diskussion des Gebrauches der im Anhang A1.2 angegebenen Gleichungen und der damit erzielten Ergebnisse findet sich in [Kno07].

## A2 Berechnung des Streckungsfaktors $f_S^L$ der lastbedingten Spannungen bei gleichzeitig vorhandenen Eigenspannungen

Im Folgenden wird für einen  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand die Vorgehensweise bei der Berechnung des Streckungsfaktors  $f_S^L$  der (veränderlichen) lastbedingten Schichtspannungen  $\sigma_1^L, \sigma_2^L, \tau_{21}^L$  bei gleichzeitig vorhandenen (konstanten) Eigenspannungen  $\sigma_1^r, \sigma_2^r, \tau_{21}^r$  (siehe Abschnitt 5.5.3) erläutert. Dies geschieht auf der Basis der wirkebenebezogenen Bruchkriterien für ZFB von Puck unter Berücksichtigung des schwächenden Einflusses der faserparallelen Spannung  $\sigma_1$ . Es werden die benötigten Formeln angegeben.

### Vereinfachter $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkörper

Ausgangspunkt sind die Bruchbedingungen für ZFB ohne Einfluss von  $\sigma_1$ . Sie lauten (siehe auch Gleichungen (45) bis (47):

ZFB-Modus A

$$f_{E_0} = \frac{1}{R_{\perp\parallel}} \left[ \sqrt{\left( \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^t} - p_{\perp\parallel}^t \right)^2 \sigma_2^2 + \tau_{21}^2 + p_{\perp\parallel}^t \sigma_2} \right] = 1 \quad (\text{A10})$$

für  $\sigma_2 \geq 0$

strength  $R_{\perp\text{cor}}^t, R_{\perp\text{cor}}^c, R_{\parallel\text{cor}}$  and the corrected parameter  $p_{\perp\text{cor}}^c$ .

The range of validity of the weakening factor  $\eta_{w1}$  is given by

$$\frac{1}{s} \geq \frac{f_{E_0}}{f_E(\text{FF})} \geq m \quad (\text{A8})$$

Beyond this region there is either no damage or no IFF occurs before the FF-limit is reached. In the later case it makes no sense to talk about an IFF-stress exposure. Instead, there is just a FF-stress exposure. This is because FF usually results in an extensive destruction of the fibre-matrix-composite. Thus there is no such thing as an independent IFF anymore.

So far there are no reliable experimentally determined values for the parameters  $s$  and  $m$  available [Kai04]. Thus assumed values must be chosen. It is recommended to use  $s = 0,5$  and  $m = 0,5$  both at  $\sigma_1 > 0$  and at  $\sigma_1 < 0$ . With these values  $\eta_{w1}$  becomes

$$\eta_{w1} = \frac{c(\sqrt{c^2 + 12 + 3})}{2(c^2 + 3)} \text{ für } 2 \geq c \geq 0,5 \quad (\text{A9})$$

A thorough discussion of the use of the formulae given in Annex A1.2 and results obtained with that can be found in [Kno07].

## A2 Calculation of the stretch factor $f_S^L$ of the load-determined stresses when residual stresses are also present

Our concern in what follows will be to explain for the case of a  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$  stress state the procedure to be used when calculating the stretch factor  $f_S^L$  of the (changing) load-determined lamina stresses  $\sigma_1^L, \sigma_2^L, \tau_{21}^L$  when (constant) residual stresses  $\sigma_1^r, \sigma_2^r, \tau_{21}^r$  are simultaneously present (see Section 5.5.3). This procedure is based on Puck's action-plane fracture criteria for IFF and takes into consideration the weakening influence of the parallel-to-fibre stress  $\sigma_1$ . The formulae required for the procedure are given.

### Simplified $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -fracture body

The starting point are the fracture conditions for IFF when there is no influence from  $\sigma_1$ . These are (see Equations (45) to (47):

IFF mode A

$$f_{E_0} = \frac{1}{R_{\perp\parallel}} \left[ \sqrt{\left( \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^t} - p_{\perp\parallel}^t \right)^2 \sigma_2^2 + \tau_{21}^2 + p_{\perp\parallel}^t \sigma_2} \right] = 1 \quad (\text{A10})$$

for  $\sigma_2 \geq 0$

## ZFB-Modus B

$$f_{E_0} = \frac{1}{R_{\perp\parallel}} \left( \sqrt{\tau_{21}^2 + (p_{\perp\parallel}^c \sigma_2)^2} + p_{\perp\parallel}^c \sigma_2 \right) = 1 \quad (\text{A11})$$

$$\text{für } \sigma_2 < 0 \text{ und } 0 \leq \left| \frac{\sigma_2}{\tau_{21}} \right| \leq \frac{R_{\perp\parallel}^A}{|\tau_{21c}|}$$

## ZFB-Modus C

$$f_{E_0} = \frac{\tau_{21}^2}{4(R_{\perp\parallel} + p_{\perp\parallel}^c R_{\perp\parallel}^A)^2} \cdot \frac{(-R_{\perp\parallel}^c)}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{(-R_{\perp\parallel}^c)} = 1 \quad (\text{A12})$$

$$\text{für } \sigma_2 < 0 \text{ und } 0 \leq \left| \frac{\tau_{21}}{\sigma_2} \right| \leq \frac{|\tau_{21c}|}{R_{\perp\parallel}^A}$$

Bei der Herleitung der Gleichung (A12) ist die folgende Kopplung von Neigungsparametern benutzt worden:

$$\frac{p_{\perp\parallel}^c}{R_{\perp\parallel}^A} = \frac{p_{\perp\parallel}^c}{R_{\perp\parallel}} \quad (\text{A13})$$

**Deshalb muss  $R_{\perp\parallel}^A$  nach Gleichung (48) berechnet werden.**

Die Bruchbedingungen für ZFB, Gleichungen (A10) bis (A12), beschreiben im  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungsraum die Mantelfläche eines „zylindrischen“ Bruchkörpers (siehe Bild A5a), dessen konstante Querschnittskontur die im Bild 14 gezeigte, symmetrisch zur  $\sigma_2$ -Achse vervollständigte Bruchkurve für  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungskombinationen ist. Dieser Körper erstreckt sich in positiver und negativer  $\sigma_1$ -Richtung bis ins Unendliche; seine reale Bedeutung endet aber spätestens an den beiden Faserbruchgrenzen bei  $\sigma_1 = R_{\parallel}^t$  und  $\sigma_1 = -R_{\parallel}^c$ .

Ein Einfluss von  $\sigma_1$  auf den ZFB wird – wie im Anhang A1.2 beschrieben – durch Einführung eines Schwächungsfaktors  $\eta_{w1} < 1$  bei den primär für den ZFB maßgebenden Festigkeiten  $R_{\perp\parallel}^t, R_{\perp\parallel}^c, R_{\perp\parallel}$  berücksichtigt. Die Schwächung dieser Festigkeiten erfolgt erst ab einem auf Grund experimenteller Erfahrung festzulegenden Schwellenwert von  $\sigma_1$ , der als Bruchteil der zum Faserbruch führenden Spannung  $(\sigma_1)_{fr} = R_{\parallel}^t$  oder  $(\sigma_1)_{fr} = (-R_{\parallel}^c)$  angegeben wird. Im Anhang A1.2 wurde für den Verlauf des Schwächungsfaktors  $\eta_{w1}$  als Funktion  $\eta_{w1}(\sigma_1)$  eine Ellipse gewählt. Damit eine geschlossene Lösung für  $f_S^L$ , und zwar in Form der Lösung einer quadratischen Gleichung, erhalten wird, ist es notwendig, die Funktion für  $\eta_{w1}$  zu linearisieren, siehe Gleichung (A14) und Bild A4.

Die Schwächung der Festigkeiten  $R_{\perp\parallel}^t, R_{\perp\parallel}^c, R_{\perp\parallel}$  nimmt mit steigender FB-Anstrengung  $f_{E(\text{FF})}$  zu; das

## IFF mode B

$$f_{E_0} = \frac{1}{R_{\perp\parallel}} \left( \sqrt{\tau_{21}^2 + (p_{\perp\parallel}^c \sigma_2)^2} + p_{\perp\parallel}^c \sigma_2 \right) = 1 \quad (\text{A11})$$

$$\text{für } \sigma_2 < 0 \text{ and } 0 \leq \left| \frac{\sigma_2}{\tau_{21}} \right| \leq \frac{R_{\perp\parallel}^A}{|\tau_{21c}|}$$

## IFF mode C

$$f_{E_0} = \frac{\tau_{21}^2}{4(R_{\perp\parallel} + p_{\perp\parallel}^c R_{\perp\parallel}^A)^2} \cdot \frac{(-R_{\perp\parallel}^c)}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{(-R_{\perp\parallel}^c)} = 1 \quad (\text{A12})$$

$$\text{für } \sigma_2 < 0 \text{ and } 0 \leq \left| \frac{\tau_{21}}{\sigma_2} \right| \leq \frac{|\tau_{21c}|}{R_{\perp\parallel}^A}$$

The following coupling of inclination parameters was used in deriving Equation (A12):

$$\frac{p_{\perp\parallel}^c}{R_{\perp\parallel}^A} = \frac{p_{\perp\parallel}^c}{R_{\perp\parallel}} \quad (\text{A13})$$

**For this reason  $R_{\perp\parallel}^A$  needs to be calculated using Equation (48).**

The fracture conditions for IFF – Equations (A10) to (A12) – describe in the  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$  stress space the circumferential surface of a “cylindrical” fracture body (see Figure A5a) whose constant cross-sectional contour is the fracture curve for  $(\sigma_2, \tau_{21})$  stress combinations shown in Figure 14 which has been completed symmetrically with respect to the  $\sigma_2$  axis. This body extends to infinity in both the positive and negative  $\sigma_1$  directions; its real importance ceases, however, no later than at the two fibre fracture limits at  $\sigma_1 = R_{\parallel}^t$  and  $\sigma_1 = -R_{\parallel}^c$ .

