

# **Auslegung von Bauteilen aus Faserverbundwerkstoff**

**Theorie  
und  
Praxis**

**von  
R. Cuntze**

## Vorwort

Entwurf und Berechnung faserverstärkter Konstruktionen stellen Anforderungen an den Ingenieur, die erheblich umfassender sind als man es von Ausführungen mit konventionellen Baustoffen her gewohnt ist.

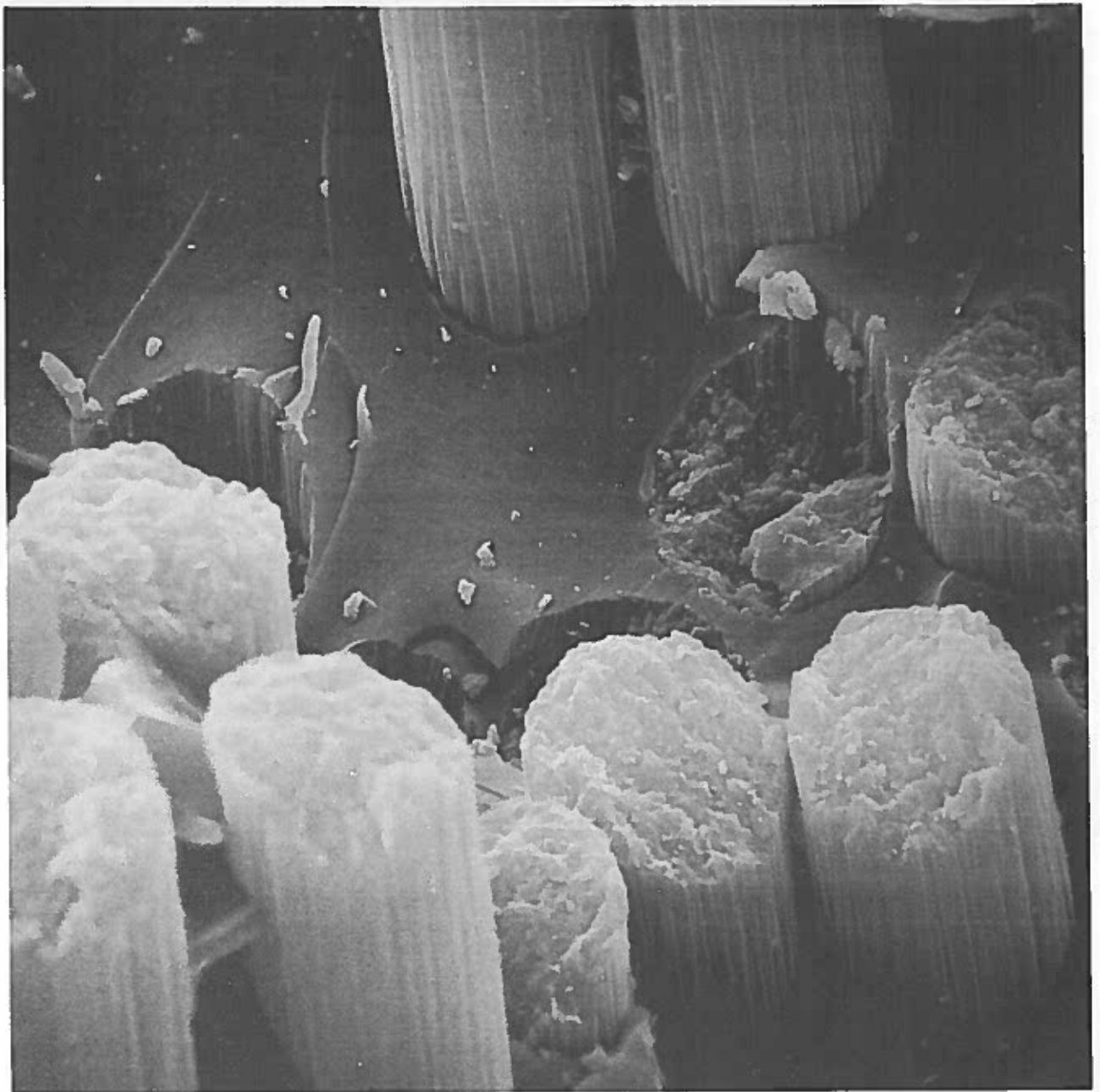
Die Arbeit des Ingenieurs wird weiterhin dadurch erschwert, daß die technische Literatur bisher keine entsprechende Unterlagen aufweist, die die Faserverbundauslegung einigermaßen vollständig behandelt. Es ist deshalb das spezielle Ziel dieses Werkes, hier eine Lücke zu schließen. Dabei erscheint es dem Verfasser als besonders vordringlich, dem Leser ein Beurteilungsvermögen für die von der Werkstoffseite und der Fertigung gelieferten Faser-Verbundgrößen zu vermitteln. Um den Rahmen dieser Zielsetzung nicht unnötig anwachsen zu lassen, erfolgt werkstoffseitig die Hauptausrichtung auf Kohlenstoffaserverbund. Die Ausführung der Kapitel elastizitätstheoretischen Inhalts gestaltet sich je nach Bedarf in tensorieller oder Matrizen-Schreibweise.

Die vorliegende Arbeit stützt sich auf ein Gerüst vieler, verstreuter, größerer und kleinerer Veröffentlichungen. Ihre Ergänzung und Verschmelzung mit Ausarbeitungen des Verfassers erfolgte unter dem Blickwinkel: Über was alles sollte der Festigkeitsingenieur bei der Auslegung Bescheid wissen? Dieser Blickwinkel scheint vielleicht beim Lesen einiger Kapitel - z.B. Wickeltechnik - zu groß sein. Er ist aber nach den Erfahrungen des Verfassers unbedingt notwendig, weil, wie die Praxis zeigt, allein gute Kenntnis der Zusammenhänge ein schnelles Auffinden von Fehlern gewährleistet. Das gilt besonders für faserverstärkte Konstruktionen.

Beim Lesen der Korrekturen halfen die Herren Hans Thiem, Wolfgang Kreß, Uwe Kolberg und Günther Sprau. Die Anfertigung vieler Abbildungsvorlagen besorgte Frau Vera Schrot, das oftmalige Manuskriptschreiben hauptsächlich die Ehefrau des Verfassers.

Zum Schluß dankt der Verfasser der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg AG für die Übernahme der Vervielfältigungsarbeiten des Buchmanuskriptes.

Dachau, im Dezember 1975



## FASERVERBUND

(V 4250:1)

## Inhaltsverzeichnis

Aufstellung der verwendeten Symbole	VIII bis XV
1. Einleitung	1-1 bis 8
2. Der Verbund und die Merkmale seiner Komponenten	2-1 bis 30
2.1. Fasern	
2.1.1. Glasfasern	
2.1.2. Borfasern	
2.1.3. Kohlenstofffasern (Carbonfasern)	
2.1.4. Kevlarfasern	
2.1.5. Sonstige Fasern	
2.2. Matrix (Bettungsmasse)	8
2.2.1. Allgemeines	
2.2.2. Kunstharztypen	
2.2.3. Reaktionsmittel	
2.2.4. Einige Bemerkungen zum Einsatz von Harzsystemen	
2.3. Grenzschicht und Fadenbeschichtung	11
2.4. Verbund	12
2.4.1. Allgemeines	
2.4.2. Spezifische Größen der Verbundwerkstoffe	
2.4.3. Einflußgrößen auf den Verbund	
2.4.4. Einige rechnerische Verbundgrößen	
3. Herstellung von Verbundbauteilen	3-1 bis 39
3.1. Verstärkungsmaterialien	1
3.1.1. Rovings	
3.1.2. Gewebe	
3.1.3. Matten	
3.2. Verarbeitungsarten	3
3.2.1. Trockene Verarbeitung	
3.2.2. Nasse Verarbeitung	
3.3. Faserverarbeitungsverfahren	4
3.3.1. Verfahren für niedrig beanspruchte Bauteile	
3.3.2. Wickelverfahren	
3.4. Herstellungszubehör für Wickelverfahren	7
3.4.1. Kerne	
3.4.2. Liner	

3.5. Einzelheiten der Wickeltechnik	11
3.5.1. Wickelbare Bauteilformen	
3.5.2. Wickelbedingungen	
3.5.3. Bandbreite, Lagenanzahlen und Wandstärke	
3.5.4. Wickelmuster	
3.5.5. Wickelspannung und ihre Folgen	
3.6. Verarbeitung und Härtung	22
4. Geometrisch lineare Theorien des Faserverbundes	4-1 bis 103
4.1. Allgemeiner Körperträger	1
4.1.1. Verzerrungstensor	
4.1.2. Spannungstensor	
4.1.3. Physikalische Komponenten	
4.1.4. Gleichgewichtsbedingungen	
4.2. Spezielle Körperträger	9
4.2.1. Rotationskörper mit einer Achse	
4.2.2. Kartesischer Körper	
4.2.3. Kugel	
4.3. Allgemeiner Flächenträger	14
4.3.1. Zusammenhang Geometrie Schale mit Geometrie Raum	
4.3.2. Grundformen der Flächentheorie	
4.3.3. Verzerrungstensor unter Berücksichtigung verschiedener Schalentheorien	
4.3.4. Gleichgewichtsbedingungen in den Spannungen	
4.3.5. Gleichgewichtsbedingungen in den Schnittgrößen unter Berücksichtigung verschiedener Schalentheorien	
4.3.6. Sonderfälle von Gleichgewichtsbedingungen	
4.3.7. Physikalische Größen	
4.4. Spezielle gekrümmte Flächenträger	35
4.4.1. Allgemeine Rotationsschale	
4.4.2. Zylinderschale	
4.5. Ebene Flächenträger	50
4.5.1. Gekoppeltes Platten-Scheibenproblem	
4.5.2. Scheibe	
4.5.3. Platte	
4.6. Mehrschichtige Flächenträger	56
4.6.1. Allgemeines	
4.6.2. Rotationsschale unter rotationssymmetrischer Belastung	

4.6.3.	Zylinderschale	
4.6.4.	Gekoppeltes Platten-Scheibenproblem der rechteckigen Platte	
4.6.5.	Scheibe	
4.6.6.	Sandwichplatte	
4.6.7.	Bemerkungen zu den interlaminaren Schubspannungen	
4.7.	Mehrschichtige Fasernetze	65
4.7.1.	Allgemeines	
4.7.2.	Rotationsschale unter rotationssym- metrischer Belastung	
4.7.3.	Ebener Flächenträger	
4.8.	Mehrschichtiger Linienträger	71
4.8.1.	Gekrümmte Träger	
4.8.2.	Gerader Träger	
4.9.	Faserablage und Konturverlauf	73
4.9.1.	Gleichgewichtsbedingungen und Ablege- winkel	
4.9.2.	Wandstärkenverlauf	
4.9.3.	Differentialgleichung der Wickel- konturen	
4.9.4.	Diskussion von berechneten und wirklich gewickelten Konturen	
5.	Elastizitätsgesetz und Elastizitätskoeffizienten des Verbundes	5-1 bis 70
5.1.	Physikalisch lineares Elastizitätsgesetz	1
5.2.	Einordnung von Mikrostrukturen nach der Kristallelastizität	3
5.2.1.	Kartesisches Ausgangssystem	
5.2.2.	Ausgangssystem allgemeiner Rotations- körperkoordinaten	
5.2.3.	Schiefwinklige Koordinaten	
5.3.	Technische Elastizitätskonstanten	10
5.3.1.	Reduktion der Vierfachindizierung des Elastizitätstensors	
5.3.2.	Zusammenhang Steifigkeitskoeffizienten- Nachgiebigkeitskoeffizienten	
5.3.3.	Technische Elastizitätskonstanten	
5.4.	Elastizitätsgesetze spezieller Faserverbund- bzw. Schichtkörper	17
5.4.1.	Beziehungen zwischen Spannungen und Verzerrungen	
5.4.2.	Beziehungen zwischen Schnittgrößen und Verzerrungen beim MSV	

5.4.3.	Physikalisch nichtlineare Verhaltensweisen	
5.5.	Theoretische Ermittlung der Grund-Elastizitätskonstanten	23
5.5.1.	Elastizitätsmodul in Faserrichtung $E_{11}$	
5.5.2.	Elastizitätsmodul quer zur Faser $E_{12}$	
5.5.3.	Querkontraktionszahl $\nu_{12}$	
5.5.4.	Schubmodul in der Schichtebene $G_{12}$	
5.5.5.	Querkontraktionszahl $\nu_{21}$	
5.5.6.	Interlaminarer Schubmodul $G_{13}$	
5.6.	Zusammenhang technischer Elastizitätsgrößen mit Faserorientierungswinkel und Belastungsrichtung	28
5.6.1.	Unidirektionale Schicht	
5.6.2.	Mehrdirektionales Laminat	
5.6.3.	Matte, Gewebe	
5.7.	Versuchstechnische Ermittlung der Elastizitätskoeffizienten	36
5.7.1.	Statische Ermittlung der Grundkonstanten	
5.7.2.	Dynamische Ermittlung der Grundkonstanten	
6.	Einfluß der Temperatur	6-1 bis 31
6.1.	Spannungs - Dehnungs - Beziehungen für die Schicht	1
6.2.	Wärmeausdehnungskoeffizienten - Berechnungsformeln	3
6.2.1.	UD-Schicht	
6.2.2.	Mehrschichtenverbund	
6.2.3.	Matte und Gewebe	
6.2.4.	Wärmeausdehnungskoeffizient in Dickenrichtung eines MSV	
6.3.	Schnittgrößen der mehrschichtigen Verbundschale	11
6.3.1.	Allgemeiner Fall	
6.3.2.	Elastische Symmetrie zur Laminatmittelebene, Biegeschale	
6.3.3.	Elastische Symmetrie zur Laminatmittelebene, Membranschale	
6.3.4.	Elastische Unsymmetrie zur Laminatmittelebene	
6.3.5.	Temperaturunterschied zwischen den Schichten	
6.4.	Experimentelle Ermittlung von Wärmeausdehnungskoeffizienten	15
6.4.1.	Harz- und Faserwerte	
6.4.2.	Versuchsbeschreibung für Verbundproben	

6.4.3.	Versuchsergebnisse und theoretische Werte für CFK-Lamine	
6.4.4.	Versuchsergebnisse und theoretische Kurven für einige GFK-Lamine	
6.4.5.	Versuchsergebnisse für ChFK-UDV	
7.	Bruchhypothesen und Bruchmechanik	7-1 bis 77
7.1.	Bruch- bzw. Festigkeitshypothesen (Kontinuumsbruchmechanik)	
7.1.1.	Bruchhypothesen isotroper, homogener Werkstoffe	
7.1.2.	Allgemeines zu den Bruchhypothesen des Faserverbundes	
7.1.3.	Spannungskriterien	
7.1.4.	Verformungskriterien	
7.2.	(RiB-) Bruchmechanik	17
7.2.1.	Allgemeines zur Bruchmechanik isotroper, homogener Werkstoffe	
7.2.2.	Kurze Beschreibung der Bruchmechanik-Theorien isotroper, homogener Werkstoffe	
	a) Theorie von Griffith	
	b) Linear-elastisches Werkstoffverhalten	
	c) Elastisch-plastisches Werkstoffverhalten	
7.2.3.	Anwendung der Bruchmechanik auf die Faserverbundschicht	
	a) K <sub>c</sub> -Theorie	
	b) S <sub>c</sub> -Theorie	
	c) Matrix Crack Propagation Model	
	d) Aufspaltung eines Risses	
7.2.4.	Anwendung der Bruchmechanik auf das Faserverbund-Laminat	
7.3.	Kerbbruchmechanik	37
7.4.	Mikro- und makromechanische Betrachtungsweise von Brüchen	38
7.4.1.	Faserknickung durch Druck oder Schub	
7.4.2.	Versagen der Haftung Faser-Matrix	
7.4.3.	Delamination	
7.5.	Bestimmung der bruchmechanischen Kenngrößen	41
7.5.1.	Allgemeines	
7.5.2.	Messung von K <sub>c</sub> - und G <sub>c</sub> -Werten	
7.6.	Fehlerprüfungsmethoden von Faserverbund	48