Any influence of  $\sigma_1$  on the IFF is taken into account – as described in Annex A1.2 – by introducing a weakening factor  $\eta_{w1} < 1$  in the case of the strengths  $R_{\perp\parallel}^t, R_{\perp\parallel}^c, R_{\perp\parallel}$  which are of primary, decisive importance to the IFF. These strengths do not weaken until a threshold value of  $\sigma_1$  is passed. This value must be determined on the basis of experimental experience and is given as a fraction of the stress  $(\sigma_1)_{fr} = R_{\parallel}^t$  or  $(\sigma_1)_{fr} = (-R_{\parallel}^c)$  leading to fibre fracture. In Annex A1.2 an ellipse has been selected for the course of the weakening factor  $\eta_{w1}$  as a function  $\eta_{w1}(\sigma_1)$ . In order that a closed solution may be obtained for  $f_S^L$ , and that in the form of the solution of a quadratic equation, it will be necessary to linearize the function for  $\eta_{w1}$  (see Equation (A14) and Figure A4).

Weakening of the strengths  $R_{\perp\parallel}^t, R_{\perp\parallel}^c, R_{\perp\parallel}$  increases as FF stress exposure  $f_{E(\text{FF})}$  rises; in other words, the

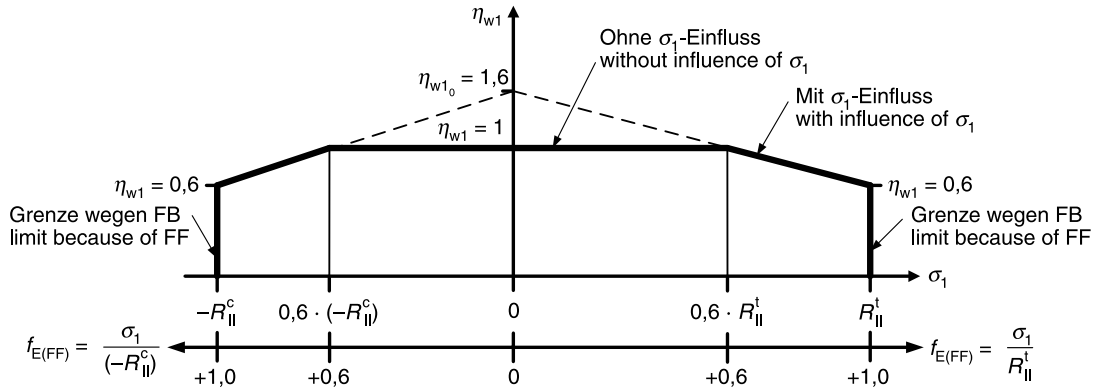


Bild A4. Verlauf des Schwächungsfaktors  $\eta_{w1}$  als Funktion von  $\sigma_1$  oder als Funktion von  $f_{E(FF)}$  im Bereich  $-R_{||}^c \geq \sigma_1 \leq R_{||}^t$  oder  $0 < f_{E(FF)} < 1,0$

Damit die im Anhang A1.2 empfohlene Ellipse mit  $s = m = 0,5$  gut angenähert wird, ist  $\eta_{w1_0} = 1,6$  und  $\eta'_{w1} = 1$  gewählt worden ( $S = M = 0,6$ ).

Figure A4. Course of the weakening factor  $\eta_{w1}$  as a function of  $\sigma_1$  or as a function of  $f_{E(FF)}$  in the range  $-R_{||}^c \geq \sigma_1 \leq R_{||}^t$  or respectively  $0 < f_{E(FF)} < 1,0$

In order to approximate the ellipse with parameters  $s = m = 0,5$  as recommended in Annex A1.2, the values  $\eta_{w1_0} = 1,6$  and  $\eta'_{w1} = 1$  are chosen ( $S = M = 0,6$ ).

heißt der Schwächungsfaktor  $\eta_{w1}$  wird mit steigendem  $f_{E(FF)}$  kleiner. Hier wird folgender linearer Ansatz gemacht:

$$\eta_{w1} = \eta_{w1_0} - \eta'_{w1} \cdot f_{E(FF)} \tag{A14}$$

$\eta_{w1_0}$  ist ein fiktiver Wert von  $\eta_{w1}$  bei  $\sigma_1 = 0$ , und  $\eta'_{w1}$  ist die Neigung der geraden Linie für  $\eta_{w1}$  gemäß Gleichung (A14).

Die Anstrengung  $f_{E(FF)}$  ist definitionsgemäß das Verhältnis der wirkenden Spannung zu der zum Bruch führenden Spannung (vgl. Diskussion zu Bild 12). Damit folgt aus der FB-Bedingung Gleichung (42):

$$f_{E(FF)} = \frac{\sigma_1}{(\sigma_1)_{fr}} \tag{A15}$$

mit  $(\sigma_1)_{fr} = R_{||}^t$  für  $\sigma_1 > 0$   
 oder  $(\sigma_1)_{fr} = -R_{||}^c$  für  $\sigma_1 < 0$  (A16)

Die Benutzung unterschiedlicher Vorzeichen bei  $R_{||}^t$  und  $(-R_{||}^c)$  ist in der internationalen Vereinbarung begründet, wonach Druckspannungen als negative Werte, aber alle Festigkeiten (auch Druckfestigkeiten) als positive Werte angegeben werden.

Nun wird mit Hilfe des eingeführten Schwächungsfaktors  $\eta_{w1} = \eta_{w1}(\sigma_1)$  bei den drei Festigkeiten  $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\perp\parallel}$  jener (konische) Teil des Bruchkörpers beschrieben, dessen Oberflächengleichung nicht nur von  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$ , sondern auch von  $\sigma_1$  abhängt (Bild A5b).

Dazu müssen Zahlenwerte für die beiden Parameter  $\eta_{w1_0}$  und  $\eta'_{w1}$  in der linearen Beziehung (A14) für den Schwächungsfaktor  $\eta_{w1}$  gewählt werden. Im Anhang A1.2 wurden der „Startpunkt“ der „elliptischen“ Schwächung durch den Wert  $s$  und der Mini-

weakening factor  $\eta_{w1}$  becomes smaller as  $f_{E(FF)}$  increases. Here the following linear equation is used:

$$\eta_{w1} = \eta_{w1_0} - \eta'_{w1} \cdot f_{E(FF)} \tag{A14}$$

$\eta_{w1_0}$  is a hypothetical value of  $\eta_{w1}$  when  $\sigma_1 = 0$ , and  $\eta'_{w1}$  is the slope of the straight line for  $\eta_{w1}$  according to Equation (A14).

By definition, the stress exposure  $f_{E(FF)}$  is the ratio of the acting stress and the stress leading to fracture (cf. discussion relating to Figure 12). Accordingly, from the FF condition Equation (42) we obtain:

$$f_{E(FF)} = \frac{\sigma_1}{(\sigma_1)_{fr}} \tag{A15}$$

where  $(\sigma_1)_{fr} = R_{||}^t$  für  $\sigma_1 > 0$   
 or  $(\sigma_1)_{fr} = -R_{||}^c$  für  $\sigma_1 < 0$  (A16)

The reason for using different signs with  $R_{||}^t$  and  $(-R_{||}^c)$  lies in the international convention whereby compressive stresses are expressed as negative values while all strengths (even compressive strengths) are expressed as positive values.

Now, with the aid of the weakening factor  $\eta_{w1} = \eta_{w1}(\sigma_1)$  which we introduced in the case of the three strengths  $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\perp\parallel}$ , a description is obtained of that (conical) part of the fracture body whose surface equation depends not only on  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  but also on  $\sigma_1$  (Figure A5b).

To do so, it is necessary to select numerical values for the two parameters  $\eta_{w1_0}$  and  $\eta'_{w1}$  in the linear Equation (A14) for the weakening factor  $\eta_{w1}$ . In Annex A1.2 the “starting point” of the “elliptical” weakening was defined by the value  $s$  and the mini-

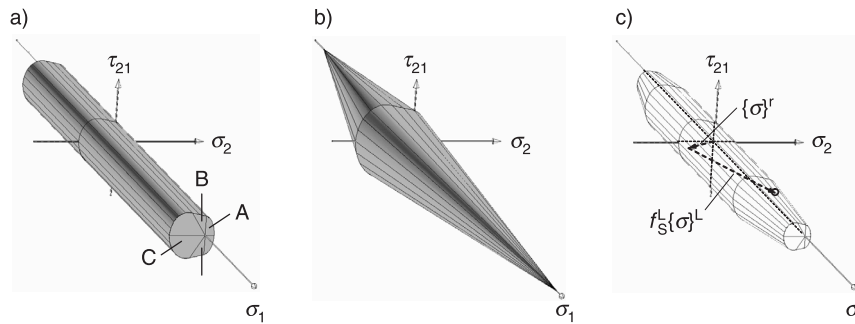


Bild A5. Entstehung des  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkörpers für ZFB