8. Festigkeitsberechnungsgrößen	8-1 bis	84
8.1. Allgemeines	1	
8.2. Festigkeitsarten und Probenformen, Faserverbundbesonderheiten	3	
8.2.1. Zugfestigkeit		
8.2.2. Druckfestigkeit		
8.2.3. Scherfestigkeit		
8.2.4. Biegefestigkeit		
8.2.5. Einfluß des Schichtaufbaus		
8.2.6. Das "Knie" in Spannungs-Dehnungs-Diagramm		
8.2.7. Spannungszustand bei kurzen Fasern		
8.3. Statische Festigkeit	20	
8.3.1. Kurzzeitfestigkeit		
8.3.2. Langzeitfestigkeit, Zeitstandfestigkeit		
8.4. Schwingfestigkeit	26	
8.4.1. Allgemeines		
8.4.2. Festigkeit bei konstanter Schwingungs- amplitude		
8.4.3. Festigkeit bei unterschiedlicher Schwingungsamplitude		
8.5. Rißfortschritt, Lebensdauer und Restfestigkeit	36	
8.5.1. Rißfortschritt		
8.5.2. Lebensdauer		
8.5.3. Restfestigkeit		
8.6. Schlagfestigkeit und (Durch-)Stoßfestigkeit	47	
8.6.1. Kerbschlag		
8.6.2. Durchschlagfestigkeit		
9. Strukturauslegung und -nachweis mit Beispielen	9-1 bis	62
9.1. Arten der Berechnung	1	
9.2. Auslegungskriterien	3	
9.2.1. Auslegungsvorteile bei der Verwendung von Faserverbund		
9.2.2. Materialauswahl		
9.2.3. Lastannahmen		
9.3. Sicherheitskriterien	9	
9.3.1. Einige Grundlagen der Statistik		
9.3.2. Technische Zuverlässigkeitsauslegung und konventionelle Auslegung		
9.3.3. (Un-)sicherheitsfaktoren und Abmin- derungsfaktoren		
9.3.4. Zulässige Spannungen		
9.3.5. Safe-Life- und Fail-Safe-Auslegungshy- pothesen		

9.4.	Anwendungsbeispiel 1 -Druckbehälter aus CFK-	31
9.4.1.	Allgemeine Beschreibung	
9.4.2.	Auslegungsgrößen	
9.4.3.	Wickelwinkel, Wickelmuster und Kontur	
9.4.4.	Wandstärke (Netztheorie)	
9.4.5.	Wickelgrößen	
9.4.6.	Spannungs- und Verformungsnachweis	
9.5.	Anwendungsbeispiel 2 - Zentrifuge -	41
9.5.1.	Allgemeine Beschreibung	
9.5.2.	Auslegungsgrößen	
9.5.3.	Festigkeitsauslegung	
9.5.4.	Schwingungsberechnung	
9.5.5.	Ergebnis	
9.5.6.	Kontrollmöglichkeiten der wesentlichen technischen Elastizitätskonstanten	
10.	Lösungsverfahren der Differentialgleichungssysteme	10-1 bis 23
10.1.	Allgemeines über Lösungsverfahren	1
10.2.	Ein spezielles FEM-Verfahren	2
10.2.1.	Aufstellung der Variationsgleichung	
10.2.2.	Einarbeitung des Verschiebungsansatzes	
10.2.3.	Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems	
10.3.	Anwendung auf eine mehrschichtige, dünne Faserverbundschale	11
11.	Literaturverzeichnis zu den einzelnen Kapiteln	11-1 bis 47
<b>Anhang</b>		
I	Transformationsbeziehungen	I-1 bis 2
II	Begriffserläuterungen auf dem Faserverbundsektor.	II-1 bis 6

## Aufstellung der verwendeten Symbole

### Abkürzungen:

AWV (= BD)	Ausgeglichener Winkelverbund ( $t_1=t_2$ )
BD, UD	Bidirektional, unidirektional
BFK, CFK, GFK	Einige Verbundarten (im engl. BFRP, CFRP, GRP)
ChFK	Chemiefaserverstärkter Kunststoff
DGL	Differentialgleichung
DKI	Deutsches Kunststoffinstitut
DU	Dornumdrehungen
EK	Elastizitätskoeffizienten ( $E^{ijkl}$ usf.)
EM	Elastizitätsmatrix
EP, UP	Epoxidharz, ungesättigtes Polyesterharz
ESZ	Ebener Spannungszustand
EFZ	Ebener Formänderungszustand
FB	Faserbruch
FEM	Finite Element Methode
FK	Faserverstärkter Kunststoff (im engl. FRP=filament reinforced plastic)
PW	Fasergewickelt
HM, HT	High Modul-, High Tensile-Fasern
IKV	Institut für Kunststoffverarbeitung
ILS	Interlaminare Schubspannungen
ILSS	Interlaminare Scherfestigkeit
KOS	Koordinatensystem
KV	Kreuzverbund ( $0^\circ/90^\circ$ ; $t_1 \cong t_2$ )
LEFM	Linear Elastic Fracture Mechanics
MSV	Mehrschichtenverbund
NDT	Non Destructive Testing
NOL	Naval Ordnance Laboratory
RH	Reaktionsharz
RT	Raumtemperatur
Tex	Gramm Faden/km Länge
UDV	Unidirektionaler Verbund
WAK	Wärmeausdehnungskoeffizienten
ZFB	Zwischenfaserbruch

Lateinische Buchstaben:

A	Auslegungsfaktor, Querschnittsfläche
$A_i$	Abminderungsfaktoren
$\tilde{A}$	Gesamtzahl der Fäden im Querschnitt
B	Probendicke, Biegesteifigkeit
[B]	Verzerrungsgrößenmatrix
$B_\alpha, B_{90}$	Bandbreiten
	Elastizitätsmatrix (Steifigkeit), engl. stiffness matrix
	Dehnsteifigkeit
E	Elastizitätsmodul
$\bar{E}$	E-Modul der Lage
$\hat{E}$	Über der Wanddicke gemittelter E-Modul
$E^{lmrs}, E_{rs}^{lm}$	Elastizitätstensor
F	Funktional
G	Schubmodul
H	Mittlere Krümmung
[J]	Jakobianmatrix
K	Gaußsche Krümmung, Vielfaches der Standardabweichung
[K]	Steifigkeitsmatrix
$K_s$	Strukturfaktor
$K_G, K_E$	Charakteristische Größen für Faserverstärkungen
$K_I, K_{II}, K_{III}$	Spannungsintensitätsfaktoren versch. Belastungsfälle
$K_C$	Spannungsintensitätsfaktor bei Sprödbruchbeginn
$K_{IC}$	$K_C$ -Wert für EFZ, Minimum von $K_C$ , Werkstoffgröße
$K_{Isc}$	$K_{IC}$ -Wert bei Spannungsrißkorrosion, Werkstoffgröße
$\Delta K$	Spannungsintensitätsgefälle
L	Baulänge
$\bar{L}, L^1, L^2$	Charakteristische Schalenabmessungen
N	Lastwechselzahl
[N]	Formfunktionmatrix
$N_\varphi, N_\varphi^{(1)}, N_\varphi^{(2)}$	Membrankraft der Schale, der UD - bzw. BD-Schicht
$N_{\varphi\varphi}, N_{\varphi\varphi}^{(1)}, N_{\varphi\varphi}^{(2)}$	Membrankraft der Schale in Umfangsrichtung
$N_{\varphi\vartheta}, N_{\varphi\vartheta}^{(1)}, N_{\varphi\vartheta}^{(2)}$	Membranschubkraft in Umfangsrichtung
$N_{\vartheta\varphi}, N_{\vartheta\varphi}^{(1)}, N_{\vartheta\varphi}^{(2)}$	Membranschubkraft in Meridianrichtung
$N_\alpha, N_{90}$	Errechnete Lagenanzahlen
$N_F^{(1)}$	Membrankraft in Fadenrichtung

$\sigma$	Oberfläche
$P$	Kraft
$R$	Radius, Spannungsverhältnis
$R_1$	Krümmungsradius in der Meridianebene
$R_2$	Normalkrümmung des Breitenkreises
$S$	Statistische Sicherheit
$[S]$	Elastizitätsmatrix (Nachgiebigkeit), engl. flexibility matrix
$T$	Teilungszahl
$[\bar{T}_k], [T_c]$	Transformationsmatrizen
$U(g_{ki})$	Unterdeterminante der Matrix
$V_c$	Variationskoeffizient, Streuung der Stichprobe
$Z$	Wickelzugkraft
$a_k^i, \tilde{a}_k^i$	Transformationskoeffizienten
$a$	Halbe Innenrißlänge, Randrißlänge, $\det(a_{\alpha\beta})$
$a_{\alpha\beta}$	Metriktensor der Schalenmittelfläche
$a_c$	Kritische Rißlänge (critical)
$a_i$	Anfangsrißlänge (initial)
$b$	Plattensteifenbreite, Determinante, Zylinderabschnitt bei planarer Wicklung
$b_{\alpha\beta}, b_\alpha^\beta$	Krümmungstensoren der Schalenmittelfläche
$c$	Halbe Rißbreite
$c_0, n$	Werkstoffgrößen für Rißwachstum bei Wechsellast
$c_i^i$	Reduzierte Steifigkeitsziffern
$c_{rs}^{ij}$	Tensorielle Steifigkeitsziffern
$c_{ij}$	Reduzierte Steifigkeitsziffern der Einzelschicht
$e$	Radius der Polöffnung (Polmaß)
$\bar{e}$	Polöffnungsverhältnis
$\{f\}$	Matrix der Ansatzfunktion
$g_{rm}$	Metriktensor des Raumes
$G_I$	Rißausbreitungskraft
$k$	Anzahl der Wickelbänder
$k_{  }$	Gewichtsverhältnis der Fasermenge in Beanspruchungs- (Kett-)richtung zur Gesamtfasermenge
$l$	Längenabmessung
$m$	Packungsdichte
$m^{\alpha\beta}$	Momententensor
$n$	Anzahl gleicher Gewebe- oder Rovingschichten im Laminat
$n^{\alpha\beta}$	Normalkrafttensor
$n_\alpha$	Zahl, der einen Breitenkreis kreuzenden Fäden

$n_i$	Komponenten des Normaleneinheitsvektors
$p^i, c^i$ [p]	Komponenten des Lastvektors bzw. Momentenvektors Matrix der volumenbezogenen Körperkräfte
$p_{Be}, p_B$	Betriebsdruck, Berstdruck
$q^a$	Schubkrafttensor
$\bar{q}, q$	Gewicht je Flächeneinheit einer Gewebelage, eines Verbundwerkstoffes
$r, \vartheta, z$	Zylinderkoordinaten
$r, \vartheta, \varphi$	Kugelkoordinaten
$r_p$	Innenradius des Fittings
$r_w$	Radius des oberen Isotensoidbodenendes
$s$	Wegkoordinate, Standardabweichung der Stichprobe
$s_{ij}$	Reduzierte Nachgiebigkeitsziffern der Einzelschicht, engl. compliances
$s_{rs}^{ij}$	Tensor. Nachgiebigkeitsziffern
$s$	Sicherheitsfaktor
$t$	Schalenstärke
$\bar{x}$	Mittelwert der Stichprobe
$x^i$	Geradlinige Koordinaten (kartes. Ramm)
$y^i$	Krummlinige Koordinaten des Raumes

Griechische Buchstaben:

$\Gamma_{lm}^k$	Christoffelsymbol
$\Pi$	Potential (raumbezogen)
$\Theta^a, \Theta$	Krummlinige Koordinaten des Schalenraumes
$\alpha$	Veränderlicher Wickelwinkel zwischen Faden und Meridianebene (Winkel auf der Oberfläche)
$\alpha_t, \hat{\alpha}_t, \alpha_{II}, \alpha_{\perp}$	Lineare Wärmeausdehnungskoeffizienten
$\beta$	Umschlingungswinkel
$\gamma$	Variationskoeffizient der Gesamtheit, spezifisches Gewicht, Wickelwinkel zwischen Mittelebene und planarer Ebene
$\gamma_{ij}, \gamma_{\alpha\beta}$	Verzerrungstensor
$\gamma_k$	Techn. Verzerrungsgrößen
$\delta$	Variationszeichen
$\delta_a^s$	Kronecker-Delta

$\{\delta\}$	Matrix der Knotenverschiebungen
$\epsilon_{ij}, \epsilon_{\alpha\beta}$	Dehnungen
$\vartheta$	Temperatur
$\mu$	Reibungskoeffizient, Lamésche Konstante, Mittelwert der Gesamtheit
$\xi$	Transformationswinkel
$\xi, \eta$	Bezogene kartesische Koordinaten
$\kappa$	Korrekturfaktor
$\lambda$	Schalenschlankheitsparameter
$1\mu = 10^{-3} \text{ mm}$	Mikron
$\nu_{ij}$	Querkontraktionszahl (1. Index gibt die Richtung an, 2. Index die Ursache)
$\chi$	Schnitttrichtung
$\pi$	Potential pro Volumeneinheit
$\sigma$	Normalspannung, Standardabweichung der Gesamtheit
$\tau$	Schubspannung
$\tau^{ik}, \tau^{\alpha\beta}$	Spannungstensoren
$\varphi, \varphi_{\alpha}, \varphi_{90}$	Faservolumenanteil des Verbundes
$\psi$	Fasergewichtsanteil des Verbundes

Deutsche Buchstaben:

$\mathcal{Q}_i$	Basisvektor des verformten Körpers
$\mathcal{R}$	Ortsvektor des verformten Körpers
$\mathcal{I}$	Spannungsvektor in der Deckfläche des Tetraeders
$\underline{\mathcal{I}}$	Schnittkraftvektor des Volumenelementes
$\mathcal{T}$	Tensor beliebiger Stufe
$\mathcal{T}^i = \tau^{ij} \sqrt{g} y_j$ $\mathcal{T} = t^i y_i, \mathcal{T} = \tau^{ij} y_i y_j$	Gesamtverschiebungsvektor des Punktes P
$\mathcal{U}$	Verschiebungsvektor der Mittelfläche
$\mathcal{U}^{\alpha}$	Bezeichnet die Änderung des Normaleneinheitsvektors $u^{\alpha}$ infolge der Verformung
$u_{\alpha}, u_3$	Basisvektoren der Schalenfläche
$y_i$	Basisvektoren des Raumes
$\mathcal{U}$	Ortsvektor des unverformten Körpers

Indizes:

Ä	Aequator
B	Bruch (Festigkeit)
F	Faser, Filament
G,C	Glas, Kohlenstoff
H	Harz
L	Liner
M	Matrix
V	Verbund
Z.	Zylinder
b	Biegung
d	Druck
ij	Numerierung von Spalten und Zeilen einer Matrix
iso	Isotensoidwicklung
k	Laufende Nummer der Einzelschichten
p	Polarwicklung
s	Schub
t	Torsion
z	Zug
$\alpha$	Winkellagenkennzeichnung
90	Umfangslagenkennzeichnung

Vereinbarungen in tensorieller Schreibweise:

$n_i x^i = n_1 x^1 + n_2 x^2 + \dots$	Einsteinsche Summenkonvention
$g^{(ii)}$	Über Indizes in Klammern darf nicht summiert werden
$n_i, y_i, \varphi_i$	Vektoren- bezeichnung im kovarianten System
$n^i, p^i, \tau^{ik}$	
$n^i, y^i, \varphi^i$	Vektoren- bezeichnung im kontravarianten System
$n_i, p_i, \tau_{ik}$	
$n_i, \nu_i$	Kovariante Basissysteme
$g_{ij}$	Kovariante Metrikkoeffizienten
$\varphi_1 = t^1 \nu_1$	Vektorkomponente
$d^i, \tau^{ij}$	Kontravariante Tensorkomponenten
$t^i$	Vektor = Tensor 1. Stufe
$\tau^{ij}$	Spannungstensor = Tensor 2. Stufe
$i, j, k = 1, 2, 3$	Indizes Raum
$\alpha, \beta = 1, 2$	Indizes Fläche



Größen, betreffend den verformten Körper, werden durch große deutsche und lateinische Buchstaben bezeichnet. Die deutschen Buchstaben werden für vektorielle Größen benutzt.

Jeder obere Index transformiert sich gleich bei Komponenten  $p^i$  wie Vektoren  $\eta^i$ . Das ist der Grund, weshalb in  $\eta = t^i \eta_i$  kontragrediente Indexanordnung vorliegt. Als Ausgangskoordinatensystem wird im allgemeinen das kovariante gewählt.