- a)  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkörper für ZFB ohne  $\sigma_1$ -Einfluss nach Gleichungen (A10) bis (A12). Dieser theoretisch in positiver und negativer  $\sigma_1$ -Richtung unendlich ausgedehnte Bruchkörper hat eine praktische Bedeutung nur zwischen den Faserbruchgrenzen bei  $\sigma_1 = R_{\parallel}^t$  und  $\sigma_1 = -R_{\parallel}^c$ .
- b) ZFB-Bruchkörper berechnet mit schwächendem  $\sigma_1$ -Einfluss mit den Gleichungen (A20) bis (A22)
- c) gültiger Restbruchkörper als Durchdringung der Körper gemäß a) und b) und nach Entfernen der ungültigen Partien

Figure A5. Creation of the  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$  fracture body for IFF

- a)  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$  fracture body for IFF without  $\sigma_1$  influence according to Equations (A10) to (A12). This fracture body which theoretically extends to infinity in both the positive and negative  $\sigma_1$  direction is of practical relevance only between the fibre fracture limits at  $\sigma_1 = R_{\parallel}^t$  and  $\sigma_1 = -R_{\parallel}^c$
- b) IFF fracture body calculated with weakening  $\sigma_1$  influence using Equations (A20) to (A22)
- c) valid remaining fracture body as intersection of the bodies in accordance with a) and b) and following removal of the invalid parts

malwert des Schwächungsfaktors an der FB-Grenze durch den Wert  $m$  festgelegt. Wenn entsprechende Werte für den linearisierten Verlauf von  $\eta_{w1}(f_{E(FF)})$  mit  $S$  und  $M$  bezeichnet werden, ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\eta_{w1_0} = \frac{1 - S \cdot M}{1 - S} \quad (A17)$$

$$\eta'_{w1} = \frac{1 - M}{1 - S} \quad (A18)$$

Im Anhang A1.2 wurde empfohlen, in Ermangelung experimenteller Ergebnisse, beim elliptischen Verlauf von  $\eta_{w1}$  die Werte  $s = 0,5$  und  $m = 0,5$  zu wählen. Eine gute Annäherung an diese Ellipse erhält man, wenn man für die Gerade  $S = 0,6$  und  $M = 0,6$  wählt. Dies führt nach Gleichung (A17) zu  $\eta_{w1_0} = 1,6$  und nach Gleichung (A18) zu  $\eta'_{w1} = 1,0$ . Damit ergibt sich der in Bild A4 gezeigte Verlauf des Schwächungsfaktors  $\eta_{w1}$  über  $\sigma_1$  bzw.  $f_{E(FF)}$ . (Grundsätzlich können auch unterschiedliche Wertepaare ( $S$  und  $M$ ) für die Bereiche  $\sigma_1 > 0$  und  $\sigma_1 < 0$  gewählt werden.)

Durch die Anwendung eines gleich hohen Schwächungsfaktors  $\eta_{w1}$  auf alle drei für den ZFB maßgebenden Festigkeiten  $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\parallel}$  ergeben sich  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurven, die eine geometrisch ähnliche Verkleinerung mit einem Faktor  $\eta_{w1} < 1$  der in Bild 14 gezeigten, symmetrisch zur  $\sigma_2$ -Achse ergänzten,  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurve darstellen. Im  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungsraum entsteht damit infolge des linearen Ansatzes für  $\eta_{w1}(\sigma_1)$  ein Bruchkörper für ZFB, der die Form eines Doppelkegels hat, Bild A5b. Seine Querschnitte senkrecht zur  $\sigma_1$ -Achse sind geometrisch ähnlich.

imum value of the weakening factor at the FF limit by the value  $m$ . If the corresponding values for the linearized course of  $\eta_{w1}(f_{E(FF)})$  are designed by  $S$  and  $M$  this delivers the following relationships:

$$\eta_{w1_0} = \frac{1 - S \cdot M}{1 - S} \quad (A17)$$

$$\eta'_{w1} = \frac{1 - M}{1 - S} \quad (A18)$$

In Annex A1.2 the recommendation was made, should experimental results be lacking, that the values  $s = 0,5$  and  $m = 0,5$  should be selected when  $\eta_{w1}$  has an elliptical course. A good approximation to this ellipse may be obtained by using  $S = 0,6$  and  $M = 0,6$  for the straight line. On the basis of Equation (A17) this yields  $\eta_{w1_0} = 1,6$  and on the basis of Equation (A18)  $\eta'_{w1} = 1,0$ . From this we obtain the course of the weakening factor  $\eta_{w1}$  shown in Figure A4 as a function of  $\sigma_1$  or  $f_{E(FF)}$ . (In principle even different pairs of values ( $S$  and  $M$ ) can be used for the ranges  $\sigma_1 > 0$  and  $\sigma_1 < 0$ .)

By applying an equally high weakening factor  $\eta_{w1}$  to all three strengths  $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\parallel}$  which have a decisive influence on IFF we obtain  $(\sigma_2, \tau_{21})$  fracture curves which represent a geometrically similar reduction by a factor  $\eta_{w1} < 1$  of the  $(\sigma_2, \tau_{21})$  fracture curve shown in Figure 14 which was completed symmetrically to the  $\sigma_2$  axis. As a consequence, therefore, of the linear equation for  $\eta_{w1}(\sigma_1)$ , in the  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$  stress space we find a fracture body for IFF which has the shape of a double cone (Figure A5b). Its cross sections perpendicular to the  $\sigma_1$  axis are geometrically similar.

Der in Bild A5a gezeigte „zylindrische“ Bruchkörper und der doppelkegelförmige Bruchkörper durchdringen einander in zwei zur  $\sigma_1$ -Achse senkrecht stehenden Schnitten bei  $\sigma_1 = S \cdot R_{\parallel}^t$  und  $\sigma_1 = S \cdot (-R_{\parallel}^c)$ . Vom Koordinaten-Ursprung bis zu diesen Durchdringungsebenen ist der zylindrische Bruchkörper gültig. Im Bereich zwischen den Durchdringungsebenen und den FB zugeordneten, zur  $\sigma_1$ -Achse senkrecht stehenden Ebenen bei  $\sigma_1 = R_{\parallel}^t$  oder  $\sigma_1 = -R_{\parallel}^c$  sind die konischen Mantelflächen des doppelkegelförmigen Bruchkörpers für ZFB nach Bild A5b gültig.

**Herleitung der für die Berechnung von  $f_S^L$  benötigten Formeln**

Die Berechnung des gesuchten Streckungsfaktors  $f_S^L$  der lastbedingten Spannungen  $\sigma_1^L, \sigma_2^L, \tau_{21}^L$  erfordert – geometrisch gesehen – die Bestimmung des Berührungspunktes des resultierenden Bruchvektors  $\{\sigma\}_{fr}$  mit dem gültigen Bereich der Oberfläche des  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkörpers für ZFB (Bild A5c). Der resultierende Bruchvektor  $\{\sigma\}_{fr}$  ergibt sich aus der „geometrischen Addition“ des Eigenspannungsvektors  $\{\sigma\}^r$  und dem mit dem Faktor  $f_S^L$  verlängerten (gestreckten) Lastspannungsvektor  $\{\sigma\}^L$ . Die Form des  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkörpers gemäß Bild A5c und die Vorgabe, dass der lastbedingte Vektor  $\{\sigma\}^L$  nur in seiner gegebenen Richtung gestreckt werden darf, ermöglichen nur einen einzigen Berührungspunkt von  $\{\sigma\}_{fr}$  mit der Bruchkörperoberfläche. In den meisten Fällen wird dieser Berührungspunkt sich auf dem zylindrischen oder konischen Teil der für ZFB geltenden Mantelfläche befinden. Er kann aber auch auf einer der beiden „Stirnflächen“ liegen, die für FB gelten.

In die Bruchbedingungen für ZFB, Gleichungen (A10) bis (A12), führt man bei den drei Festigkeiten  $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\perp\parallel}$  den gleichen Schwächungsfaktor  $\eta_{w1}(\sigma_1)$  ein. Bezeichnet man die ZFB-Anstrengung bei Schwächung durch  $\sigma_1$  als  $f_{E_1}$ , ergibt sich somit als *Bruchbedingung* bei Schwächung:

$$f_{E_1}(\sigma_2, \tau_{21}, \sigma_1) = \frac{f_{E_0}(\sigma_2, \tau_{21})}{\eta_{w1}(\sigma_1)} = 1 \quad (A19)$$

$$\text{oder auch } f_{E_0}(\sigma_2, \tau_{21}) = \eta_{w1}(\sigma_1) \quad (A19a)$$

Für die drei ZFB-Modi erhält man somit:

für ZFB-Modus A

$$\frac{1}{R_{\perp\parallel}} \left[ \sqrt{\left( \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^t} - p_{\perp\parallel}^t \right)^2 \sigma_2^2 + \tau_{21}^2 + p_{\perp\parallel}^t \sigma_2} \right] = \eta_{w1}(\sigma_1) \quad (A20)$$

für ZFB-Modus B

$$\frac{1}{R_{\perp\parallel}} \left( \sqrt{\tau_{21}^2 + (p_{\perp\parallel}^c \sigma_2)^2} + p_{\perp\parallel}^c \sigma_2 \right) = \eta_{w1}(\sigma_1) \quad (A21)$$

The “cylindrical” fracture body shown in Figure A5a and the double-conical fracture body intersect each other at  $\sigma_1 = S \cdot R_{\parallel}^t$  and  $\sigma_1 = S \cdot (-R_{\parallel}^c)$  in two sections which are vertical with respect to the  $\sigma_1$  axis. The validity of the cylindrical fracture body extends from the coordinates origin as far as these intersection planes. The conical circumferential surfaces of the double-conical fracture body for IFF as shown in Figure A5b are valid in the range between the intersection planes and the planes at  $\sigma_1 = R_{\parallel}^t$  and  $\sigma_1 = -R_{\parallel}^c$  which are vertical to the  $\sigma_1$  axis and assigned to FF.