Zeichen:

X	Kreuzlage (nur doppelt möglich)
o (→)	einfache Umfangslage
⊙ (→ ←)	doppelte Umfangslage
(1), (2)	Kennzeichnung der UD- und BD-Schicht
*	Wickelbandkennzeichnung, Kennzeichnung der physikal. oder natürlichen Komponenten
-	Lagengröße, bezogene Schalengröße
'	Faserbezogene Größe
	parallel zu den Verstärkungsfasern
⊥	senkrecht zu den Verstärkungsfasern
#	parallel und senkrecht zu den Verstärkungsfasern
	senkrecht zu den Fasern bei Belastung parallel zu Fasern
⊥	parallel zu den Fasern bei Belastung senkrecht zu den Fasern
⊗	unter 45° zur Faserrichtung
^	Kennzeichnung des Mehrschichtenverbundes (Laminats)
φ	Durchmesser
	Betragszeichen, Determinantenzeichen
$v_1 \times v_2$	vektorielles Produkt
$v_1 \cdot v_2$	skalares Produkt
$[v_1, v_2, v_3]$	Spatvolumen
diag ( )	Diagonalmatrix
det ( )	Determinante
⊙ ⊗	Kraftvektor von vorn und hinten gesehen
⊙ ⊗	Momentenvektor von vorn und hinten gesehen
°	Anfangswerte (des Ausgangszustandes)
$l_k$	kovariante Ableitung von Tensorkomp. in Richtung $l$

$$(\ )_{,z} = \frac{\partial(\ )}{\partial x^z}$$

$$\{\}, [\ ], [^{\wedge}]$$

$$\{\}^e, [^e]$$

$$\{\}^T, [^T]$$

$$[^{-1}]$$

partielle Ableitung

Spalten-, quadratische, Bandmatrizen

Matrizen eines endlichen Elementes

transponierte Matrizen

Kehrmatrix

$$\dot{r} = \frac{dr}{ds}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{ds}$$

$$\dot{\eta} = \frac{d\eta}{dz}$$

Ableitungen

## 1. Einleitung

Die Herstellung faserverstärkter Verbundkörper hat in den letzten Jahren immer mehr an Bedeutung gewonnen. Das gilt nicht nur für die bekannten Leichtbaukonstruktionen der Luft- und Raumfahrt, sondern auch für allgemein-technische Anwendungen im Bauwesen und Maschinenbau. Besonders die glasfaserverstärkten Kunststoffe (GFK) haben ein großes Feld technologisch guter Lösungen aufzuweisen. Bor- und kohlenstoff-faserverstärkte Kunststoffe (BFK und CFK) sind wegen ihres hohen Preises mehr auf die Luft- und Raumfahrt beschränkt. Langsam zeichnen sich aber auch mit diesen Baustoffen werkstoffgerechte Konstruktionen des Maschinenbaus ab. Es scheint sogar möglich zu sein, mit geeigneten Herstellungsverfahren die wahrscheinlich für das Bauwesen allein sinnvolle Verwendung von Kohlenstofffasern beim Bau von leichten Flächentragwerken ausnutzen zu können. Als neueste Faservariante sucht sich seit einiger Zeit die Kevlarfaser ihre Einsatzgebiete.

Die Auswahl eines Werkstoffes erfolgt nach den geforderten physikalischen, chemischen und anderen Eigenschaften des Bauteils, wobei die gesamtwirtschaftlichen Gesichtspunkte zu berücksichtigen sind. Zur Erzeugung guter "Strukturfaktoren" des Leichtbaus kann je nach Anwendungsfall auf "spezifisch steife" oder "spezifisch feste" Fasern zurückgegriffen werden.

Die Auslegung von Bauteilen aus Faserverbundwerkstoffen hebt sich merklich von derjenigen metallischer Werkstoffe ab. Eigentlich sollte beim Faserverbund gar nicht von einem Werkstoff geredet werden, da es sich bereits um eine Konstruktion aus ganz verschiedenen Stoffen handelt.

Sind die metallischen Werkstoffe im allgemeinen an jeder Stelle aus gleichem Stoff aufgebaut (homogen) und besitzen für alle Richtungen dieselben Elastizitäts- und Festigkeitswerte (isotrop), so stellen Faserverbunde inhomogene, anisotrope Werkstoffe dar. Bei Mattenlaminaten können wegen der regellosen Anordnung der kurzen Fasern quasi-isotrope Eigenschaften angenommen werden.

Sowohl bei der Verarbeitung des Faserverbundes als auch in der Gestaltung von Bauteilen aus Faserverbund ist den speziellen Werkstoff- und Verarbeitungseigenschaften zu entsprechen. Beanspruchungen können im wesentlichen nur in Richtung der Verstärkungsfasern aufgenommen werden. Es gilt also, die Anisotropie in die Überlegung mit einzubeziehen. Im Unterschied zu den Metallen sind aber durch

statische Belastung hervorgerufene Spannungsspitzen zu vermeiden (plastischer Ausgleich fehlt im allgemeinen) und speziell bei hochbeanspruchten Strukturen möglichst nur Membranspannungen zu erzeugen. Bei der Gestaltung eines Werkstückes ist darauf zu achten, nicht einfach Bauformen aus Metall mit einem Verbundwerkstoff nachzuempfinden, da es bei weniger beanspruchten Bauteilen häufig gelingt, ganze Baugruppen, z.B. einen Kasten mit Rippen, zu einem Werkstück zusammenzufassen. Hier liegt der besondere Vorteil des Faserverbundes, er ist ein modellierbarer Werkstoff.

Die Notwendigkeit einer guten theoretischen und versuchstechnischen Erfassung des Verbundes zwingt zu Vereinfachungen. So geht die Elastizitätstheoretische Behandlung stillschweigend von der Homogenität aus. Getrennte mikromechanische Betrachtungen geben darüber hinaus einen Einblick, was örtlich in einer Schicht (Lage) "passiert". Jeder Festigkeitsingenieur arbeitet mit zulässigen Spannungen und Dehnungen für eine Schicht, ohne sich immer über den Verlauf in der Schicht klar werden zu müssen.

Es ist Ziel dieser ~~Habilitations~~Arbeit, einem größeren Kreis von Theoretikern und Praktikern den Faserverbund durchschaubar zu machen. Zum einen soll dabei der Theoretiker die notwendige Einsicht in spezielle Werkstoff- und Fertigungsprobleme erhalten, zum anderen dem reinen Praktiker die Theorie nähergebracht werden. Letztlich sollen mit dieser Arbeit auch Grundlagen für vertiefende weitere Untersuchungen bereitgestellt werden.

Große Teile des Inhalts sind natürlich in der Literatur verstreut auffindbar. In dieser Übersicht sollen nur diejenigen Autoren zitiert werden, die sich um eine teilweise ähnliche Zielsetzung wie der Verfasser bemüht haben. Als erste grundlegende Arbeiten sind einige Bücher zu erwähnen. Tsai-Halpin-Pagano gaben 1967 im "Composite Materials Workshop" Aufsätze der Vortragenden einer Verbundtagung heraus. Auch die American Society for Testing and Design veröffentlichte schon 1969 den Inhalt eines Symposiums unter dem Namen "Composite Materials, Testing and Design". Ashton-Halpin-Petit gaben 1969 das Werk "Primer on Composite Materials Analysis" heraus. Dietz veröffentlichte 1969 eine Aufsatzreihe bekannter amerikanischer Autoren unter dem Thema "Composite Engineering Laminates". Ashton-Whitney behandelten 1970 das Thema "Theory of Laminated Plates". Als neueres Werk faßt das Mil-Handbook 17 A im Jahre 1971 viele Probleme des Faserkunststoffsektors im Band 1 "Plastics for Aerospace

Vehicles" zusammen. Herausgehoben werden sollte noch das Buch von Calcote. Dieser veröffentlichte 1969 "The Analysis of Laminated Composite Structures".

Als bekannte Arbeit der deutschen Literatur ist aus dem Jahre 1963 Puck-Wurtinger "Werkstoffgemäße Dimensionierungsgrößen für den Entwurf von Bauteilen aus kunstharzgebundenen Glasfasern" zu nennen. Für Bauingenieure ist das Buch von Hintersdorf "Tragwerke aus Plasten" von großer Bedeutung.

Da viele deutsche Veröffentlichungen vor allem auf elastizitätstheoretischem Gebiet kaum Niederschlag in Buchform gefunden haben, sollen stellvertretend auch für einige andere Autoren die grundlegenden Arbeiten von Wiedemann und Puck, sowie der Arbeitsgruppen um Menges und Hütter erwähnt werden. Diese Beschränkung auf Nennung der mehr elastizitätstheoretischen Arbeiten sei dem Verfasser im Hinblick auf den Kern dieser Arbeit gestattet.

Im folgenden werden bezüglich der Schreibweise die Bezeichnungen der Kunststoffnorm berücksichtigt (nebst anderen gebräuchlichen Bezeichnungen des Faserverbundsektors). Die elastizitätstheoretischen Darstellungen folgen im wesentlichen der tensoriellen Schreibweise von Green und Zerna. Zur Beschreibung der numerischen Verfahren dient die Matrizen-schreibweise von Zienkiewicz.

Die Behandlung des Stoffes erfolgte in der Reihenfolge, wie er vor der Dimensionierung eines Bauteils nach Meinung des Verfassers vorzuliegen hat.

In Kapitel 2 werden Verbundkomponenten nebst Eigenschaften vorgestellt, so wie sie bei der Auslegung bekannt sein müssen. Dabei werden am Beispiel des Kohlefadens die Fadeneigenschaften aufgezeigt. Kapitel 3 gibt verschiedenen Herstellungsmöglichkeiten von Verbundkörpern an, wobei die Wickeltechnik besonders herausgehoben wird.

Kapitel 4 enthält nach der Theorie 1. Ordnung hergeleitete Gleichgewichtsbedingungen und Formänderungsbeziehungen, die anschließend bei der Berechnung und in der Wickeltechnik von mehrschichtigen Verbundkörpern angewendet werden. Die Annahme eines linearen Spannungs-Dehnungs-Gesetzes dürfte dabei speziell für kohlenstoffaserverstärkte Kunststoffe (kurz CFK) und borfaserverstärkte Kunststoffe (BFK) erlaubt sein, weil im allgemeinen die Betriebswerte erheblich unter den Bruchwerten liegen.

Im Aufbau dieses Kapitels wurde vom Allgemeinen Körperträger ausgegangen und dann die Flächenträger bis hin zum Linienträger behandelt. Es werden dabei als bekannte Verbundtheorien die "Kontinuumstheorie" und die "Netztheorie" eingeordnet. Die knappe Form der Tensorschreib-

weise erleichterte es dem Verfasser, die notwendigen differential-geometrischen Kenntnisse über geodätische Linien und Wickelbedingungen der Wickeltechnik homogen eingliedern zu können. Auch gestattet es der Aufbau dieses Kapitels, sich das Eingehen von Elastizitätsgesetz und -koeffizienten (EK) in die Beziehung der mehrschichtigen Verbundkörper zu verdeutlichen.

Wie das Elastizitätsgesetz bei verschiedenen Symmetriebedingungen aussieht, zeigt Kapitel 5. Ebenso wird in diesem Kapitel der Übergang von tensoriellen EK auf technische EK und ihr Zusammenhang mit den elastischen Grundkonstanten gezeigt. Weiterhin wird die theoretische wie versuchstechnische Ermittlung der Grundkonstanten beschrieben. Elastoplastische und viskoelastische Eigenheiten der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen werden im Kapitel 5 und später im Kapitel 8 lediglich gestreift.

Eine Behandlung des Temperatureinflusses erfolgt in Kapitel 6. Besondere Bedeutung hat die Ermittlung der Wärmeausdehnungskoeffizienten des Laminates aus den Schichtgrößen und den Faserorientierungswinkeln.

Kapitel 7 vermittelt dem Leser einen Überblick über Bruchhypothesen und Bruchmechanik beim Faserverbund. Dabei wird auf dem homogenen, isotropen Werkstoff aufgebaut.

In Kapitel 8 werden im wesentlichen die statische Festigkeit und die Schwingfestigkeit behandelt.

Zur Abrundung sind im Kapitel 9 zwei Beispiele durchgerechnet worden. Der Durchrechnung vorgeschaltet ist die Darstellung verschiedener Kriterien, die bei der Auslegung oder dem rechnerischen Nachweis einer Struktur beachtet werden müssen.

Kapitel 10 gibt einen Einblick in die Lösungsverfahren der Differentialgleichungssysteme. Da numerische Lösungsverfahren den vielgestaltigen Bauteilformen besser entsprechen, wird der Aufbau eines Finite-Element-Methoden-Programms in Anwendung auf eine Faserverbundschale gezeigt. Der Aufbau anderer Programme ist verwandt, so daß dieses Beispiel genügt, um zu sehen, wie und wo die Anisotropie in die Rechnung eingeht.

Ein ausführliches Literaturverzeichnis gestattet einen schnellen Einblick des Lesers in alle verbundzugehörigen Gebiete. Die Literatur wird in alphabetischer Reihenfolge angeführt. Aus zeitlichen Gründen wird manchmal statt auf die Erstveröffentlichung der Autoren auf

spätere Arbeiten und Übersichtsartikel verwiesen.

Um die Verständlichkeit so weit wie möglich zu erhöhen, ist großer Wert auf ausführliche, bildliche Darstellung gelegt worden. Aus demselben Grund ist im Anhang eine Erläuterung von Begriffen der Faserverbundtechnologie alphabetisch aufgeführt. Darin sind die chemischen Begriffe sicherlich nicht ausreichend definiert, für den Festigkeitsingenieur mag es aber genügen.

Nach diesem Überblick seien als Abschluß der Einleitung noch einige spezielle Beispiele aus verschiedenen Anwendungsgebieten des Maschinenbaus und des Bauingenieurwesens vorgestellt:

Bei der Verwendung von Faserverbundmaterialien werden im Behälterbau wesentliche Gewichtseinsparungen möglich. Für Kurzzeitbelastungen verbunden mit geringen Steifigkeitsforderungen eignet sich mehr GFK, während bei CFK das Kriechverhalten günstiger und die Steifigkeit größer sind. Großen Anklang haben in den letzten Jahren Druckbehälter (Bild 1.1), Flüssigkeitsbehälter und Silos aus GFK gefunden.

Ein Anwendungsgebiet der CFK-Technologie liegt bei Rotationskörpern für hohe Umlaufgeschwindigkeiten. Bild 1.2 zeigt einen solchen Rotor mit einer metallischen Innenauskleidung.

Luft- und Raumfahrtbauteile werden je nach Einsatzbedingungen aus verschiedenen Faserverbunden hergestellt. Tabelle 1.1 gibt einen Überblick über eine Vielzahl von Anwendungen.

Im Bauwesen besteht die Notwendigkeit, raumbegrenzende Flächen zu schaffen. Möglich wird das mit dem Werkstoff GFK (vielleicht auch später mit CFK), aus dem sich ebene und gekrümmte Flächenelemente von geringer Wandstärke selbsttragend herstellen lassen. Der Vorteil dieser Flächenelemente drückt sich im einfachen Transport und einfacher Verlegbarkeit infolge des leichten Bauteilgewichtes aus. Dabei liegt die Zukunft in einer wirtschaftlichen, automatischen Serienfertigung von Wohnzellen, Wandelementen und Überdachungselementen (Bilder 1.3 bis 1.5). Allerdings müssen dazu noch geeignetere Produktionsverfahren entwickelt werden. Abschließend wird in Bild 1.6 ein Teilstück eines Biegeträgers aus CFK gezeigt.

Bodenträger und -platten der  
Luft- u. Raumfahrt

Druckbehälter und Tanks

Rotorblätter, Flügelspitzen

Torsionssteife Röhren

Stabilisatoren

Raketenmotorgehäuse

Turbinenschaufeln

Druck- Zugstreben

Raketen- u. Satelliten-  
strukturen

Biege- u. torsionssteife  
Profilträger

Auto - Strukturteile

Schwungräder

Schnellrotierende Maschinen

Hochgeschwindigkeits-Textil-  
maschinen

Maschinenwerkzeuge

Getriebe, Lager

Masten, Türme

Eisenbahn- bzw. Schnellbahn-  
strukturteile

Schiffspropeller, Schiffsbau

Tiefseedruckkabinen

Sportgeräte

Tabelle 1.1 Bauteile aus Faserverbund

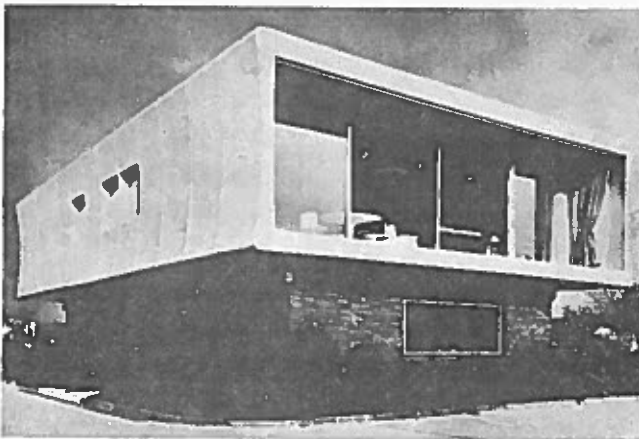
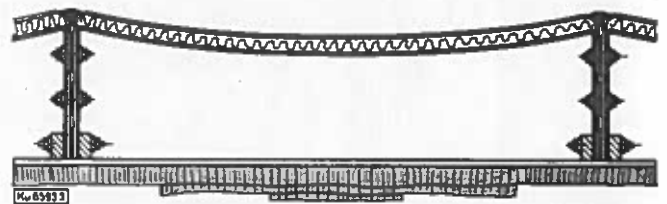


Bild 1.3 Kunststoffhaus fg 2000



Querschnitt durch das 9,2 m lange, 1,25 m breite und 0,4 m hohe freitragende Dachelement. Die Flanschen bestehen aus einem 10 mm dicken Mattenlaminat und sind im unteren Bereich durch 200 Rovingstränge verstärkt. Den Abschluß nach unten bildet eine Trageplatte zur Befestigung des Deckenteppichs

(Beide Abbildungen sind Werkbilder Wolfgang Feierbach, Kunststofftechnik, Altenstadt/Hessen)

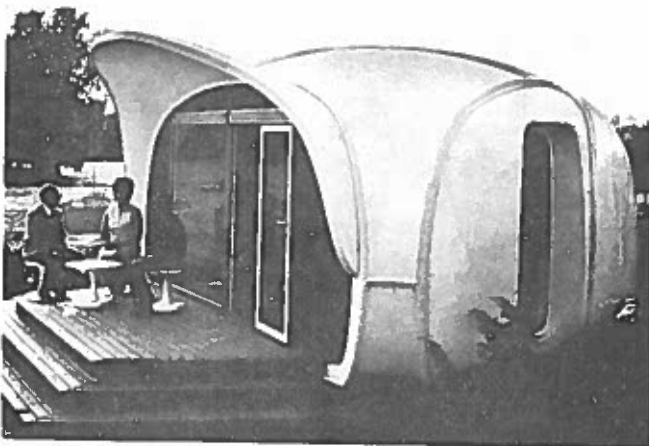


Bild 1.4 Wohnzelle

Sphärisch gekrümmte, selbsttragende Sandwichelemente aus GFK-Schalen und PVC-Hartschaumkern bilden das Uni-Dome-Bausystem. Ferienhaus mit rd. 18 m<sup>2</sup> Nutzfläche im Grundriß eines gleichseitigen Dreiecks (Foto: Chemische Werke Hüls AG, Mart)



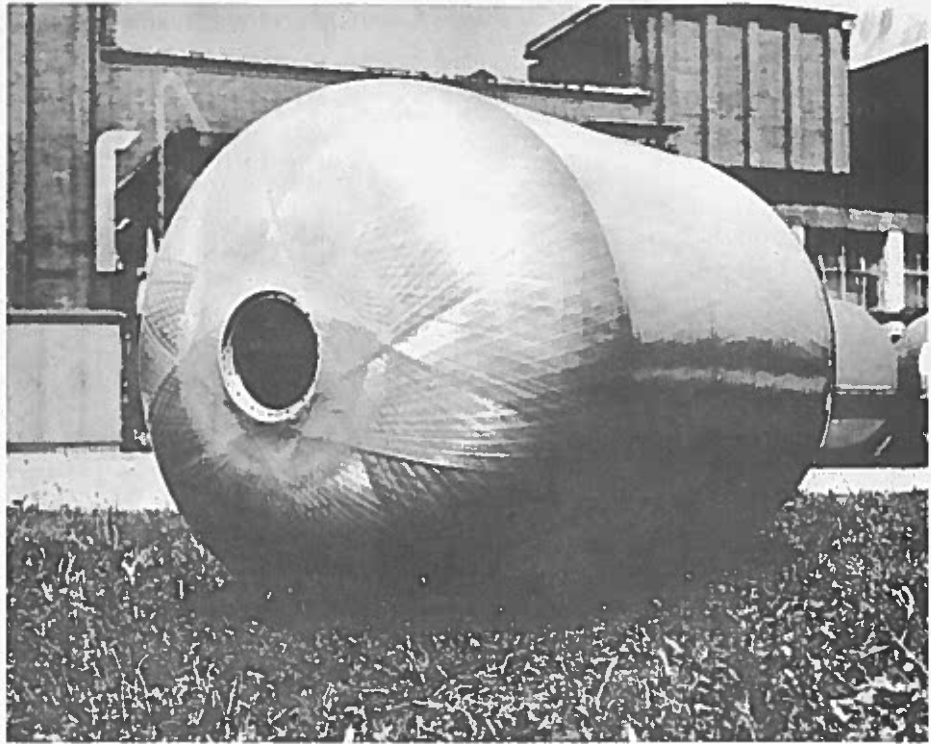


Bild 1.1 Druckbehälter aus GFK  
(Foto: M.A.N.-Neue Technologie, München)

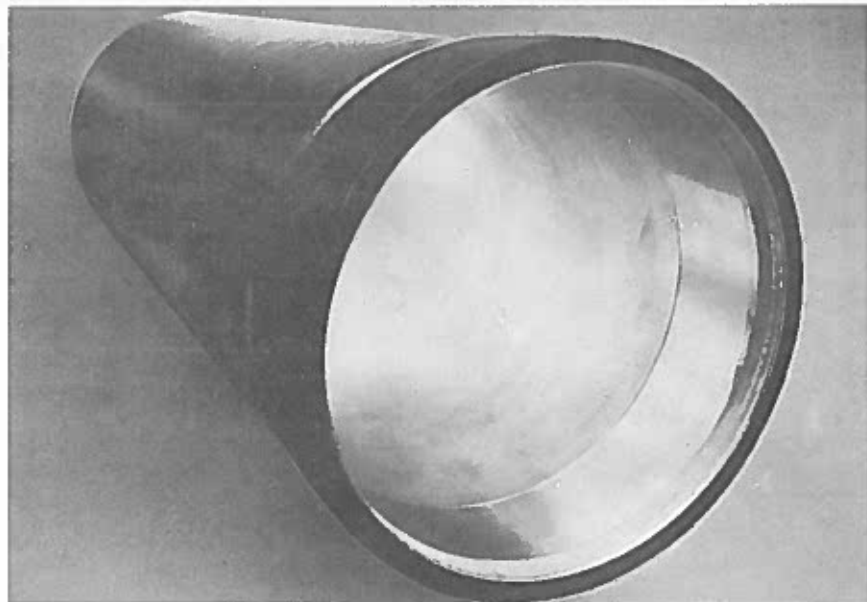
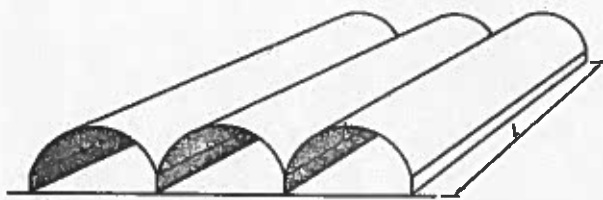
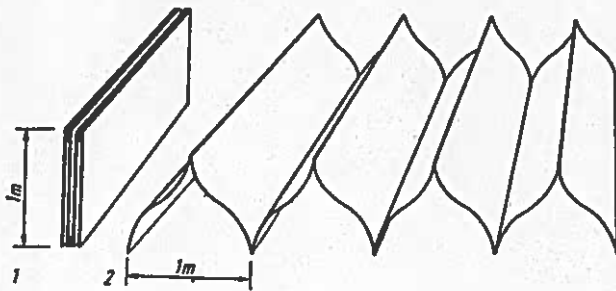


Bild 1.2 CFK-Rotor mit metallischer Innenauskleidung  
(Foto: M.A.N.-Neue Technologie, München)



Lange Tonnenschalen mit Randträgern

Bild 1.5  
Dachelementformen  
[HINTERSDORF]



Faltdach aus ebenen GFP-Laminaten  
1 ungereckt; 2 gereckt

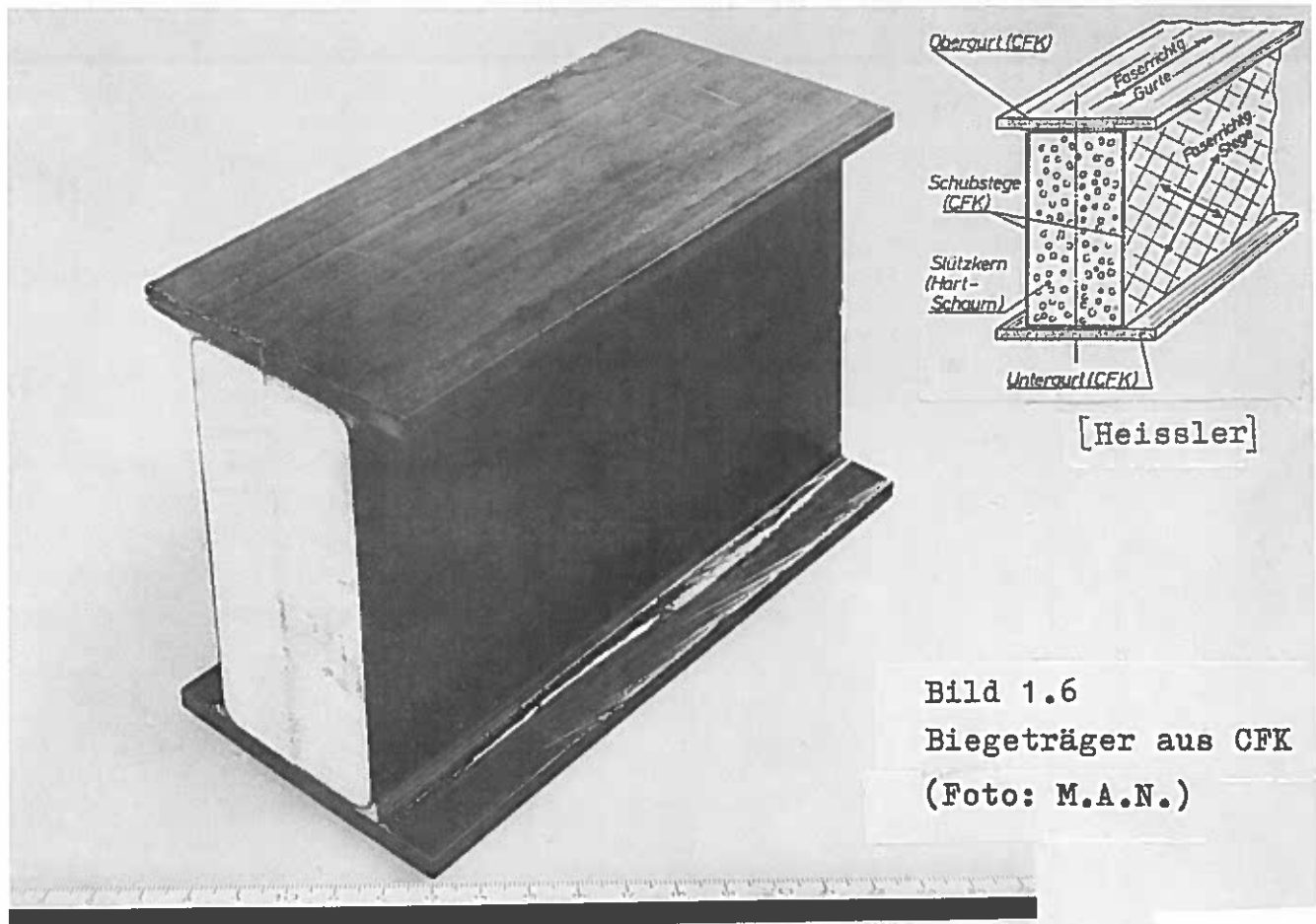


Bild 1.6  
Biegeträger aus CFK  
(Foto: M.A.N.)

## 2. Der Verbund und die Merkmale seiner Komponenten

Erfolgreiches Arbeiten mit faserverstärkten Kunststoffen setzt eine genaue Kenntnis aller Verbundkomponenten und der durch sie bedingten Fertigungsmöglichkeiten (Kapitel 3) voraus. Bild 2.1 gibt einen Eindruck über das Miteinander der Verbundkomponenten, und zwar der Komponente Faser in der Komponente Harzmatrix.

Eine kurze Zusammenstellung der die Auslegung wesentlich beeinflussenden Größen des Verbundes und seiner Komponenten ist der Inhalt dieses Kapitels. Wir beschränken uns in ihm auf die Beschreibung solcher Fasern und Matrices, die zur Zeit am meisten eingesetzt werden.

### 2.1 Fasern

Die Faser ist der entscheidende Bestandteil der verstärkten Kunststoffe. Sie bewirkt Festigkeit und Steifigkeit des tragenden Bauteils.

Allgemein gibt es zwei Fasersorten, -die organische und die anorganische-, von denen die anorganische als Verstärkungsfaser von größerer Bedeutung ist. Im folgenden sollen die wesentlichen Kenngrößen von Fasern vorgestellt werden. Dazu wird auch (unterschiedlich tief) auf die Herstellung eingegangen, weil diese starken Einfluß auf die Eigenschaften hat. Zwischen den hauptsächlich verwendeten Fasern werden in den einzelnen Faserabschnitten Vergleiche gezogen, die für die Festigkeitsauslegung von Interesse sind.

Eine Auflistung der behandelten Fasern und ihren Eigenschaften ist in Tabelle 2.1 zu finden. Einen Überblick über die Querschnitte üblicher Fasern vermittelt Bild 2.2.

#### 2.1.1 Glasfasern

Glas ist ein anorganisches Schmelzprodukt, das ohne Kristallisation erstarrt. Entsprechend seiner Zusammensetzung hat es verschiedene Eigenschaften, die je nach Anwendungsbereich interessant sind. Wegen ihrer hohen spezifischen Festigkeit sind verspinnbare bzw. textile Glasfasern von größter Bedeutung für die Verstärkung von Kunststoffen.

Die Herstellung der Glasfasern erfolgt z.B. mit dem Düsenziehverfahren. Dieses Verfahren ergibt Glasfasern von üblicherweise 9 bis 13  $\mu\text{m}$  Durchmesser (Bild 2.2, [VDI 2010, Bl. 1]) und unterschiedlicher

Länge. Bei der Bildung von E-Glasfasern (zum Vergleich mit anderen Fasern dient Tabelle 2.1) sind Temperaturen von 1250° C notwendig. Die Abkühlung des flüssigen Glases erfolgt in Teilen einer Mikrosekunde.

Endlosfasern (=Fäden) führen die Bezeichnung Glasseide, während Fasern endlicher Länge Glasstapelfasern genannt werden. Wegen ihrer umfassenden Einsatzmöglichkeit (günstige elektrische Eigenschaften, höhere mechanische Werte, niedriger Preis) haben E-Glasfasern die größte Bedeutung erlangt [VDI 2012]. Für besonders hohe mechanische Beanspruchung werden in der Wickeltechnik S-Fasern eingesetzt. Seit einiger Zeit ist ein noch besseres Glas, das X-Glas auf dem Markt erhältlich. Für hochbeanspruchte Verbundbauteile sind im wesentlichen nur Produkte aus Endlosfasern von Bedeutung.

Als Festigkeitswerte werden für den Faden hinter der Spinndüse (vor der Aufspulung) sehr hohe Werte gemessen, die bei weitem nicht in einer Rechnung angesetzt werden können. Bei E-Glasfäden z.B. wird eine ursprüngliche Faserfestigkeit von  $\sigma_{\text{Faser}} = 3500 \text{ N/mm}^2$  gemessen. Infolge des sogleich einsetzenden Festigkeitsabfalls im umgebenden Medium Luft bleibt nur mehr ein rechnerischer Wert von  $2000 \text{ N/mm}^2$  zurück.

Abhängig von der Glassorte kann man bei Fadendicken von  $5 \mu\text{m}$  mit 4 % und bei  $10 \mu\text{m}$  mit 2,5 % elastischer, reversibler Fadendehnung rechnen. Glasfasern haben keine Streckgrenze im Sinne von Metallen. Irreversible Dehnungen, <sup>ähnlich</sup> wie sie bei Metallen vorkommen, beruhen nur auf Verschiebungen der vielen Elementarfäden eines Spinnfadens untereinander. Dabei ist der Wert in Garnen und Zwirnen aufgrund der Verdrehung größer als in Spinnfäden. Glasfasern quellen nicht und nehmen auch kein Wasser auf.

Im Vergleich zu den anderen technisch einsetzbaren Fasern haben die Glasfasern drei wesentliche Vorzüge: Sie haben eine sehr hohe spezifische Festigkeit (Reißlänge  $\sigma_F / \gamma_F$ ), sind äußerst preiswert und ohne große Schwierigkeiten zu verarbeiten. Nachteile der Faser sind die hohe Bruchdehnung im Verbund, die quer zur Faser leicht zur Harzrißbildung führt. Weiter die zu geringe Steifigkeit, und zwar liegen die Bruchdehnungen bei mehr als 2,5 %, während z.B. bei Kohlenstofffasern diese kleiner 1,3 % sind.

<sup>1)</sup> Zum Beispiel hat ein Kreuzverbund mit hohem  $\epsilon_{11}$  auch ein großes  $\epsilon_{11}$ .

### 2.1.2 Borfasern

Wo hohe Steifigkeiten gefordert werden, bzw. wo kleine Verformungen erwünscht sind, gelangen Bor- und die später behandelten Kohlenstofffasern zur Anwendung.

Ein hoher Elastizitätsmodul wird von den zwischenatomaren Bindungskräften (die Festigkeit hingegen von der Anzahl der Fehlstellen) bestimmt. Diese zwischenatomaren Bindungskräfte hängen wiederum von der Elektronenkonfiguration ab, so daß das Periodensystem als Richtungsanzeiger für hohe spezifische Elastizitätsmoduln dienen kann. Als die ersten geeigneten Elemente heben sich dabei Bor und Kohlenstoff heraus.