**Derivation of the formulae required for calculating  $f_S^L$**

Calculation of the desired stretch factor  $f_S^L$  for the load-determined stresses  $\sigma_1^L, \sigma_2^L, \tau_{21}^L$  – from the geometrical point of view – requires determination of the point where the resulting fracture vector  $\{\sigma\}_{fr}$  makes contact with the valid range of the surface of the  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$  fracture body for IFF (Figure A5c). The resulting fracture vector  $\{\sigma\}_{fr}$  comes from the “geometrical sum” of the residual stress vector  $\{\sigma\}^r$  and the load stress vector  $\{\sigma\}^L$  elongated (stretched) by the factor  $f_S^L$ . The shape of the  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$  fracture body as shown in Figure A5c and the requirement that the load-determined vector  $\{\sigma\}^L$  may only be stretched in its specified direction means that there is only one possible point of contact between  $\{\sigma\}_{fr}$  and the surface of the fracture body. In most cases this point of contact will be located on the cylindrical or conical part of the circumferential surface applicable to IFF. It can, however, also be located on one of the two “end faces” which are valid for FF.

Into the fracture conditions for IFF – Equations (A10) to (A12) – the same weakening factor  $\eta_{w1}(\sigma_1)$  is introduced with the strengths  $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\perp\parallel}$ . Using the symbol  $f_{E_1}$  for the IFF stress exposure with weakening due to  $\sigma_1$  we therefore have as *fracture condition* with weakening:

$$f_{E_1}(\sigma_2, \tau_{21}, \sigma_1) = \frac{f_{E_0}(\sigma_2, \tau_{21})}{\eta_{w1}(\sigma_1)} = 1 \quad (A19)$$

$$\text{or also } f_{E_0}(\sigma_2, \tau_{21}) = \eta_{w1}(\sigma_1) \quad (A19a)$$

For the three IFF modes this therefore yields:

for mode A

$$\frac{1}{R_{\perp\parallel}} \left[ \sqrt{\left( \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\perp}^t} - p_{\perp\parallel}^t \right)^2 \sigma_2^2 + \tau_{21}^2 + p_{\perp\parallel}^t \sigma_2} \right] = \eta_{w1}(\sigma_1) \quad (A20)$$

for mode B

$$\frac{1}{R_{\perp\parallel}} \left( \sqrt{\tau_{21}^2 + (p_{\perp\parallel}^c \sigma_2)^2} + p_{\perp\parallel}^c \sigma_2 \right) = \eta_{w1}(\sigma_1) \quad (A21)$$



für ZFB-Modus C

$$\frac{\tau_{21}^2}{4(R_{\perp\parallel} + p_{\perp\parallel}^c R_{\perp\perp}^A)^2} \cdot \frac{(-R_{\perp}^c)}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{(-R_{\perp}^c)} = \eta_{w1}(\sigma_1) \quad (\text{A22})$$

$$\text{mit } \eta_{w1}(\sigma_1) = \eta_{w1_0} - \eta'_{w1} \cdot \frac{\sigma_1}{(\sigma_1)_{fr}}$$

$$\text{wobei } (\sigma_1)_{fr} = R_{\parallel}^t \text{ für } \sigma_1 > 0$$

$$\text{und } (\sigma_1)_{fr} = -R_{\parallel}^c \text{ für } \sigma_1 < 0$$

Die Gültigkeitsbereiche der Bruchbedingungen (A20) bis (A22) sind die gleichen wie die der Gleichungen (A10) bis (A12), siehe auch Tabelle A2.

In den Gleichungen (A20) bis (A22) sind  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  die *Spannungen an der Bruchgrenze*.

Die in den Gleichungen (A20) bis (A22) enthaltenen Festigkeiten  $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\perp\parallel}$  sind die „ungeschwächten“ Festigkeiten. Für die in den Gleichungen (A20) bis (A22) vorkommenden Spannungen ( $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ ) setzt man die zum Berührungspunkt des resultierenden *Bruchvektors*  $\{\sigma\}_{fr} = \{\sigma\}^r + f_S^L \{\sigma\}^L$  gehörenden Spannungskomponenten ein:

$$\sigma_1 = \sigma_1^r + f_S^L \sigma_1^L \quad (\text{A23})$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^r + f_S^L \sigma_2^L \quad (\text{A24})$$

$$\tau_{21} = \tau_{21}^r + f_S^L \tau_{21}^L \quad (\text{A25})$$

Dadurch erhält man Gleichungen, in denen als einzige Unbekannte der gesuchte Streckungsfaktor  $f_S^L$  der lastbedingten Spannungen enthalten ist. Durch zweckmäßige Umformungen, zu denen insbesondere das Beseitigen von Wurzelausdrücken gehört, gelangt man für jeden der Modi A, B, C zu einer quadratischen Gleichung für  $f_S^L$ , auf die man die bekannte Lösungsformel

$$f_S^L = \frac{1}{2q} (\sqrt{l^2 - 4qc} - l) \quad (\text{A26})$$

anwenden kann.

Die Größen  $q$  und  $l$  sind die Koeffizienten der quadratischen Terme bzw. der linearen Terme von  $f_S^L$ , und in  $c$  sind die jeweiligen von  $f_S^L$  unabhängigen (konstanten) Terme zusammengefasst. In der Tabelle A1 sind die Größen  $q, l$  und  $c$  jeweils für die ZFB-Modi A, B, C zusammengestellt.

### Rechengang zur Ermittlung von $f_S^L$ und Ergebnisbewertung

Die Ausgangssituation bei dieser Aufgabe ist im Allgemeinen die folgende: Beim Bauteilentwurf ist ein Laminat entstanden, bei dem die Faserrichtungen und

for mode C

$$\frac{\tau_{21}^2}{4(R_{\perp\parallel} + p_{\perp\parallel}^c R_{\perp\perp}^A)^2} \cdot \frac{(-R_{\perp}^c)}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{(-R_{\perp}^c)} = \eta_{w1}(\sigma_1) \quad (\text{A22})$$

$$\text{with } \eta_{w1}(\sigma_1) = \eta_{w1_0} - \eta'_{w1} \cdot \frac{\sigma_1}{(\sigma_1)_{fr}}$$

$$\text{where } (\sigma_1)_{fr} = R_{\parallel}^t \text{ for } \sigma_1 > 0$$

$$\text{and } (\sigma_1)_{fr} = -R_{\parallel}^c \text{ for } \sigma_1 < 0$$

The validity ranges of fracture conditions (A20) to (A22) are the same as those for Equations (A10) to (A12), see also Table A2.

In the Equations (A20) to (A22) the stresses  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  are the *stresses at the fracture limit*.

The strengths  $R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\perp\parallel}$  appearing in Equations (A20) to (A22) are the “unweakened” strengths. For the stresses ( $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ ) occurring in Equations (A20) to (A22) we use the stress components corresponding to the contact point of the resultant *fracture vector*  $\{\sigma\}_{fr} = \{\sigma\}^r + f_S^L \{\sigma\}^L$ :

$$\sigma_1 = \sigma_1^r + f_S^L \sigma_1^L \quad (\text{A23})$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^r + f_S^L \sigma_2^L \quad (\text{A24})$$

$$\tau_{21} = \tau_{21}^r + f_S^L \tau_{21}^L \quad (\text{A25})$$

In this way we obtain equations whose only unknown is the desired stretch factor  $f_S^L$  of the load-determined stresses. After necessary reformulation, which in particular includes the removal of the root expressions, we obtain for each of the modes A, B, C a quadratic equation for  $f_S^L$  to which can be applied the known solution formula:

$$f_S^L = \frac{1}{2q} (\sqrt{l^2 - 4qc} - l) \quad (\text{A26})$$

Quantities  $q$  and  $l$  are the coefficients of the quadratic terms or of the linear terms of  $f_S^L$ , and in  $c$  are grouped the corresponding (constant) terms which are independent of  $f_S^L$ . Table A1 shows quantities  $q, l$  and  $c$  in each case for IFF modes A, B and C.

### Procedure for calculating $f_S^L$ and evaluation of results

With this task the starting situation is generally the following: The component design process came up with a laminate whereby specification of fibre orien-

Tabelle A1. Terme der Gleichung (A26) zur Berechnung von  $f_S^L$

Table A1. Terms of Equation (A26) for the calculation of  $f_S^L$

ZFB-Modus IFF mode	Terme der Gleichung (A26) zur Berechnung von $f_S^L$ Terms of Equation (A26) for the calculation of $f_S^L$	
<b>A</b>	$q_A = \frac{(\tau_{21}^L)^2}{R_{\perp\parallel}^2} - \frac{2p_{\perp\parallel}^L \eta'_{w1} \sigma_1^L \sigma_2^L}{R_{\perp\parallel}(\sigma_1)_{fr}} + \left(1 - \frac{2p_{\perp\parallel}^L R_{\perp\parallel}^L}{R_{\perp\parallel}^L}\right) \cdot \frac{(\sigma_2^L)^2}{(R_{\perp\parallel}^L)^2} - \frac{(\eta'_{w1})^2 (\sigma_1^L)^2}{(\sigma_1)_{fr}^2}$ $l_A = -\frac{2p_{\perp\parallel}^L \eta'_{w1} \sigma_1^L \sigma_2^L}{R_{\perp\parallel}(\sigma_1)_{fr}} + \frac{2p_{\perp\parallel}^L \sigma_2^L}{R_{\perp\parallel}^L} \left( \eta_{w1_0} - \eta'_{w1} \cdot \frac{\sigma_1^L}{(\sigma_1)_{fr}} \right) + \frac{2\sigma_2^L \sigma_2^L}{(R_{\perp\parallel}^L)^2} \cdot \left(1 - \frac{2p_{\perp\parallel}^L R_{\perp\parallel}^L}{R_{\perp\parallel}^L}\right) + \frac{2\eta'_{w1} \sigma_1^L}{(\sigma_1)_{fr}} \cdot \left( \eta_{w1_0} - \eta'_{w1} \cdot \frac{\sigma_1^L}{(\sigma_1)_{fr}} \right) + \frac{2\tau_{21}^L \tau_{21}^L}{R_{\perp\parallel}^2}$ $c_A = \left(1 - \frac{2p_{\perp\parallel}^L R_{\perp\parallel}^L}{R_{\perp\parallel}^L}\right) \cdot \frac{(\sigma_2^L)^2}{(R_{\perp\parallel}^L)^2} - \left( \eta_{w1_0} - \eta'_{w1} \cdot \frac{\sigma_1^L}{(\sigma_1)_{fr}} \right)^2 + \frac{(\tau_{21}^L)^2}{R_{\perp\parallel}^2} + \frac{2p_{\perp\parallel}^L \sigma_2^L}{R_{\perp\parallel}^L} \cdot \left( \eta_{w1_0} - \eta'_{w1} \cdot \frac{\sigma_1^L}{(\sigma_1)_{fr}} \right)$	
<b>B</b>	$q_B = \frac{(\tau_{21}^L)^2}{R_{\perp\parallel}^2} - \frac{2p_{\perp\parallel}^c \eta'_{w1} \sigma_1^L \sigma_2^L}{R_{\perp\parallel}(\sigma_1)_{fr}} - \frac{(\eta'_{w1})^2 (\sigma_2^L)^2}{(\sigma_1)_{fr}^2}$ $l_B = \frac{2\tau_{21}^L \tau_{21}^L}{R_{\perp\parallel}^2} - \frac{2p_{\perp\parallel}^c \eta'_{w1} \sigma_1^L \sigma_2^L}{R_{\perp\parallel}(\sigma_1)_{fr}} + \frac{2p_{\perp\parallel}^c \sigma_2^L}{R_{\perp\parallel}^L} \cdot \left( \eta_{w1_0} - \eta'_{w1} \cdot \frac{\sigma_1^L}{(\sigma_1)_{fr}} \right) + \frac{2\eta'_{w1} \sigma_1^L}{(\sigma_1)_{fr}} \cdot \left( \eta_{w1_0} - \eta'_{w1} \cdot \frac{\sigma_1^L}{(\sigma_1)_{fr}} \right)$ $c_B = \frac{(\tau_{21}^L)^2}{R_{\perp\parallel}^2} - \left( \eta_{w1_0} - \eta'_{w1} \cdot \frac{\sigma_1^L}{(\sigma_1)_{fr}} \right)^2 + \frac{2p_{\perp\parallel}^c \sigma_2^L}{R_{\perp\parallel}^L} \cdot \left( \eta_{w1_0} - \eta'_{w1} \cdot \frac{\sigma_1^L}{(\sigma_1)_{fr}} \right)$	
<b>C</b>	$q_C = \frac{1}{4} \cdot \frac{(\tau_{21}^L)^2}{(R_{\perp\parallel} + p_{\perp\parallel}^c R_{\perp\parallel}^A)^2} + \frac{(\sigma_2^L)^2}{(R_{\perp\parallel}^c)^2} - \frac{\eta'_{w1} \sigma_1^L \sigma_2^L}{R_{\perp\parallel}^c (\sigma_1)_{fr}}$ $l_C = \frac{\tau_{21}^L \tau_{21}^L}{2(R_{\perp\parallel} + p_{\perp\parallel}^c R_{\perp\parallel}^A)^2} - \frac{\eta'_{w1} \sigma_1^L \sigma_2^L}{R_{\perp\parallel}^c (\sigma_1)_{fr}} - \frac{\eta'_{w1} \sigma_1^L \sigma_2^L}{R_{\perp\parallel}^c (\sigma_1)_{fr}} + \frac{\eta_{w1_0} \sigma_2^L}{R_{\perp\parallel}^c} + \frac{2\sigma_2^L \sigma_2^L}{(R_{\perp\parallel}^c)^2}$ $c_C = \frac{1}{4} \cdot \frac{(\tau_{21}^L)^2}{(R_{\perp\parallel} + p_{\perp\parallel}^c R_{\perp\parallel}^A)^2} + \frac{\eta_{w1_0} \sigma_2^L}{R_{\perp\parallel}^c} + \frac{(\sigma_2^L)^2}{(R_{\perp\parallel}^c)^2} - \frac{\eta'_{w1} \sigma_2^L \sigma_1^L}{R_{\perp\parallel}^c (\sigma_1)_{fr}}$	<p>Wegen der Parameterkopplung <math>p_{\perp\parallel}^c \cdot R_{\perp\parallel} = p_{\perp\parallel}^c \cdot R_{\perp\parallel}^A</math> nach Gleichung (A13) muss <math>R_{\perp\parallel}^A</math> nach Gleichung (48) berechnet werden:</p> <p>Because of the parameter coupling <math>p_{\perp\parallel}^c \cdot R_{\perp\parallel} = p_{\perp\parallel}^c \cdot R_{\perp\parallel}^A</math> according to Equation (A13) <math>R_{\perp\parallel}^A</math> needs to be calculated using Equation (48):</p> $R_{\perp\parallel}^A = \frac{R_{\perp\parallel}}{2p_{\perp\parallel}^c} \left( \sqrt{1 + 2p_{\perp\parallel}^c \frac{R_{\perp\parallel}^c}{R_{\perp\parallel}}} - 1 \right)$
$(\sigma_1)_{fr}$	$(\sigma_1)_{fr} = R_{\perp\parallel}^L$ für $\sigma_1 > 0$ $(\sigma_1)_{fr} = -R_{\perp\parallel}^c$ für $\sigma_1 < 0$	$(\sigma_1)_{fr} = R_{\perp\parallel}^L$ für $\sigma_1 > 0$ $(\sigma_1)_{fr} = -R_{\perp\parallel}^c$ für $\sigma_1 < 0$
	<p>Die Beziehungen der Tabelle A1 können auch für die Berechnung von <math>f_S^L</math> ohne <math>\sigma_1</math>-Einfluss benutzt werden, indem <math>\eta_{w1_0} = 1,0</math> und <math>\eta'_{w1} = 0</math> gesetzt wird.</p> <p>The relations given in Table A1 are also suitable for the calculation of <math>f_S^L</math> without influence of <math>\sigma_1</math> by setting <math>\eta_{w1_0} = 1,0</math> and <math>\eta'_{w1} = 0</math>.</p>	

Tabelle A2. Gültigkeitsbereich der Gleichungen für ZFB-Modus A, B, C

Table A2. Range of validity of the equations for IFF modes A, B, C

ZFB-Modus IFF mode	Gültigkeitsbereich Range of validity
A	$\sigma_2^L + f_{SA}^L \cdot \sigma_2^L \geq 0$
B	$\sigma_2^L + f_{SB}^L \cdot \sigma_2^L < 0$ und/and $0 \leq \left  \frac{\sigma_2^L + f_{SB}^L \cdot \sigma_2^L}{\tau_{21}^L + f_{SB}^L \cdot \tau_{21}^L} \right  \leq \frac{R_{\perp\parallel}^A}{ \tau_{21c}^L }$
C	$\sigma_2^L + f_{SC}^L \cdot \sigma_2^L < 0$ und/and $0 \leq \left  \frac{\tau_{21}^L + f_{SC}^L \cdot \tau_{21}^L}{\sigma_2^L + f_{SC}^L \cdot \sigma_2^L} \right  \leq \frac{ \tau_{21c}^L }{R_{\perp\parallel}^A}$
	<p>mit <math>\tau_{21c}^L = R_{\perp\parallel} \cdot \sqrt{1 + 2p_{\perp\parallel}^c}</math> (<math>p_{\perp\parallel}^c</math> nach Gleichung (A13) und <math>R_{\perp\parallel}^A</math> nach Gleichung (48))</p> <p>with <math>\tau_{21c}^L = R_{\perp\parallel} \cdot \sqrt{1 + 2p_{\perp\parallel}^c}</math> (<math>p_{\perp\parallel}^c</math> according to Equation (A13) and <math>R_{\perp\parallel}^A</math> according to Equation (48))</p>

Fasermengen, möglicherweise mit Hilfe der Netztheorie nach Abschnitt 5.1.1 und einer vereinfachten schichtenweisen Bruchanalyse nach Abschnitt 5.2.5 soweit gewählt worden sind, dass nun eine Verbesserung des Laminataufbaus im Hinblick auf eine Vergleichmäßigung der „Sicherheit“ gegen ZFB in den einzelnen Schichten vorgenommen werden sollte. Die dabei zu betrachtenden lastbedingten Spannungen beziehen sich meistens auf eine im Betrieb des Bauteils zu erwartende höchste Belastung. Bei dieser Höchstbelastung soll noch ein Sicherheitsabstand gegenüber ZFB vorhanden sein (z.B. [DNV03]) und im Allgemeinen ein größerer Sicherheitsabstand gegen FB. Beim Vorhandensein beträchtlicher Eigenspannungen kann man aus errechneten Anstrengungswerten  $f_{E_1}$  keine sinnvollen Rückschlüsse auf diese Sicherheitsabstände der einzelnen Schichten ziehen, wohl aber aus den Streckungsfaktoren  $f_S^L$  der lastbedingten Spannungen.