Die Herstellung des zumeist verwendeten Bor/Wolfram (B/W)-Fadens erfolgt mittels eines Abscheideverfahrens aus einer Bortrichlorid-Wasserstoff-Gasphase. Als Abscheidegrundlage dient eine  $12\ \mu\text{m}$ -Wolframfaden, der durch Widerstandsheizung auf der notwendigen Abscheidetemperatur von ca.  $1200^\circ\text{C}$  gehalten wird. Die Borschicht läßt man meistens bis zu einem Gesamtdurchmesser von  $100\ \mu\text{m}$  anwachsen, während der Faden kontinuierlich durch die Abscheidekammer gezogen wird. Neuerdings stellt man auch Borfäden von  $140\ \mu\text{m}$  Durchmesser her, um den Gewichtsanteil des achtmal schwereren Wolframs zu reduzieren.

Der metallisch glänzende Borfaden zeigt eine -mit einer Maiskolbenstruktur vergleichbare- rauhe, gegliederte Oberfläche, die auf eine gute Haftung in der Matrix schließen läßt. Die Fasern werden in Längen bis zu 300 m geliefert.

Vorteile der Borfaser sind die hohe Steifigkeit und die gute Haftung im Verbund. Das Ermüdungsverhalten der Faser zeigt keinen nennenswerten Festigkeitsverlust Studie GFK bis  $10^7$  Lastwechsel. Wird der Faden in einer Matrix (meistens Aluminium) vor Luftzutritt geschützt, so bleibt bis  $500^\circ\text{C}$  seine Festigkeit unverändert. Der Wärmeausdehnungskoeffizient ist größer als bei Kohlenstofffasern und ähnlich wie bei Glasfasern.

### 2.1.3 Kohlenstofffaser (Carbonfaser)

Bedingt durch ihre hohe Zeitstandfestigkeit und ihre große spezifische Steifigkeit  $E/\rho$  werden Kohlenstofffasern (C-Fasern) zunehmend als Verstärkungselemente von Maschinenbauteilen verwendet.

Da in diesem Buch der Verfasser -aufgrund seiner Erfahrungen mit CFK- den Schwerpunkt auf Kohlenstoffasern setzt, soll zum besseren Verständnis das Werkstoffverhalten dieser vielfältigen Fasern unter Zuhilfenahme der Literatur [Fenninger] beschrieben werden:

Die Herstellung von Kohlenstoffäden verläuft meist über einen Textilfaden als Zwischenprodukt. Zur Zeit bevorzugt man Zellulose (Rayon) oder Polyacrylnitril (PAN) als Ausgangsstoff. Bei Rayonfasern handelt es sich um Garne mit einer durchschnittlichen Elementarfadenzahl von 1500, bei PAN-Fasern um Stränge mit einer Elementarfadenzahl bis zu 10 000. Ein japanisches Verfahren verarbeitet teer- und pechartige Rückstände zur Herstellung von Kohlenstoffäden.

Die Umwandlung der Ausgangsfasern zu Kohlenstoffasern erfolgt in drei Stufen. In einem thermischen Abbauvorgang müssen aus den Textilfäden alle Bestandteile, mit Ausnahme des Kohlenstoffs, entfernt werden. Dann liegt -von der elementaren Zusammensetzung her- bereits ein Kohlenstoffaden vor.

Da der Faden aber eine möglichst hohe Festigkeit und einen möglichst hohen E-Modul haben soll, sind -außer weiterer Temperaturbehandlung- noch andere Maßnahmen erforderlich. Für die Qualität des Endproduktes ist es dabei von entscheidender Bedeutung, durch eine geeignete Spannvorrichtung ein Schrumpfen des Fadens zu verhindern (Bild 2.3) und darüberhinaus eine Streckung von etwa 30 % bei einer Temperatur von über 2000° C vorzunehmen. Dadurch richten sich die, während des Verkohlungsprozesses entstandenen, Graphitkriställchen parallel zur Fadenlängsachse aus.

Strebt man einen Kohlenstoffaden von höchster Zugfestigkeit an, so reicht in der Endstufe eine Temperatur von etwa 1500° C aus. Soll der Elastizitätsmodul gesteigert werden, so ist eine abschließende Behandlung bei über 2500° C nötig, die aber die maximal mögliche Zugfestigkeit wieder um 20 bis 30 % verringert. Durch Änderung der Temperatur, der Aufenthaltsdauer in den verschiedenen Temperaturzonen und der Vorspannung des Fadens kann man die Eigenschaften des Kohlenstoffadens innerhalb eines weiten Bereichs variieren.

Eine sehr hohe Zugfestigkeit ist praktisch kaum in Verbindung mit einem sehr hohen Elastizitätsmodul zu erhalten, so daß, den Auslegungsanforderungen entsprechend, neben Mischformen wie der A-Faser, verschiedene Extremtypen im Handel angeboten werden, die HM- (High Modulus) und die HT- (High Tensile) Faser (Bild 2.4). Auf Rayonbasis

Auf Rayonbasis gelang es allerdings auch, eine HT/HHM (High Tensile/High-High Modul.)-Faser zu entwickeln.

Eine Strukturuntersuchung weist in graphitisierten Textilfäden Kristallite nach, die eine große Längsausdehnung haben (Fibrillen). Diese Kristallite zeigen eine bevorzugte Ausrichtung parallel zur Fadenlängsachse. Die ausgeprägte Anisotropie der Fäden äußert sich makroskopisch im hohen Elastizitätsmodul.

Der wesentliche Unterschied der Herstellungsverfahren liegt darin, daß beim Rayon-Faden das Material nach Ablauf eines Karbonisierungsprozesses bei ca.  $2500^{\circ}$  C verstreckt wird und so die Ausrichtung von Netzebenen erfolgt, während bei der Verwendung der PAN-Fäden diese Ausrichtung durch Verstreckung des Ausgangsmaterials in der Tieftemperaturphase erfolgt.

Die Lieferung der C-Fasern erfolgt in Strängen begrenzter oder unbegrenzter Länge Studie GFK oder auch als geschnittene Kurzfaser. Der Durchmesser der Einzelfäden in den Strängen liegt im Bereich von 7 bis  $10\mu\text{m}$ . Die Zahl der Einzelfäden pro Strang variiert je nach Herstellungsweise von einigen 100 bis zu 10000. Zum besseren Zusammenhalt des Strangs kann ihm ein leichter Drall gegeben werden. Bei Verwendung von PAN als Vorprodukt ist die Oberfläche des Elementarfadens glatt mit annähernd kreisförmigem Querschnitt. Fäden auf Rayonbasis zeigen Riefen in der Fadenlängsrichtung, die von den entsprechend geformten Ziehdüsen für Zellulosefäden herrühren.

Innerhalb der verschiedenen Kohlenstofffasern könnte man zwischen vier Gruppen unterscheiden, wenn als Unterscheidungsmerkmal die Dehnung herangezogen wird (Tab. 2.2). Neuerdings ist es möglich, bei C-Fasern (mit Acryl-Ausgangsmaterial) durch eine spezielle Oberflächenbehandlung die Bruchdehnung bis auf  $\epsilon_b = 1,5\%$  (Mittelwert) zu steigern [Thorne]. Welche dieser Gruppenam geeignetsten ist, hängt von den Anforderungen an die zu bauende Konstruktion ab. Dabei werden die Werkstoffkosten von der Qualität (Mittelwert und Streuung), der Art und der bestellten Menge an Fasern abhängen. Die Preise in der Tabelle sind deshalb nur als Orientierungsdaten zu sehen. Allgemein gilt entsprechend dem Energieaufwand: HM-Fasern sind teurer als HT-Fasern.

Beim Vergleich mit anderen Fasern sticht die Mannigfaltigkeit der Kohlenstofffasern ins Auge. Die spezifischen Festigkeiten der C-Faser liegen ebenfalls sehr hoch, doch ist im allgemeinen die Erfahrung zu berücksichtigen, daß der Ausnutzungsgrad der mittleren Faserfestigkeit mit der Abnahme der Bruchdehnungswerte geringer wird. Bei einer

Auslegung auf Steifigkeit, wobei die Fasern selten voll belastet werden, hat diese Erfahrung keine Bedeutung.

Als Vorteile der Kohlenstofffasern sind -gegenüber den Glasfasern und auch den Kevlarfasern- die hohe bis äußerst hohe spezifische Steifigkeit und der noch kleinere Wärmeausdehnungskoeffizient zu nennen. Gegenüber Borfasern ist das geringere spezifische Gewicht erwähnenswert.

Bei der Verarbeitung zeigt sich, daß Kohlenstofffasern gegenüber dickeren Fasern, z.B. Borfasern, beim Wickeln den Vorteil haben, kaum eine Vorschädigung durch Biegung um die Fadenführungsrollen zu erfahren. Einen weiteren Vorteil, der für dickere Verbundhüllen allerdings uninteressant ist, stellt die Möglichkeit einer günstigen Dickenabstimmung bei den dünneren Kohlenstofffasern dar. Mitentscheidend für CFK gegenüber BFK wäre schließlich noch der günstigere Preis.

#### 2.1.4 Kevlarfaser

Mit der Entwicklung der Kevlarfasern durch die Firma Du Pont ist es zum ersten Mal gelungen, eine organische Faser von höchster Reißfestigkeit und von hohem Elastizitätsmodul in kommerziellen Mengen zu bekommen [Du Pont, 1973].

Über die Herstellung dieser organischen Faser ist bisher noch nichts veröffentlicht worden. Chiao/Moore identifizierten sie aufgrund von Laboruntersuchungen als eine Poly-p-benzamid-Verbindung.

Besonders erwähnt zu werden verdient <sup>die</sup> im Gegensatz zu anderen organischen Fasern hier vorliegende lineare Spannungs-Dehnungs-Kurve, (ähnlich wie bei Glas- und C-Fasern) und die Haltbarkeit dieser Faser. Der gleichförmige Aufbau der Kevlarfaser über dem Durchmesser und über der Länge ist besser als bei anderen Fasern. Die Faser übersteht sogar das Zusammenziehen beim Knotenversuch. Damit kann der Schluß gezogen werden, daß ein besserer Abbau von Spannungskonzentrationen möglich ist. Die Ermüdungs- und Kriecheigenschaften sind denen von S-Glas überlegen [Hoggatt]. Temperaturen von 170<sup>0</sup> C wirken sich auf die ungeschützte Faser noch nicht aus. Es wird jedenfalls bei anschließender Belastung kein Festigkeitsabfall bemerkt [Du Pont]. Die Ausnutzung der reinen Faserfestigkeit ist besser als bei Glasfasern. Der Webprozeß bei der Herstellung vom Gewebe bringt nämlich relativ wenig Festigkeitsverlust (bei Glas- und Kohlenstofffasern wäre die Schädigung bei mechanischer Verarbeitung durch die Sprödbrechigkeit dieser Fasern hervorgerufen worden).



Zusammengefaßt kann gesagt werden: Die Kevlarfaser hat die zur Zeit höchste spezifische Festigkeit aller Fasern, eine hohe Schlagfestigkeit und ein gutes Wärmeisolationsverhalten. Nachteilig kann sich die relativ geringe Druckfestigkeit auswirken. Ob die -gegenüber Glasfasern- höhere spezifische Steifigkeit schon ausreicht, muß im einzelnen Anwendungsfall geprüft werden.

### 2.1.5 Sonstige Fasern

#### a) Whisker (monokristallin)

Obwohl vorläufig noch Labormaterialien, bieten sich Whisker (deutsch: Haarkristalle) für die Zukunft an. Whisker sind nadelförmige Einkristalle, die, bei hohem Reinheitsgrad und weitgehend fehlerfreier Kristallstruktur, in ihren Festigkeiten dem theoretischen Wert  $-0,1 \times E\text{-Modul}$  nach Griffith [Geiger/Fueller, 1972] recht nahekommen.

Die Herstellung der verschiedenen Whisker geschieht durch Wachsen des Einkristalls aus der jeweiligen Dampfphase [VDI 2010, Bl. 1] oder der wäßrigen Lösung. Bei einem Durchmesser zwischen 1 und  $50 \mu\text{m}$  erreichen die Whisker Längen bis zu einigen Millimetern. Bekannt sind  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -, SiC- und C-Whisker. Da mit der Länge eines Fadens immer mehr Fehlstellen auftreten und da Festigkeit und Whiskerdurchmesser nahezu reziprok zueinander sind, geht die Entwicklung zu einer orientierten Anordnung von kurzen Fasern in Whiskerfilzen. Diese werden später mit Harz getränkt. Eine solche Bearbeitung wird durch den Anlieferungszustand der rohen Whiskerfasern in einem Knäuel erzwungen, der anschließend durch Schneiden, Sieben und Faserausrichtungsverfahren aufbereitet werden muß.

Die Vorteile der Whisker für den Leichtbau liegen in den Reißlängen (bis 1000 km bei Graphit-Whiskern) und einem E-Modul bis  $10^6 \text{ N/mm}^2$ . Als höchste Festigkeitswerte wurde bei Saphir-Whiskern ( $\alpha - \text{Al}_2\text{O}_3$ ) Werte bis  $40000 \text{ N/mm}^2$  gemessen [Studie GFK]. Die Vorteile der Whisker kommen festigkeitsmäßig erst bei erhöhten Temperaturen zum Tragen (gutes Warmverhalten), Bild 2.5. Nachteile der Whisker sind vorläufig der noch sehr hohe Preis für diese Laborprodukte, die großen Festigkeitsstreuungen und die Handhabung.

Das Spannungs-Dehnungsverhalten ist elastisch.

#### b) Metallfäden (polykristallin)

Feine Metalldrähte können in Stufen bis zu  $10 \mu\text{m}$  ausgezogen werden

[VDI-BW 1674]. Als Werkstoffe dienen dazu Stahl, Aluminium und Wolfram. Der Nachteil dieser Fäden ist ihre hohe spezifische Dichte, die ihren Einsatz in Kunststoffen auf Anwendungsfälle beschränkt, in denen z.B. gute elektrische Leitfähigkeit und Temperaturbeständigkeit gefragt sind.

### c) SiC-Faden

Ähnlich dem Borfaden kann auch ein SiC-Faden durch Abscheidung aus der Gasphase auf einen glühenden Draht erhalten werden Fenninger, VDI-BW 1674 . Bei vergleichbaren Festigkeitseigenschaften im Raumtemperaturbereich erweist er sich bei höheren Temperaturen dem Borfaden überlegen, sowohl in Hinblick auf die strukturelle Festigkeit als auch auf Reaktionsbeständigkeit. Von Nachteil ist die höhere Dichte von  $3,4 \text{ g/cm}^3$ . Ein SiC-Faden zeigt bei  $550^\circ \text{C}$  erst eine Festigkeitsabnahme von etwa 10 % und hat noch bei  $1280^\circ \text{C}$  50 % seiner Festigkeit bei Raumtemperatur. Es müssen somit erst neue Matrixsysteme entwickelt werden, damit diese Eigenschaften voll genutzt werden können.

Durch Aufbringen einer 2 bis  $3 \mu\text{m}$  dicken SiC-Schicht auf der Borfadenoberfläche erreicht man eine Verbindung der guten Eigenschaften beider Fadenarten. Der SiC-Faden bewährt sich vor allem zur Versteifung von Metallen, insbesondere von Aluminium, in das es unter Temperaturen eingearbeitet werden kann, die beim ungeschützten Borfaden zur Reaktion mit der Metallmatrix führen.

## 2.2 Matrix (Bettungsmasse)

### 2.2.1 Allgemeines

Die Matrix eines Verbundes hat folgende Funktionen zu übernehmen:

- Schutz der Oberfläche der einzelnen Fasern;
- Trennung der Fasern voneinander;
- Übertragung der Last auf die Fasern;
- Beeinflussung des Rißfortschrittes (bruchmechanisch);
- Übertragung der Kräfte von den Enden gerissener Fasern;
- Gewährleistung einer dem Problem angepaßten ausreichenden Bruchdehnung.

Diese letzte Funktion der Matrix soll noch etwas ausführlicher erklärt werden. Werden z.B. Faden und Matrix in derselben Richtung belastet, so sind die axialen elastischen Verschiebungen von Faden

und Matrix verschieden. Die Ursache dafür liegt in den unterschiedlichen Elastizitätsmoduln. Für die Matrix bedeutet das, daß zwischen ihr und den Fäden Schubspannungen parallel zu den Fäden auftreten müssen, um die Last auf den gesamten Querschnitt übertragen zu können.

Wenn nun die Fäden die Last fast allein tragen, muß die Bruchdehnung der Matrix erheblich höher sein, damit die Lastverteilung auch bis zur Bruchdehnung der Fasern durch die Matrix erfolgen kann. Eine hohe Bruchdehnung bei Normaltemperatur ist bei einer Harz-Matrix besonders wichtig, wenn kryogene Temperaturen im Betrieb vorliegen, bei denen der Bruchdehnungswert etwa auf ein Viertel des Raumtemperaturwertes zurückgeht.

Da es im Rahmen dieses Buches mehr um Leichtbaustrukturen geht, sollen im weiteren nur Harz-Matrizes behandelt werden. Auf die auch im Flugzeugbau verwendeten Aluminium-Matrizes wird nicht eingegangen.