Es erscheint ratsam, bevor man mit der Bestimmung von  $f_S^L$  bezüglich ZFB beginnt, zu klären, ob in der betrachteten Schicht überhaupt ein ZFB eintreten kann oder ob statt eines ZFB als erstes ein FB auftritt.

Aus der einfachen FB-Bedingung nach Gleichung (42) folgt, dass allein die Spannung  $\sigma_1$  für den FB verantwortlich ist. Bei FB ist

$$f_{E(\text{FF})} = \frac{\sigma_1}{(\sigma_1)_{\text{fr}}} = \frac{\sigma_1^r + f_{S(\text{FF})}^L \cdot \sigma_1^L}{(\sigma_1)_{\text{fr}}} = 1 \quad (\text{A27})$$

mit  $(\sigma_1)_{\text{fr}} = R_{\parallel}^t$  für  $\sigma_1 > 0$

und  $(\sigma_1)_{\text{fr}} = -R_{\parallel}^c$  für  $\sigma_1 < 0$

$f_{S(\text{FF})}^L$  ist der Streckungsfaktor der lastbedingten Spannungen *bezüglich FB*.

Wenn  $\sigma_1^r$  und  $\sigma_1^L$  das gleiche Vorzeichen haben, kann  $\sigma_1 = \sigma_1^r + f_{S(\text{FF})}^L \cdot \sigma_1^L$  auch nur das gleiche Vorzeichen haben. Bei ungleichen Vorzeichen von  $\sigma_1^r$  und  $\sigma_1^L$  darf vorausgesetzt werden, dass  $\sigma_1^r$  alleine noch keinen FB verursacht. Ein FB alleine durch  $\sigma_1^L$  darf nämlich gar nicht zugelassen werden und wird schon durch die Vordimensionierung ausgeschlossen. Tritt zu  $\sigma_1^r$  eine Spannung  $\sigma_1^L$  mit anderem Vorzeichen hinzu, so wirkt diese bei ihrem Anwachsen zunächst der Eigenspannung  $\sigma_1^r$  entgegen. Erst wenn nach dem „Auslöschen“ von  $\sigma_1^r$  die resultierende Spannung  $\sigma_1$  mit dem gleichen Vorzeichen wie  $\sigma_1^L$  bis zur FB-Grenze bei  $\sigma_1 = (\sigma_1)_{\text{fr}}$  anwächst, tritt schließlich der FB ein. Infolgedessen kann man die Entscheidung über die zu benutzende Größe  $(\sigma_1)_{\text{fr}}$  in Gleichung (A27) folgendermaßen treffen:

tations and fibre quantities has been brought to a stage (possibly with the aid of the network theory in Section 5.1.1 and a simplified lamina-by-lamina fracture analysis as described in Section 5.2.5) whereby the next step is to try to improve the laminate structure with regard to homogenizing the “safety” to IFF in the individual laminae. The load-determined stresses which need to be taken into account here in most cases relate to the maximum loading to be expected when the component is in service. With this maximum loading an addition safety margin with respect to IFF is to be provided (e.g. [DNV03]) and generally a larger safety margin with respect to FF. When considerable residual stresses are present, it is not possible on the basis of calculated stress exposure values  $f_{E_1}$  to come to any useful conclusions regarding these safety margins for the individual lamina, instead this is entirely possible on the basis of the stretch factors  $f_S^L$  of the load-determined stresses.

Before commencing with determining  $f_S^L$  with regard to IFF, it appears to be advisable to clarify whether an IFF can even occur in the lamina under consideration or whether a FF will appear first instead of an IFF.

From the simple FF condition given in Equation (42) it follows that it is solely stress  $\sigma_1$  which is responsible for the FF. At FF:

$$f_{E(\text{FF})} = \frac{\sigma_1}{(\sigma_1)_{\text{fr}}} = \frac{\sigma_1^r + f_{S(\text{FF})}^L \cdot \sigma_1^L}{(\sigma_1)_{\text{fr}}} = 1 \quad (\text{A27})$$

where  $(\sigma_1)_{\text{fr}} = R_{\parallel}^t$  for  $\sigma_1 > 0$

and  $(\sigma_1)_{\text{fr}} = -R_{\parallel}^c$  for  $\sigma_1 < 0$

$f_{S(\text{FF})}^L$  is the stretch factor of the load-determined stresses *with regard to FF*.

If  $\sigma_1^r$  and  $\sigma_1^L$  have the same sign,  $\sigma_1 = \sigma_1^r + f_{S(\text{FF})}^L \cdot \sigma_1^L$  can also only have the same sign. If  $\sigma_1^r$  and  $\sigma_1^L$  have different signs, it can be assumed that  $\sigma_1^r$  alone will not yet cause a FF. This is because an FF due solely to  $\sigma_1^r$  must not even be permitted and will have already been ruled out by the designer’s predimensioning. Should a stress  $\sigma_1^L$  with a different sign appear in addition to  $\sigma_1^r$ , then as it increases it will initially work in opposition to the residual stress  $\sigma_1^r$ . Not until after the “disappearance” of  $\sigma_1^r$  will the resulting stress  $\sigma_1$  increase with the same sign as  $\sigma_1^L$  until the FF limit at  $\sigma_1 = (\sigma_1)_{\text{fr}}$  is reached and FF finally occurs. Consequently the decision regarding the quantity  $(\sigma_1)_{\text{fr}}$  to be used in Equation (A27) can be made as follows:

$$(\sigma_1)_{fr} = R_{||}^t \text{ für } \sigma_1^L > 0 \quad (A28)$$

$$(\sigma_1)_{fr} = -R_{||}^c \text{ für } \sigma_1^L < 0$$

$f_{S(FF)}^L$  ergibt sich damit aus Gleichung (A27) und Gleichung (A28) zu

$$f_{S(FF)}^L = \frac{(\sigma_1)_{fr} - \sigma_1^r}{\sigma_1^L} \quad (A29)$$

Die drei Komponenten  $\sigma_1^L$ ,  $\sigma_2^L$ ,  $\tau_{21}^L$  des lastbedingten Spannungsvektors werden alle mit dem gleichen Streckungsfaktor gestreckt. Bei Erreichen der FB-Grenze haben die resultierenden Spannungen folglich die Höhe

$$\sigma_1 = \sigma_1^r + f_{S(FF)}^L \sigma_1^L \quad (A30)$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^r + f_{S(FF)}^L \sigma_2^L \quad (A31)$$

$$\tau_{21} = \tau_{21}^r + f_{S(FF)}^L \tau_{21}^L \quad (A32)$$

An Hand dieser Spannungen wird geprüft, ob der Berührungspunkt des resultierenden Spannungsvektors (bei  $\sigma_1 = R_{||}^t$  oder  $\sigma_1 = -R_{||}^c$ ) innerhalb oder außerhalb der Konturlinie der Bruchkörper-Stirnfläche nach Bild A5c liegt. Diese Konturlinie ist die Durchdringungslinie der konischen Mantelfläche für ZFB mit der FB-Ebene. Sie ist eine mit dem an der FB-Grenze gültigen minimalen Schwächungsfaktor  $\eta_{w1} = M$  geometrisch ähnlich verkleinerte  $(\sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkurve für ZFB.

Mit den an der FB-Grenze errechneten Spannungen  $\sigma_2$  und  $\tau_{21}$  nach Gleichung (A31) und Gleichung (A32) und  $\eta_{w1} = M$  berechnet sich die ZFB-Anstrengung mit  $\sigma_1$ -Einfluss aus

$$f_{E_1} = \frac{f_{E_0}}{\eta_{w1}} = \frac{f_{E_0}}{M} \quad (A33)$$

und zwar mit der für den vorliegenden Spannungszustand gültigen Gleichung für ZFB-Modus A, B oder C (siehe Gleichungen (A10) bis (A12)).

Wäre das Ergebnis aus Gleichung (A33)  $f_{E_1} = 1$ , läge der Berührungspunkt genau auf der ZFB-Kurve, gleichzeitig aber auch in der Ebene für FB. Theoretisch würde deshalb sowohl ZFB als gleichzeitig auch FB eintreten. Ist das Ergebnis  $f_{E_1} < 1$ , tritt der Vektor durch die FB-Ebene ohne vorher eine ZFB-Mantelfläche zu berühren, das heißt es lässt sich für ZFB kein  $f_S^L$ -Wert berechnen.

Ergibt sich  $f_{E_1} > 1$  heißt dies, dass der Vektor die ZFB-Mantelfläche durchstoßen muss, bevor er die FB-Grenze erreicht. In diesem Fall wird  $f_S^L$  für ZFB

$$(\sigma_1)_{fr} = R_{||}^t \text{ for } \sigma_1^L > 0 \quad (A28)$$

$$(\sigma_1)_{fr} = -R_{||}^c \text{ for } \sigma_1^L < 0$$

$f_{S(FF)}^L$  is thus obtained from Equation (A27) and Equation (A28):

$$f_{S(FF)}^L = \frac{(\sigma_1)_{fr} - \sigma_1^r}{\sigma_1^L} \quad (A29)$$

The three components  $\sigma_1^L$ ,  $\sigma_2^L$ ,  $\tau_{21}^L$  of the load-determined stress vector are all increased by the same stretch factor. Once the FF limit is reached, the resulting stresses will therefore have these magnitudes:

$$\sigma_1 = \sigma_1^r + f_{S(FF)}^L \sigma_1^L \quad (A30)$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^r + f_{S(FF)}^L \sigma_2^L \quad (A31)$$

$$\tau_{21} = \tau_{21}^r + f_{S(FF)}^L \tau_{21}^L \quad (A32)$$

With the aid of these stresses a check is made as to whether the contact point of the resulting stress vector (at  $\sigma_1 = R_{||}^t$  or  $\sigma_1 = -R_{||}^c$ ) lies inside or outside the contour line of the fracture body's end face as shown in Figure A5c. This contour line is the intersection line of the conical circumferential surface for IFF and the FF plane. It is a reduced  $(\sigma_2, \tau_{21})$  fracture curve for IFF which is geometrically similar reduced by the minimum weakening factor  $\eta_{w1} = M$  valid at the FF limit.

With stresses  $\sigma_2$  and  $\tau_{21}$  calculated at the FF limit on the basis of Equation (A31) and Equation (A32) and  $\eta_{w1} = M$ , the IFF stress exposure with  $\sigma_1$  influence can be calculated from:

$$f_{E_1} = \frac{f_{E_0}}{\eta_{w1}} = \frac{f_{E_0}}{M} \quad (A33)$$

doing so with the equation for mode A, B or C which is valid for the stress state under consideration (see Equations (A10) to (A12)).

If the result  $f_{E_1} = 1$  were obtained from Equation (A33), the contact point would be located exactly on the IFF curve and also in the plane for FF. In theory this would therefore mean that both IFF and FF would occur simultaneously. If  $f_{E_1} < 1$  is the result, the vector passes through the FF plane without having previously touched an IFF circumferential surface – in other words, an  $f_S^L$  value cannot be calculated for IFF.

Should the result be  $f_{E_1} > 1$ , this means that the vector must pierce the IFF circumferential surface before it reaches the FF limit. In this case  $f_S^L$  is calculated

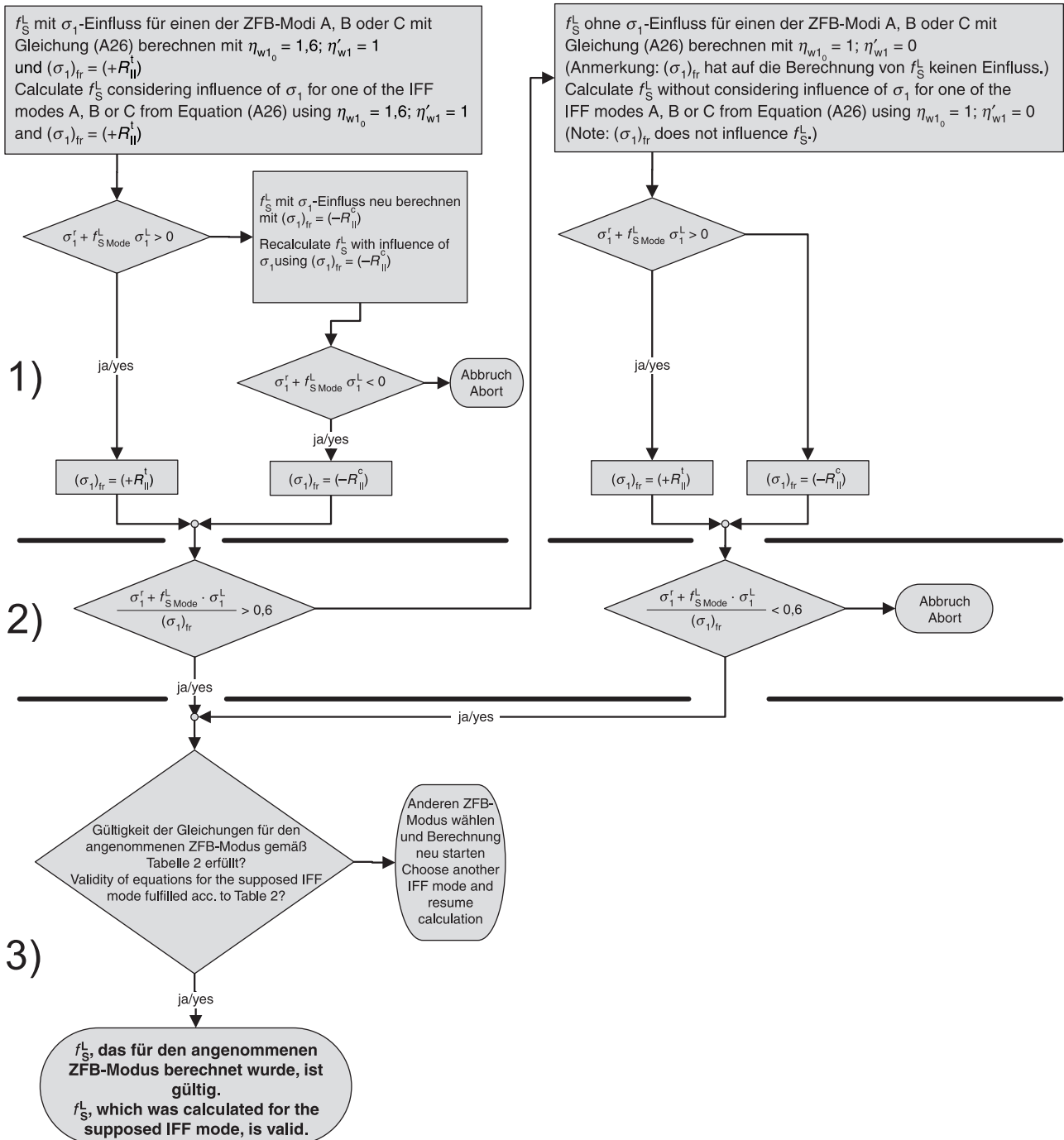


Bild A6. Im Zuge der Berechnung des Streckungsfaktors  $f_S^L$  für einen ZFB-Modus A, B oder C notwendige Prüfungen (Abfragen) zu folgenden Entscheidungen:

1. Gilt  $(\sigma_1)_{fr} = R_{II}^t$  oder  $(\sigma_1)_{fr} = -R_{II}^c$ ?
2. Ist ein schwächender  $\sigma_1$ -Einfluss bei den ZFB-Modi zu berücksichtigen oder nicht?
3. Liegt der Berührungspunkt mit der Bruchkörperoberfläche im Gültigkeitsbereich der Formeln für den angenommenen ZFB-Modus A, B oder C?

gemäß dem im Bild A6 gezeigten Flussdiagramm berechnet.

Statt der in diesem Flussdiagramm dargestellten Abfolge kann auch eine andere sinnvolle Reihenfolge der Rechenschritte und Abfragen gewählt werden. In jedem Fall läuft es auf ein Vorgehen hinaus, bei dem

Figure A6. Checks which have to be carried out during calculation of the stretch factor  $f_S^L$  for an IFF mode A, B or C in order to take the following decisions:

1. Is  $(\sigma_1)_{fr} = R_{II}^t$  or  $(\sigma_1)_{fr} = -R_{II}^c$  valid?
2. does the weakening influence of  $\sigma_1$  need to be considered for the IFF modes)?
3. does the contact point to the fracture body surface fall within the range of validity of the equations for the considered IFF-mode A, B or C?

for IFF using the procedure shown in the flow chart in Figure A6.

Instead of the sequence shown in this flow chart, the computational operations and inquiries could also be carried out in a different order. Whatever the case, it ends up to a procedure whereby arbitrary assump-

zunächst willkürliche Annahmen, z.B. über den zu erwartenden ZFB-Modus A, B oder C und  $(\sigma_1)_{fr} = R_{||}^t$  oder  $(\sigma_1)_{fr} = -R_{||}^c$  getroffen werden, ebenfalls eine Annahme darüber, ob bereits ein  $\sigma_1$ -Einfluss wirksam wird oder nicht. Anhand der erhaltenen Rechenergebnisse wird dann entschieden, ob die getroffenen Annahmen berechtigt waren. Wenn sich dies nicht bestätigt, wird  $f_S^L$  mit geänderten Annahmen neu berechnet.

Im Flussdiagramm Bild A6 wird so vorgegangen, dass jeweils die Untersuchung für einen gewählten ZFB-Modus A, B oder C bis zur Akzeptanz oder zum Verwerfen des Ergebnisses durchgezogen wird. Die letzte Prüfung besteht darin, zu kontrollieren, ob der errechnete Berührungspunkt überhaupt im Gültigkeitsbereich der zum betrachteten ZFB-Modus gehörenden Gleichungen liegt.

Wenn das Ergebnis für einen ZFB-Modus neben allen vorhergehenden Tests auch diesen letzten Test bestanden hat, ist dieses Ergebnis das richtige und einzige mögliche, weil es nur einen Berührungspunkt gibt.

Mit den Koordinaten  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$  dieses Berührungspunktes auf der Bruchkörperoberfläche muss sich für die ZFB-Anstrengung  $f_{E_1}$  nach Gleichung (A19) mit der jeweils gültigen Gleichung (A20), Gleichung (A21) oder Gleichung (A22) der Wert  $f_{E_1} = 1$  ergeben. Dies kann zu einer Kontrolle genutzt werden.

Wenn ein Wert für  $f_S^L$  errechnet wird, der kleiner als 1 ist, bedeutet dies, dass mit den in der Rechnung angesetzten vorhandenen Lastspannungen  $\sigma_1^L, \sigma_2^L, \tau_{21}^L$  die ZFB-Grenze bereits überschritten wurde!