Die vorgenannten Funktionen der Matrix stellen bestimmte Anforderungen an das Harz, die, verbunden mit Umweltbedingungen (z.B. Betriebstemperatur, Korrosionsgefahr), ein Ausschauen des für den speziellen Verwendungszweck geeignetsten Matrixsystems notwendig machen. Wie wichtig das ist, zeigen Versuche, bei denen der große Einfluß der Matrix bei Beulung, Biegung, Schub und Temperatur erfaßt wurde.

Im wesentlichen besteht ein Harzsystem aus drei Komponenten: dem Reaktionsharz, dem Verdünner und dem Härter (Reaktionsmittel), die in bestimmten Verhältnissen miteinander vermischt werden. Das Reaktionsharz bestimmt dabei folgende Eigenschaften [VDI 2010, Bl.1]: Chemiekalienfestigkeit, Alterungsbeständigkeit, Wärmestandfestigkeit, Brandverhalten, Abriebfestigkeit, elektrische Eigenschaften und Schwindung beim Härten. Dichte, Wärmeleitfähigkeit, Wärmedehnung und spezifische Wärme hängen vom Mengenverhältnis der Komponenten Reaktionsharz, Reaktionsmittel und etwaiger Füllstoffe ab. Das Mischungsverhältnis und die Art der Komponenten bestimmen den Härtezyklus, dem der Verbund später unterworfen wird.

### 2.2.2 Kunstharztypen

Als Matrixwerkstoffe werden z.Z. überwiegend Epoxid-, Polyester-, Silikon-, Polyimid- und thermoplastische Harze verwendet. Diese Polymere kann man wiederum in Duromere und Thermomere unterteilen

Tabelle 2.3

Bild 2.6 zeigt eine Gegenüberstellung dieser beiden Typen. Aufgrund der dort angegebenen Eigenschaften -räumliche Vernetzung der Moleküle beim Aushärten und Wärmeformbeständigkeit- sind als sogenannte Reaktionsharze die Duromere am geeignetsten. Zu ihnen zählen die ungesättigten Polyester-(UP-RH) und die Epoxidreaktionsharze (EP-RH). Beide Reaktionsharztypen erfüllen aufgrund ihrer spezifischen Eigenschaften ganz bestimmte Forderungen, so daß der jeweilige Anwendungszweck genau bekannt sein muß. Eine Zusammenfassung der Vorteile von EP-RH und UP-RH bietet die Tabelle 2.4 (aus dem VDI-Seminar, BW 1591). Bei Zugbeanspruchung, und wenn die Faserorientierung in Zugrichtung vorgenommen ist, zeigen UP-RH bei Normaltemperatur <sup>im Verbund</sup> kaum schlechtere Ergebnisse als EP-RH.

Neuere Reaktionsharze wie z.B. Polychinoxaline und Polyimide, verbinden hohe mechanische Festigkeit mit hoher Temperaturbeständigkeit. Diese RH haben aber bisher noch keinen großen Einsatz gefunden. Beim Übergang vom flüssigen Verarbeitungszustand in den festen Zustand tritt eine Volumenschwindung um 5 bis 8 % bei UP-, bis 6 % bei Polyimiden, um 1 bis 3 % bei den üblichen EP- und praktisch keine bei den Low-Profile-EP-Reaktionsharzen (LP) ein, was natürlich ausschlaggebend für die vorzugsweise Verwendung von EP-Harzen bei stärker beanspruchten Bauteilen ist. Die mit EP-RH gefertigten Bauteile haben infolge der kleineren Schwindung geringere Eigenspannungen und größere Maßgenauigkeit. Leider ist im allgemeinen das Entformen schwieriger.

In Bild 2.7 ist die Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls eines bestimmten Epoxidharzes von der Temperatur aufgetragen. Wie ein für Epoxidharze typisches Spannungs-Dehnungsdiagramm aussieht, wird im Bild 2.8 für eine spezielle Sorte beispielhaft gezeigt.

Häufig ist es notwendig, die Eigenschaften der Reaktionsharze durch Modifizierungsmittel zu verändern. Dazu dienen die sogenannten Verdüner zum Erniedrigen der Viskosität des Harzes und die Flexibilisatoren bzw. Weichmacher zum Erniedrigen der Sprödigkeit.

Eine Zusammenstellung über EP-Harzsysteme und einige andere Harzsysteme ist in Tabelle 2.5 zu finden. Als Bereich für die Epoxidharze kann  $E = 2,5 \cdot 10^3$  bis  $7 \cdot 10^3$  N/mm<sup>2</sup> gelten. Die Dichte liegt im Bereich von 1,12 bis 1,22 g/cm<sup>3</sup>.

### 2.2.3 Reaktionsmittel

Als Reaktionsmittel für den Aushärtungsprozeß gibt es Kalthärter und Warmhärter. Kalthärter reagieren schon bei Raumtemperatur, während Warmhärter erst ab 80° C die chemisch freien Gruppen im Harz binden. Das hat zur Folge, daß beim Warmaushärten zumeist Beschleuniger der Härtingsreaktion eingesetzt werden müssen.

### 2.2.4 Einige Bemerkungen zum Einsatz von Harzsystemen

Für hochbeanspruchte Behälter, rotierende Scheiben und Metallverstärkungen nimmt man in der Regel Epoxidharze, weil sie eine gute chemische Beständigkeit aufweisen und sowohl im kryogenen Bereich als auch im Bereich bis 180° C einsetzbar sind. Grundsätzlich ist es deshalb wichtig, daß man weiß, ob das verwendete Harzsystem kalt-, warm- oder heißaushärtend ist. Das gilt z.B. direkt für Temperaturbelastungen eines sogenannten Liners.

Bei einem faserverstärkten Metalltank ist es sinnvoll, kein heißaushärtendes Harz zu nehmen, da sonst nach dem Aushärtungsprozeß der Verbund klafft und nicht mehr genügend dicht am Metallteil anliegen wird, mit der Folge, daß sein Traganteil reduziert ist. Auf jeden Fall muß (Bild 2.9) die Bruchdehnung des Harzes erheblich größer als die des Verstärkungsmaterials sein.

### 2.3 Grenzschicht und Fadenbeschichtung

Bei einem Verbundsystem sollte die Haftfestigkeit in den Grenzflächen mindestens so groß sein wie die Scherfestigkeit in der Matrix, um eine Übertragung von äußeren Kräften auf die Fasern zu ermöglichen [Geiger/ Füller]. Eine Beeinflussung dieser Haftung und gleichzeitig auch der Benetzung ist durch Aussuchen von geeigneten Matrix-Faden-Kombinationen, durch chemische Oberflächenbehandlung der Fasern und durch Beschichtung der Fasern möglich.

Nach Festigkeitgesichtspunkten liegt die Bedeutung von Grenzschicht und Beschichtung in

- der Übertragung der Spannungen von der Matrix zur Faser;
- dem Schutz der Fasern vor mechanischer Beschädigung;
- der Unterstützung der Benetzung und der Haftung;
- dem Rißstoppereffekt;
- der Beeinflussung -speziell bei Kurzfasern- der Faser-  
verteilung und des Faservolumenanteils.

Diese Funktionen zu erfüllen, helfen die sogenannten Schichten und die Haftvermittler (Finishes). Um z.B. Glasfasern (ähnliches gilt für andere Fasern) vor mechanischen Beschädigungen zu schützen und zu Bündeln zu vereinigen, werden während des Herstellvorganges die Glasfasern mit einer Schichte versehen. Die Schichten beinhalten häufig Haftvermittler, so daß die behandelten Fasern direkt weiter verarbeitet werden können. Dabei hängt die Art des Haftvermittlers vom Reaktionsharz ab. Werden hingegen textile Schichten verwendet (Stärke-Öl-Gemische), so müssen die Fasern vor der Verarbeitung entschlichtet und dann mit Haftvermittlern versehen werden.

Die o.g. Funktionen lassen erkennen, daß die Güte der Grenzschicht und das gegenseitige Benetzungsverhalten von Faser und Matrix den Fasernutzungsgrad beeinflussen. Von der Matrix-Faser-Haftung hängen das Dehnungsverhalten und die Feuchtigkeitsempfindlichkeit eines Laminates ab. Schlecht haftendes Harz löst sich bei Zugbeanspruchung von der Faser; in die so entstehenden Mikrorisse dringt Feuchtigkeit ein und greift die bloßliegende Faser an.

## 2.4 Verbund

### 2.4.1 Allgemeines

Es liegt in der Natur faserverstärkter Werkstoffe, daß sie bevorzugte Festigkeitsrichtungen aufweisen, und daß daher für eine richtige konstruktive Anwendung die Kenntnis sowohl der Hauptbelastungsrichtung als auch der Hauptfestigkeitsrichtung Voraussetzung ist. Während also bei Verwendung isotroper Materialien Fehler hinsichtlich der Lastannahme durch den Werkstoff in begrenztem Maße durch mehrachsiges Tragverhalten ausgeglichen werden, besteht ein solcher Spielraum bei mit Glasfasern und insbesondere bei mit Bor- oder Kohlenstofffasern verstärkten Werkstoffen nicht mehr. Wegen der nicht vorhandenen plastischen Dehnung sind Spannungsumlagerungen oder Spannungsausgleiche nur ganz beschränkt zu erwarten.

Zu einem kleinen Einblick in die Kennwerte einiger Verbundwerkstoffe im Vergleich mit metallischen Leichtbauwerkstoffen verhilft Tabelle 2.6

### 2.4.2 Spezifische Größen der Verbundwerkstoffe

Einen sehr großen Einfluß auf die Auswahl von Verbundwerkstoffen hat die spezifische Festigkeit bzw. Reißlänge des Verbundes. Ihre Formel

lautet (bei Vernachlässigung des bei guten Verbundbauteilen verschwindenden Luftanteils):

$$\frac{\sigma_v}{\gamma_v} = \frac{\sigma_F}{\gamma_F} \frac{\varphi + (1-\varphi) E_M/E_F}{\varphi + (1-\varphi) \gamma_M/\gamma_F} \quad (2.1)$$

Die Wertangabe erfolgt meistens in km.

Die andere wesentliche Beurteilungsgröße ist die spezifische Verbundsteifigkeit. Ihre Formel lautet (ebenfalls wieder ohne Luftanteil):

$$\frac{E_v}{\gamma_v} = \frac{E_F}{\gamma_F} \frac{\varphi + (1-\varphi) E_M/E_F}{\varphi + (1-\varphi) \gamma_M/\gamma_F} \quad (2.2)$$

Vergleicht man die beiden genannten spezifischen Eigenschaften von Metallen mit denen von Verbundwerkstoffen (bei Raumtemperatur, Bild 2.10), so sieht man, daß bei den Metallen die Eigenschaften in einem relativ engen Bereich liegen. Bei den Verbundwerkstoffen läßt sich jedoch eine große Kombinationsvielfalt zwischen spezifischer Festigkeit und spezifischer Steifigkeit erreichen.

Bei dem am häufigsten verwendeten Verbund, dem GFK-Verbund, liegen die spezifischen Steifigkeiten relativ niedrig (Tabelle 2.5). Erreicht wird aber eine hohe spezifische Verbundfestigkeit unter anderem durch den bei Glas möglichen sehr hohen Faseranteil  $\varphi$ , der gemäß der Formel 2.1 sich z.B. gegenüber CFK bei 10 % mehr Faseranteil als 5 % Festigkeitsverbesserung ausdrückt. Leider zeigen Glasfaserverbunde eine niedrigere Zeitstandfestigkeit als Kohlenstofffaserverbunde.

Ein Vergleich zwischen BFK und CFK fällt bei der spezifischen Verbundfestigkeit zugunsten von CFK aus, zumal BFK im allgemeinen einen niedrigeren Faservolumenanteil hat, wenn er weniger rißanfällig sein soll.

Bezüglich der spezifischen Steifigkeit ist nur hochmoduliges CFK dem BFK gleichwertig. Als Bettungsmassen werden beim BFK temperaturbeständige RH, z.B. Polyimide, eingesetzt. Häufig wird auch eine Aluminiummatrix herangezogen.

Beim CFK ist das Streuband der spezifischen Werte am größten. Dabei ist zu beachten, daß sich mit den HT-Fasern höhere Faservolumenanteile ( $\varphi \approx 65\%$ ) als mit HM-Fasern ( $\varphi \approx 60\%$ ) erreichen lassen. Außerdem sind die Kennwerte der hochmoduligen Fasern manchmal nicht so optimal erreichbar, weil bei kleiner Bruchdehnung eine immer vor-

handene ungleichförmige Faserbelastung im Verbundquerschnitt mehr ins Gewicht fällt, als bei einer Sorte mit größerer Bruchdehnung.

Wie Versuchsergebnisse zeigen, erbringt der preiswertere, aber festigkeitsmäßig in der Mitte liegende A-Typ fast gleiche Verbundwerte wie der HT-Typ. Da er obendrein noch unempfindlicher ist, wird ihm häufig der Vorzug gegeben. Probleme entstehen durch den praktisch verschwindenden Ausdehnungskoeffizienten in Längsrichtung bei Klebverbindungen mit Metallen.

Bedingt durch seine hohe Reißlänge ist Kevlarfaserverbund speziell in der Luft- und Raumfahrt wegen zusätzlicher Gewichtseinsparungen interessant. Wie die mechanischen Größen der gefertigten Bauteile bzw. Tabelle 2.5 zeigen, liegt Kevlar 49 III mit Epoxidharzmatrix zwischen Aluminium und glasfaserverstärkten Erzeugnissen einerseits und Bor- und Kohlenstoffserprodukten andererseits.

Ein Nachteil liegt bei diesem Chemiefaserkunststoff (ChFK) in der relativ niedrigen Druckfestigkeit. Durch Kombination mit geeigneteren Fasern kann dieser Nachteil etwas ausgeglichen werden.

Das Spannungs-Dehnungsverhalten der wichtigsten Verbundwerkstoffe im Leichtbau ist für Zugbeanspruchung aus den charakteristischen Kurven von Bild 2.11 zu entnehmen. Als Vergleichskurven sind die einiger Metalle angegeben. Es lassen sich aus dem Vergleich der Kurven auch verformungsverträgliche Paarungen ablesen.

Zum Schluß noch einige Bemerkungen:

Bei der Beurteilung der Verwendbarkeit faserverstärkter Verbundwerkstoffe dürfen nicht nur die mechanischen Eigenschaften bei Raumtemperatur betrachtet werden. Gerade beim Verbund ergibt sich häufig nur ein enger Temperaturbereich für die technische Einsetzbarkeit, es sei denn, es liegt ein Verbund mit einer Metallmatrix vor. Die Materialauswahl ist daher sehr von der Betriebstemperatur abhängig.

Mögliche Vorteile von sogenannten Hybrid-Verbundwerkstoffen (Kombinationen mehrerer Verbundarten) zeigt die Tabelle 2.7 an.



### 2.4.3 Einflußgrößen auf den Verbund

Jede Komponente erfüllt im Verbund wichtige Funktionen, deren Bedeutung zum Teil von der beabsichtigten Anwendung und der Beanspruchung des Verbundes abhängt. Welcher Art diese Funktionen sein können, wurde in den vorhergehenden Abschnitten behandelt. An dieser Stelle soll dargestellt werden, welche Parameter auf die Gewährleistung dieser Funktionen und damit auf die Eigenschaften des Verbundwerkstoffs Einfluß nehmen (Tab. 2.8).

Solche Parameter sind die Eigenschaften der Fasern und der Matrix und die Kraftübertragung Faser-Grenzschicht-Matrix. Es muß Ziel jeder Auslegung sein, diese Eigenschaften gemeinsam zu optimieren, um einen großen Ausnutzungsgrad der Fasern zu erhalten. Gute Fasern mit schlechter Grenzschicht oder ungeeigneter Matrix liefern einen schlechten Verbund.

Eine Zusammenstellung der wesentlichen Eigenschaften folgt hier in Anlehnung an Geiger und Füller:

- E-Modul und G-Modul der Faser;
- Bruchfestigkeit und Warmfestigkeit der Faser;
- Bruchdehnung der Faser;
- chemisch verträgliche und mechanisch robuste Faser;
- E-Modul und G-Modul der Matrix;
- Schubfestigkeit der Matrix;
- Bruchdehnung der Matrix;
- Wärmeausdehnungskoeffizienten von Faser und Matrix;
- gutes Haftungs- und Benetzungsverhalten zwischen Faser und Matrix;
- bei Kurzfasern die kritische Faserlänge für die Kraftübertragung.

Zu den Kurzfasern noch einige Hinweise. Nach der Theorie beruht die verstärkende Wirkung von Kurzfasern in einer Matrix auf der Tatsache, daß bei Belastung die isotrope Matrix den Lastfluß über Matrixschubbrücken in die Fasern einleitet. Die verstärkende Wirkung hängt vom Verhältnis Faserlänge zu Faserdurchmesser ab, so daß, gleiche Matrix vorausgesetzt, auch Kurzfasern große Festigkeit erbringen können. Maßgebend dafür ist die Kraft, die über die Oberfläche übertragen werden kann.