**A3 Benutzen des in einem Rechenprogramm implementierten Tsai/Wu-Kriteriums zur Erlangung von ZFB- und FB-Ergebnissen nach Puck/Knaust**

Das Puck/Knaust- und das Tsai/Wu-Kriterium besitzen den gleichen mathematischen Aufbau in Form eines „Tensorpolynoms“. Deshalb braucht man bei einem implementierten Tsai/Wu-Kriterium nur einige Koeffizienten zu verändern, um die Ergebnisse des ZFB- oder des FB-Kriteriums nach *Puck/Knaust* zu erhalten, und zwar folgendermaßen:

Der Koeffizient  $2 \cdot F_{12} = 2 \cdot F_{13}$  beim Spannungsprodukt  $\sigma_1 \sigma_2$  bzw.  $\sigma_1 \sigma_3$  wird generell gleich Null gesetzt:

$$2 \cdot F_{12} = 2 \cdot F_{13} = 0 \tag{A34}$$

**Zur Erlangung der ZFB-Ergebnisse**

Für die Bestimmung der Koeffizienten  $F_{11}$  und  $F_1$  bei  $\sigma_1^2$  bzw.  $\sigma_1$  werden statt  $R_{||}$  die Werte für  $R_{||\text{IFF}}$  gemäß Gleichung (50) bis Gleichung (52) benutzt.

tions are made first (for example, about which mode is to be expected, A, B or C and  $(\sigma_1)_{fr} = R_{||}^t$  or  $(\sigma_1)_{fr} = -R_{||}^c$ ) as well as an assumption as to whether a  $\sigma_1$  influence is already becoming effective or not. A decision is then made on the basis of the computational results as to whether the assumptions made were justified. If this does not appear to be the case,  $f_S^L$  is recalculated using modified assumptions.

The procedure in the flow chart (Figure A6) is that in each case investigation is carried out for a selected mode A, B or C until the result is accepted or rejected. The final test is to check to see whether the calculated contact point actually falls within the range of validity of the equations associated with the mode under consideration.

If the result for a mode passes in addition to all preceding tests also this final one, this means that the result is the correct and only possible result, because only one contact point exists.

With the coordinates  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$  of this contact point on the fracture body surface, the value  $f_{E_1} = 1$  for the IFF stress exposure  $f_{E_1}$  must result from Equation (A19) when applying the relevant Equation (A20), Equation (A21) or Equation (A22). This can be used for checking purposes.

If a value is calculated for  $f_S^L$  which is  $< 1$ , this indicates that the IFF limit will have already been exceeded with the existing load stresses  $\sigma_1^L, \sigma_2^L, \tau_{21}^L$  used in the calculation!

**A3 Using the Tsai/Wu criterion implemented in a computer program in order to obtain IFF and FF results according to the Puck/Knaust criterion**

The Puck/Knaust and the Tsai/Wu criteria both have the same mathematical structure, namely that of a “tensor polynomial”. For this reason, when a Tsai/Wu criterion is implemented, only a few coefficients will need to be changed in order to obtain the results of the IFF or FF criterion according to *Puck/Knaust*. It is done in this way:

With the stress product  $\sigma_1 \sigma_2$  or  $\sigma_1 \sigma_3$ , the coefficient  $2 \cdot F_{12} = 2 \cdot F_{13}$  is generally set as equal to zero:

$$2 \cdot F_{12} = 2 \cdot F_{13} = 0 \tag{A34}$$

**To obtain the IFF results**

To determine the coefficients  $F_{11}$  and  $F_1$  for  $\sigma_1^2$  or  $\sigma_1$  respectively, the values for  $R_{||\text{IFF}}$  as per Equation (50) to Equation (52) are used instead of  $R_{||}$ .

Damit wird

$$F_{11} = \frac{1}{R_{\parallel \text{IFF}}^t R_{\parallel \text{IFF}}^c} \quad (\text{A35})$$

$$F_1 = \frac{1}{R_{\parallel \text{IFF}}^t} - \frac{1}{R_{\parallel \text{IFF}}^c} \quad (\text{A36})$$

Der Koeffizient  $F_{44}$  bei dem Spannungsquadrat  $\tau_{23}^2$  wird zu

$$F_{44} = \frac{3}{R_{\perp}^t R_{\perp}^c} \quad (\text{A37})$$

Dies bedeutet, dass die schwierig zu messende Quer/Quer-Schubfestigkeit mit Hilfe einer speziellen Bruchbedingung [Puc92a] aus der Quer-Zugfestigkeit  $R_{\perp}^t$  und Quer-Druckfestigkeit  $R_{\perp}^c$  berechnet wird:

$$R_{\perp\perp} = \sqrt{\frac{1}{3} R_{\perp}^t \cdot R_{\perp}^c} \quad (\text{A38})$$

Der Koeffizient  $2F_{23}$  beim Spannungsprodukt  $\sigma_2 \sigma_3$  ergibt sich damit als

$$2F_{23} = -\frac{1}{R_{\perp}^t \cdot R_{\perp}^c} \quad (\text{A39})$$

Die Koeffizienten  $F_{22} = F_{33}$  und  $F_2 = F_3$  sowie  $F_{55} = F_{66}$  bleiben wie bei Tsai/Wu.

Wenn man ein neues Ergebnis der wirkebenebezogenen Bruchkriterien einführt, verändert dies  $F_{44}$ :

$$F_{44} = \frac{1}{(R_{\perp}^t)^2} \quad (\text{A40})$$

Als Folge davon muss wegen der notwendigen Invarianz gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems um die  $x_1$ -Achse auch  $F_{23}$  geändert werden:

$$2F_{23} = -\frac{\frac{R_{\perp}^c}{R_{\perp}^t} - 2}{R_{\perp}^t \cdot R_{\perp}^c} \quad (\text{A41})$$

### Zur Erlangung der FB-Ergebnisse

Für die Untersuchung auf FB gibt man zur Festlegung der Koeffizienten  $F_{11}$  und  $F_1$  die FB-bestimmenden Werte  $R_{\parallel}^t$  und  $R_{\parallel}^c$  ein (wie auch beim Tsai/Wu-Kriterium üblich). Für die ZFB-bestimmenden Festigkeiten,  $R_{\perp}^t$ ,  $R_{\perp}^c$ ,  $R_{\parallel\parallel}$ ,  $R_{\perp\perp}$  setzt man jedoch unrealistisch hohe Werte (z.B.  $10^4 \text{ N/mm}^2$ ) an. Auf diese Weise erzielt man etwa die gleichen Ergebnisse wie mit der FB-Bedingung nach Gleichung (42).

**Achtung:** Der Zahlenwert (genannt „failure index“) der „linken Seite“ des Tsai/Wu-Kriteriums, die lineare und quadratische Spannungsterme enthält, stellt nicht die Anstrengung  $f_E$  dar. Diese errechnet sich nach Gleichung (44)!

This results in

$$F_{11} = \frac{1}{R_{\parallel \text{IFF}}^t R_{\parallel \text{IFF}}^c} \quad (\text{A35})$$

$$F_1 = \frac{1}{R_{\parallel \text{IFF}}^t} - \frac{1}{R_{\parallel \text{IFF}}^c} \quad (\text{A36})$$

With the square of the stress  $\tau_{23}^2$ , the coefficient  $F_{44}$  will then be

$$F_{44} = \frac{3}{R_{\perp}^t R_{\perp}^c} \quad (\text{A37})$$

This means that the hard-to-measure transverse/transverse shear strength is calculated from the transverse tensile strength  $R_{\perp}^t$  and the transverse compressive strength  $R_{\perp}^c$  with the aid of a special failure condition [Puc92a]:

$$R_{\perp\perp} = \sqrt{\frac{1}{3} R_{\perp}^t \cdot R_{\perp}^c} \quad (\text{A38})$$

With stress product  $\sigma_2 \sigma_3$  this results in coefficient  $2F_{23}$  being

$$2F_{23} = -\frac{1}{R_{\perp}^t \cdot R_{\perp}^c} \quad (\text{A39})$$

Coefficients  $F_{22} = F_{33}$  and  $F_2 = F_3$  as well as  $F_{55} = F_{66}$  remain the same as with Tsai/Wu.

Introducing a new result of the action-plane fracture criteria would lead to a change in  $F_{44}$ :

$$F_{44} = \frac{1}{(R_{\perp}^t)^2} \quad (\text{A40})$$

As a consequence because of the necessary invariance in respect to a rotation of the coordinate system around the  $x_1$ -axis also  $F_{23}$  has to be changed:

$$2F_{23} = -\frac{\frac{R_{\perp}^c}{R_{\perp}^t} - 2}{R_{\perp}^t \cdot R_{\perp}^c} \quad (\text{A41})$$

### To obtain the FF results

For the FF analysis, the values  $R_{\parallel}^t$  and  $R_{\parallel}^c$  which determine FF are input in order to determine the coefficients  $F_{11}$  and  $F_1$  (this is also the normal procedure with the Tsai/Wu criterion). However, unrealistically high values ( $10^4 \text{ N/mm}^2$ , for example) are used for the resistances  $R_{\perp}^t$ ,  $R_{\perp}^c$ ,  $R_{\parallel\parallel}$ ,  $R_{\perp\perp}$  which determine IFF. In this way approximately the same results may be obtained as from the FF condition in accordance with Equation (42).

**Important:** The numerical value (known as the “failure index“) of the left-hand side of the Tsai/Wu criterion which contains linear and quadratic stress terms, does not represent the stress exposure  $f_E$ . This is calculated using Equation (44)!