Wie ein aus mehreren Lagen gewickelter Verbund aussieht, wird am

Beispiel von CFK in Bild 2.12 gezeigt. Die Lufteinschlüsse weisen auf eine noch nicht optimale Erzielung aller Parameter bei der Fertigung hin.

#### 2.4.4 Einige rechnerische Verbundgrößen

Für jeden Verbund gilt, daß er aus den Komponenten Fasern, Matrix und Luft aufgebaut ist. Um den Einfluß der Komponenten auf die mechanischen Eigenschaften des Verbundes beurteilen zu können, wenden wir die folgenden Zusammenhänge an (siehe auch [Puck/Wurtinger])

Als Bezugsgrößen sind dabei anzusetzen  
der Fasergewichtsanteil

$$\psi = \frac{G_F}{G} = \frac{V_F \gamma_F}{G} \quad (2.3a)$$

und

der Faservolumenanteil

$$\varphi = \frac{V_F}{V} = \frac{V_F}{V_F + V_M + V_L} \quad (2.4a)$$

wobei  $V_F$  der in einem Volumenanteil enthaltene Faservolumenanteil ist. Da das Gewicht der Luft bedeutungslos ist, erhalten wir

$$G = G_F + G_M$$

Somit stellt sich dem Ingenieur die Aufgabe, die vier gegebenen Größen  $\gamma_F$ ,  $\gamma_M$ ,  $G_F$ ,  $G_M$  aus dem Herstellungsprotokoll eines Verbundteils abzulesen und daraus die Größen  $\varphi$ ,  $\psi$  und  $\gamma_v$  mit folgenden Beziehungen zu bestimmen:

$$\psi = \frac{G_F}{G_M + G_F} \quad (2.3b)$$

Bezogen auf die festen Bestandteile ist

$$\varphi_F = \frac{1}{1 + \frac{\gamma_F}{\gamma_M} \frac{G_M}{G_F}} \quad (2.4b)$$

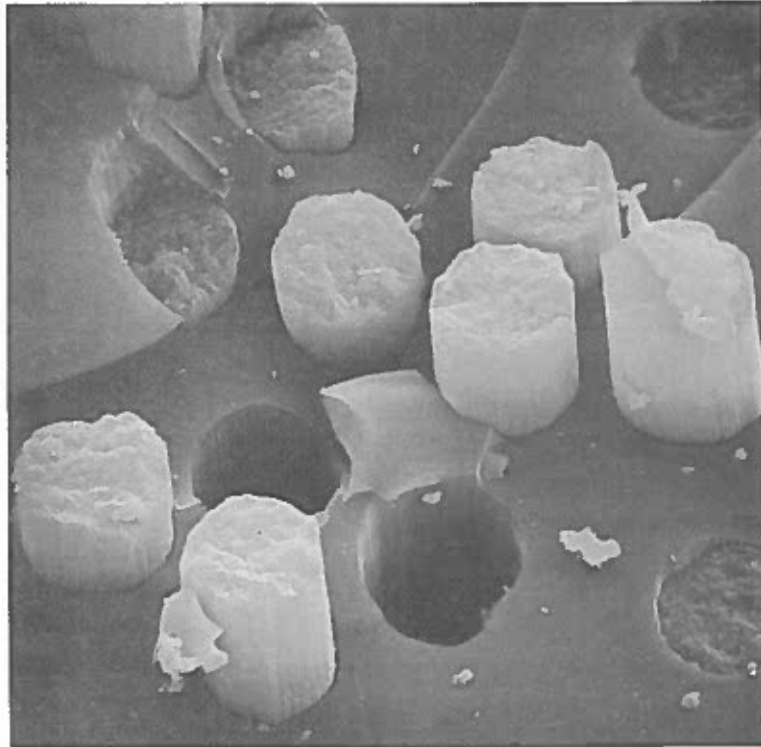
Wenn die wenigen Prozent Luft vernachlässigt werden, ist

$$\varphi_F \approx \varphi$$

Als Berechnungsformel für das spezifische Gewicht des Verbundes gilt:

$$\gamma_v = \frac{\varphi}{\psi} \gamma_F = \left[ \varphi + (1 - \varphi) \frac{\varphi}{\psi} \frac{\gamma_M}{\gamma_F} \right] \gamma_F \quad (2.5)$$

## Sigrafil



V.: 2200:1

**Bild 2.1** Vergrößerung einer gerissenen CFK-Probe aus Sigrafilfasern (Harz: ERLA 4617)  
(Foto: M.A.N.-Neue Technologie, München)

Tab. 2.1 a Kohlenstofffasern

Einheit			g/cm <sup>3</sup>	μm	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	—	%	10 <sup>-6</sup> /°C	10 <sup>-6</sup> /°C	W/m°C	J/g°C	DM/kg
Faser	Hersteller	Vorprodukt	ρ	Elem.- faser-φ	σ <sub>2B</sub> /F	E <sub>F</sub> · 10 <sup>-5</sup>	ν	Bruch- dehnung	α <sub>cII</sub>	α <sub>tI</sub>	λ	c	Preis
Thornel 50	UCC	Rayon	1,63±1,67		1950 ± 2200	3,5 ± 4,0							
" 50S	"	"	1,55±1,67	7 ± 8	1950	3,9 ± 4,0		0,5 ± 1	-0,5				
" 75	"	"	1,82		2180	5,5		0,5					
" 75S	"	"	1,82		2500 ± 2850	5,3 ± 5,6		0,38					1400
" 100	"	PAN				7,0							
" 300	"	"			1910	2,26							
" 400	"	"	1,78		2640 ± 2960	2,1		1,0					1200
Grafil A	Courtaulds	PAN	1,73		1750 ± 2100	1,75 ± 2,2		1 ± 1,4					
" AS	"	"	1,77±1,83	9	2600	1,75 ± 2,05		1,0	-1	20	34	0,9	
" HM	"	"	1,9	8,3	2500 ± 3500	3,5 ± 4,2		0,55 ± 0,65					
" HMS	"	"	1,9	8,0	2580	3,1 ± 3,6		0,40					750
" HT	"	"	1,74	8,6	3000 ± 4000	2,2 ± 2,8			-4 ± -1	10			
" HTS	"	"	1,77	8,0	3000	2,2 ± 2,5		0,77					600
Modmor I (HM)	Morganite	PAN	1,9		1400 ± 2100	3,9 ± 4,6						0,72	
" IS	"	"	1,9	7,7	1700	3,45		0,35					
" II (HT)	"	"	1,7 ± 1,75	8,4	2680 ± 3250	2,2 ± 3,2							
" IS	"	"	1,77	8,0	2970	2,55		0,65					
" III	"	"			2700	2,2		1,0 ± 1,4					
" III S	"	"	1,65	8,3	1900	1,9		0,53					
" IV S	"	"	1,8	7,5 ± 8,5	1720 ± 2410	2,45 ± 3,75							
Sigrafil NF	Sigri	PAN		8,8	1720	1,57							450
" HF	"	"			2540	1,95		0,7					
" HM	"	"			1960	4,4		0,6					
Torayca T400A	Toray	PAN			2600	2,5		0,8 ± 1,0					
" T300A	"	"	1,78	8,1 ± 8,4	2100 ± 3000	2,4		0,8 ± 1,2					430
" T200A	"	"	1,78	8,1 ± 8,4	2700	2,2		1,0 ± 1,4					
" M40A	"	"	1,8	7,7 ± 7,9	2200	3,5		0,6					670
Panex 30A	Stackpole	—	1,78		2760 ± 3310	2,07 ± 2,28							270
" 30C	"	—	1,78		1930 ± 2690	2,07 ± 2,28							210
Celion 6Y 70	Celanese	—	1,96	8	1730	5,3							600
Rigolac AC	Le Carbone	—	1,75	12,4	1910 ± 2260	1,73 ± 2,2		1,0 ± 1,4					
" AG	"	—	1,95	11	1620 ± 2160	3,42 ± 4,3		0,6					
Hyfil	Hifil	—	1,74		2400	1,9							
"	"	—	1,74		2600	2,4							
"	"	—	1,96		1720	3,4							
Hitron 201	Hitco	PAN	1,53		1660	1,37							
" 401	"	"	1,7		1930	2,76		0,8 ± 1,0					
Fortafil 3T		—	1,8		2080	2,07							
" 4T		—	1,7		2420	2,62							
" 5T		—	1,8		2760	3,3							
" 6T		—	1,9		2900	4,0							

Tab. 2.1 b Sonstige Fasern

Einheit		g/cm <sup>3</sup>	μm	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	—	%	10 <sup>-6</sup> /°C	10 <sup>-6</sup> /°C	W/m°C	J/g°C	DM/kg	
Faser	Hersteller	Vorprodukt	ρ	Elem.- faser-φ	σ <sub>zB</sub> /F	E <sub>F</sub> · 10 <sup>16</sup>	γ	Bruch- dehnung	α <sub>tII</sub>	α <sub>tI</sub>	λ	c	Preis
<b>Bor - Faser</b>													
Bor			2,6±2,72	95÷100	2800 + 3500	3,87±4,5		0,6	1 + 4,8				3500,-
Bor/C			2,24	100	2930	3,59±4,08							
Bor/W			2,45±2,60	100 + 14,2 m. 12 μm W-Sectio	3100 + 3700	4,0	0,27	0,6					2600,-
Borsic SiC + W-Sectio			3,4		2100 + 3500	3,87±4,9							4600,-
<b>Chemie-Faser</b>													
Kevlar 29	Du Pont		1,44		2700	0,63		4					
Kevlar 49	"		1,45	10÷12	2450 + 2800	1,34		2,0÷2,1	-1÷-2,5		0,48	1,2÷1,5	400,-
Kevlar 49 I	"		1,47	10	2400	1,6		3,3					
Kevlar 49 III	"		1,45	11÷12	2750	1,3		2,0÷2,1	-1÷-2,5		0,48	1,2÷1,5	130,-
Kevlar 49 IV	"		1,45		2950	0,83		3,3					
Nylon T-728			1,14		980	0,05		19					
<b>Glas - Faser</b>													
A			2,48		2450	0,6±0,7						0,83	
E			2,49±2,54	8...10	2500 + 3500	0,73±0,82	0,25	2÷4	4,8÷5,2		0,86±0,98	0,8	5,-
R			2,5	10	3700 ÷ 4750	0,86±1,03							
S			2,49±2,55	10	3500 + 5000	0,86±1,05		5,3	2,9			0,73	10,-±20,-
X			2,5		7000	1,25							
M			2,89		3500	1,17							
HM					2520	1,24							
Quarzglas			2,2	9	700	0,62±0,72	0,17	1	0,54			0,96	230,- + 300,-
<b>Whiskers</b>													
Fe			7,78	1,6	13000	2							300,-
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>			3,85±3,95		21000	4,34±5,3							20000,-
α - SiC			3,2	0,5±2,0	21000	4,6							5000,-
β - SiC													8000,-
Fybex	Du Pont			0,1±0,16									5,-
B <sub>4</sub> C			2,5		14100								
Grafit			1,6÷1,7		20000	1,2÷7,2							
SiC					21000	4,2÷4,9							16000,-
Cu			8,68	1,25	3000								
Si			2,3		6900	0,15							
Cr			7,2		9100	2,4							
<b>Metalldrähte</b>													
Fe			7,74		4200	2,03	0,28						300,-
W			19,4		4050	4,2							5000,-
MO			10,8		2240	3,6							
René 41			8,26		2030	1,65							
Be			1,83		1300	2,5±2,95	0,025						

## Kohlenstofffaser (Carbonfaser)

( 7 bis 9  $\mu\text{m}$  Durchmesser )



Thornel  
( Rayon )



Modmor  
Grafil  
Sigrafil  
( PAN )

## Glasfasern

( 9 bis 13  $\mu\text{m}$  )



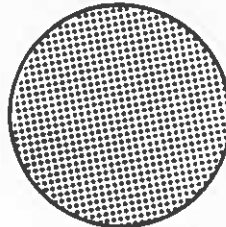
## Kevlar - Faser

( 12  $\mu\text{m}$  )

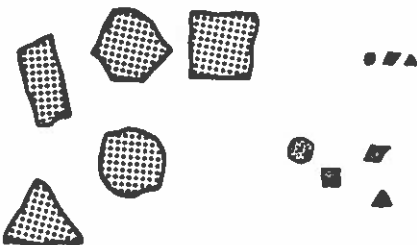


## Metalldrahnte

( 1 bis 30  $\mu\text{m}$  )

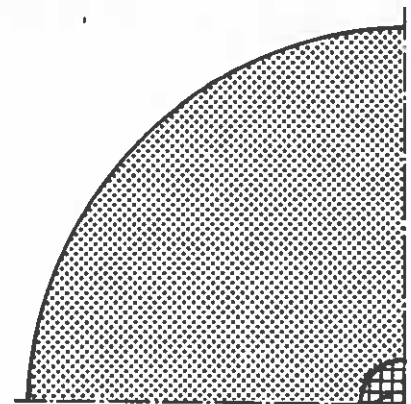


## Whisker ( 1 bis 10 $\mu\text{m}$ )



10  $\mu\text{m}$

## Borfaser ( 100 $\mu\text{m}$ )



Wolframseele ( 12  $\mu\text{m}$  )

Bild 2.2 Faserquerschnitte

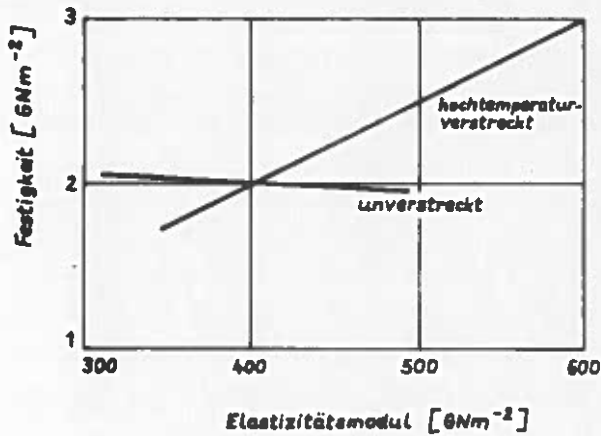


Bild 2.3  
Einfluß der Hochtemperatur-  
verstreckung auf Festigkeit und  
Elastizitätsmodul von  
PAN-Kohlenstofffasern  
[Johnson et al.]

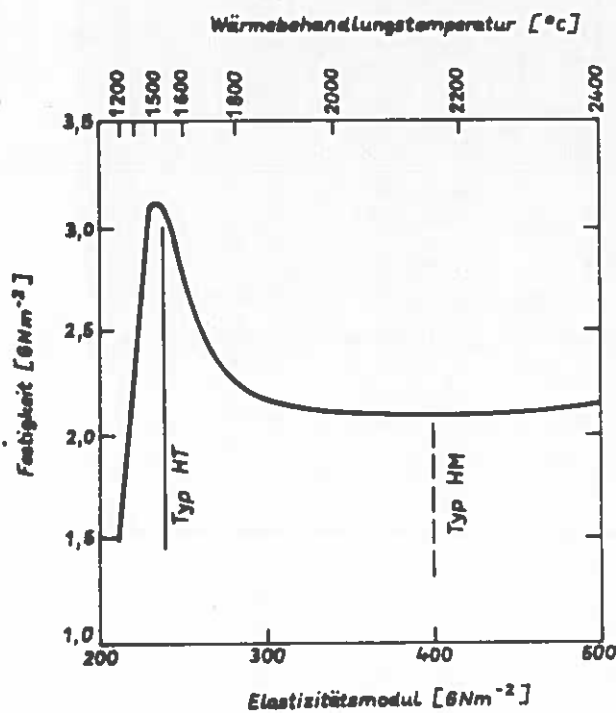
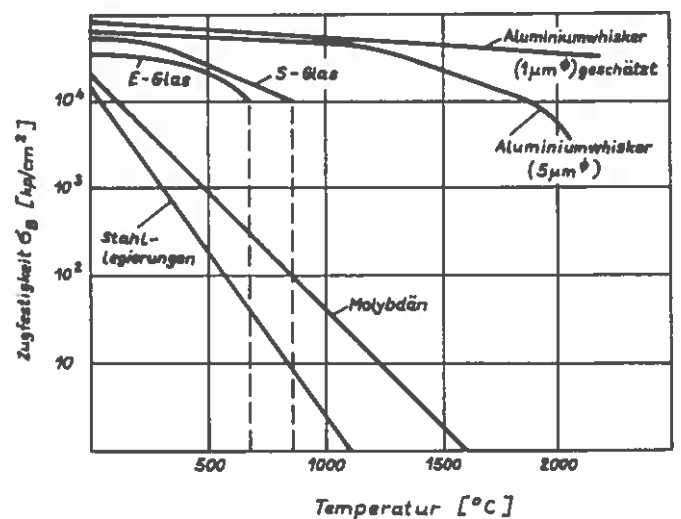


Bild 2.4  
Festigkeit und Elastizitätsmodul  
der Faser in Abhängigkeit von  
der Wärmebehandlung  
[Watt]

Bild 2.5  
Zugfestigkeit als Funktion  
der Temperatur  
[Studie GFK]



Bezeichnung	Dehnung	Elastizitätsm.	Festigkeit
HT / LM	1,2 $\pm$ 0,2%	22 · 10 <sup>4</sup> N/mm <sup>2</sup>	2650 N/mm <sup>2</sup>
HT / MM	0,9 $\pm$ 0,1%	25 · 10 <sup>4</sup> N/mm <sup>2</sup>	2500 N/mm <sup>2</sup>
MT / HM	0,6 $\pm$ 0,05%	35 · 10 <sup>4</sup> N/mm <sup>2</sup>	2150 N/mm <sup>2</sup>
HT / HHM	0,45 $\pm$ 0,05%	53 · 10 <sup>4</sup> N/mm <sup>2</sup>	2500 N/mm <sup>2</sup>
A (Mischprodukt)	1,2 $\pm$ 0,2%	20 · 10 <sup>4</sup> N/mm <sup>2</sup>	2300 N/mm <sup>2</sup>

Tabelle 2.2. Klassifizierung der Kohlenstoffasern

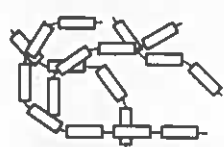
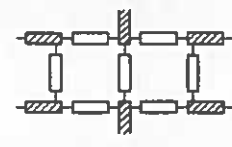
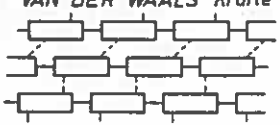
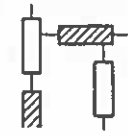
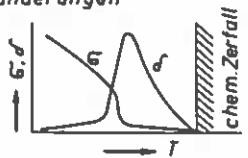
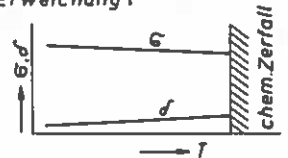
Kunststoff- Eigenschaften	Thermomere	Duromere
<b>Struktur</b>	linear unvernetzte Makromoleküle Fadenmoleküle 	dreidimensional vernetzte Makromoleküle Raumnetzmoleküle 
<b>Bindungsmechanismus</b>	Makromolekül: primäre Bindungen Makromolekülverband: sekundäre Bindungen VAN DER WAALS Kräfte 	Makromolekül: primäre Bindungen Valenzbindungen 
<b>Thermisches Verhalten</b>	ausgeprägte Eigenschaftsänderungen 	bedingt geringe elastische Erweichung. 
<b>Verarbeitbarkeit</b>	spanend spanlos	spanend
<b>Formänderungsverhalt.</b>	reversibel	irreversibel
<b>Reckbarkeit</b>	reckbar	nicht reckbar
<b>Schmelzverhalten</b>	schmelzbar	unschmelzbar
<b>Lösungsverhalten</b>	unbegrenzt quellbar grundsätzlich lösbar	begrenzt quellbar unlösbar

Bild 2.6 Charakteristische Eigenschaften der Kunstharze [ BW 1591, VDI ]



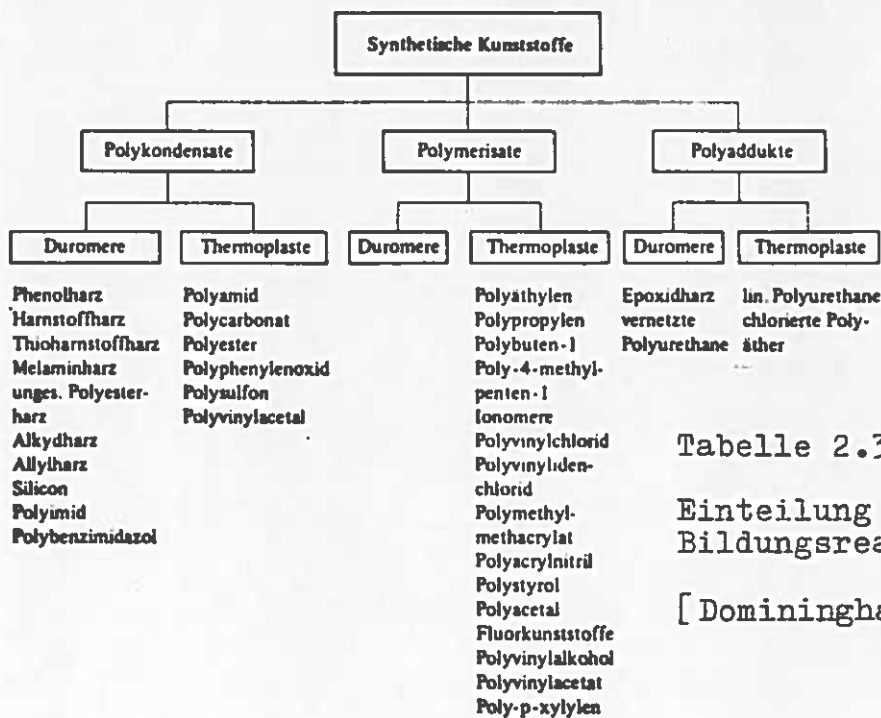


Tabelle 2.3

Einteilung der Kunststoffe nach Bildungsreaktion und Struktur

[ Dominghaus ]

Vorteile der EP-RH:

1. lufttrocknende Härtung
2. höhere Füllbarkeit
3. niedrigere Schwindung, die schon vor der Gelierung einsetzt
4. hervorragende Haftung auf fast allen Materialien
5. geringere Mikroporosität
6. höhere Chemikalienbeständigkeit, besonders gegen Alkalien
7. höhere Festigkeiten bei statischer und dynamischer Beanspruchung
8. gute Vibrationsfestigkeit
9. gute Wärmestandfestigkeit und hohe Dauerwärmebeständigkeit
10. hohe Dämpfung, besonders bei erhöhten Temperaturen
11. gutes Alterungsverhalten
12. geringere Brennbarkeit der Standard-Reaktionsharze
13. Geruchs- und Geschmacksfreiheit der Fertigteile
14. Systeme "nach Maß" herstellbar

Vorteile der UP-RH:

1. niedrigerer Preis
2. kürzere Härtezeiten
3. niedrigere Viskosität der Standard-Harze
4. leichtere Handhabung
5. weniger Fehlermöglichkeit bei der Dosierung der Härte
6. leichtere Entformbarkeit
7. Herstellung von glasklaren Körpern möglich, geringe Vergilbung
8. bessere Beständigkeit der Standard-Harze gegenüber organischen Säuren
9. weniger toxisch bei der Verarbeitung

Tabelle 2.4

Vergleich der Vorteile von EP-RH und UP-RH (BW 1591, VDI)

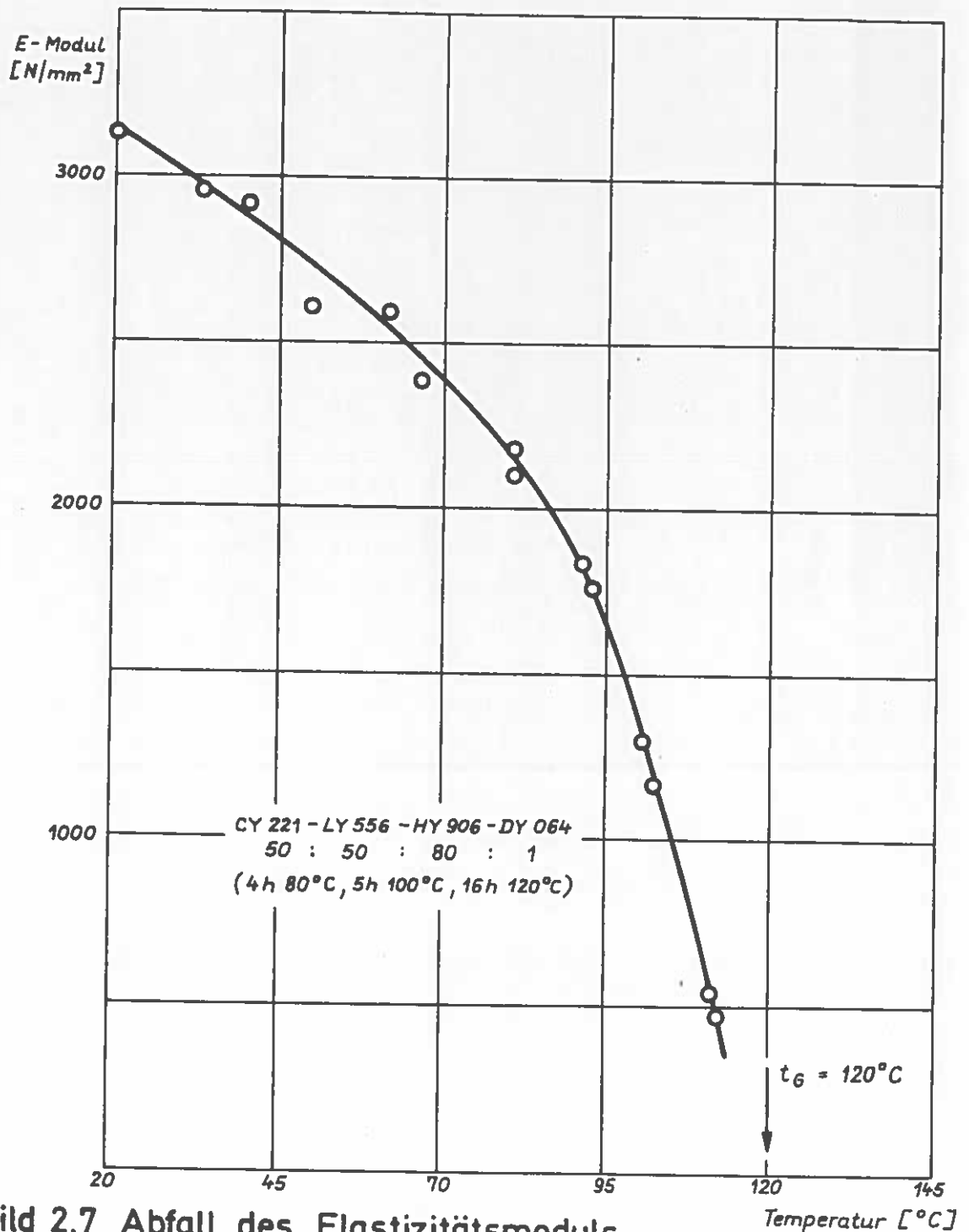


Bild 2.7 Abfall des Elastizitätsmoduls einer speziellen Epoxidharzmatrix ( $\epsilon \leq 1\%$ )

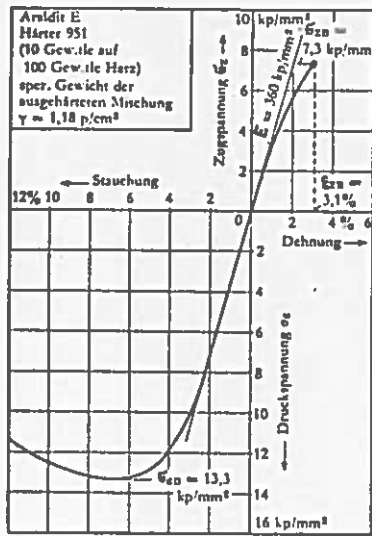


Bild 2.8

Spannungs-Dehnungs-Schaubild  
für ein Epoxidharz  
[Puck/Wurtinger]

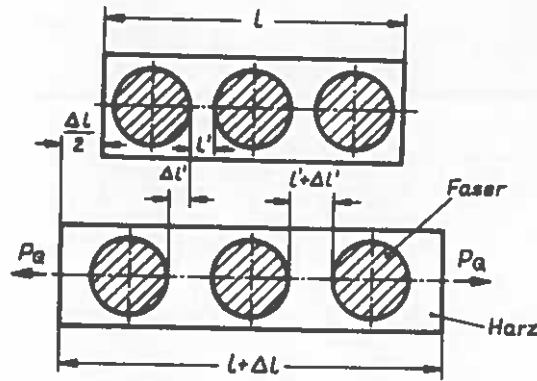


Bild 2.9 Schematische Darstellung  
 der Dehnungsvergrößerung  
 im Harz eines rovingver-  
 stärkten Verbundwerkstoffes  
 bei Querbelastung  
 [Harris]

Tabelle 2.5 Einige Harzsysteme

Reaktionsharz	Harzsystem		Teile	h	CP bei °C	h/°C	Härtezyklus				°C	g/cm³	N/mm²	N/mm²	E-Modul (Zug) 23°C	λ	%	Bruchdehnung bei 20°C
	Härter	Verdüner					Mischungsverhältnis	Verarbeitungszeit	h/°C	h/°C								
Araldit E <sup>1)</sup>	HY 951	—	100 65			24/40				41							0,4	
Araldit E <sup>1)</sup>	HY 843	—	100 65			24/40				41			20	800			50	
CY 221	HY 906	DY 064	100 67	>10	170	40	5/100	14/120		70			40	2100	100		>50	
CY 221	HY 906	DMP 30	100 71	1		4/80	5/100			56			40	2100			17	
LY 556	HY 906	DY 064	100 94	1		4/80	5/100	16/120		145			100	3100			4,3	
LY 556	X 157/2378	DY 062	100 85	1		15/120				115			65	3200			2,3	
LY 556	X 157/2378	DY 064	100 88	1	120	50	5/100	16/120		—			95	3300	2800		6,5	
LY 556	HY 906	DY 064	so/so	1	200	45	4/80	5/100	14/120	120			80	3100	2100		11	
LY 558	HT 973												122	45	3300		1,6	
EPN 1139	HY 906	DY 064	100 107	0,5	220	55	3/80	3/100	16/120	—			95	3600	3100		≥ 3,5	
EPN 1139	HY 906	DMP 30	100 107	0,5			15/120			114			100	3700			4,0	
EPN 1139	HY 906	—	100 36	—			15/120			195			110	3500			5,5	
X 100	HT 907	DY 064	100 100	0,5									75	3000			0,4	
X 100	HT 907	DY 064	100 100	1	180	50	4/70	1/80	7/100	—			75	3500	3000		9,7	
X 100	HY 906	DY 064	100 100	1	125	50	2/80	4/90	10/110	130			100	3500	3000		4,3	
X 100	MNA	DMP 30	100 102	1			3/80	15/120		145			100	3500			4,3	
ERLA 4617	HT 972	—	100 47	—													2,5	
ERLA 4617	HT 972	—	100 41	—													3,5	
P 28	MNA	DY 062	100 94	1			3/180			—			65	3400			2,2	
828	MNA	DMP 30	100 94	1	290	45	4/80	5/100	16/120	—			100	3200	2900		≈ 4	
0502	HX	DMP 30	100 100	1,5			5/80	2/95	2/115	15/130			100	3000			4,4	
0502	HX	DMP 30	100 100	1,5	120	40	3/70	5/70	bis 130	15/130			100	3100	2800		6,5	
L 72/E	HX	DMP 30	100 95	1,5	>10	150	5/70	3/100	16/130	—			85	3200	2600		6,5	
L 02	HT	DMP 30	100 92	1,5			15/110			—			70	3200			2,4	

Tab. 2.6 Kennwerte von Verbundwerkstoffen und Metallen

Eigenschaften bei 23 °C		°C	%	g/cm³	N/mm²												J/g°C	DM/kg				
					Faser		3) Zug		3) Druck		Scherung		Zug		Zug				10⁻⁵/°C		W/m°C	
Harzsystem	σ <sub>F</sub>	φ	σ <sub>F</sub>	σ <sub>F</sub>	σ <sub>1B</sub>	E <sub>11</sub> /E <sub>L</sub>	σ <sub>1B</sub>	E <sub>11</sub> /E <sub>L</sub>	τ <sub>11B</sub>	G <sub>11</sub> /G <sub>12</sub>	σ <sub>1B</sub>	σ <sub>2B</sub>	σ <sub>1B</sub>	σ <sub>2B</sub>	ε <sub>11</sub>	ε <sub>22</sub>	λ <sub>11</sub>	λ <sub>22</sub>	λ <sub>1</sub>	c	Preis	Lit.
Grafil AS x 100/HY 906/DY 064 (100:100:1)	1670	65	150	120.000	1100	120.000	8.500	80	6000	1000	0,33	0,91	73	8,0	-0,5	22	120	80	1,1			
S-Glas LY 556/CY 208/HY 907/DY 063 (S:R:K:2)	2250	76	2,18	45.000	1720	45.000	8.500	80	6000	1000	0,43	0,55	79	2,1			42					
Bar/W	2300	50	2,54	202.000	1200	202.000	11.000	100	6000	1000	0,35	0,6	47	7,9								
Kevlar 29	2380	70	1,39	45.000	1700	45.000	25.500	100	6000	1000			122	3,2								
Kevlar 49	2250	70	1,39	85.000	1450	85.000	5.600	100	6000	1000	0,34		104	6,1	-5	55	88	21				

1), 2), 3) weisen auf die Erläuterungen im Text hin.

Zum Vergleich: Metallische Werkstoffe<sup>1)</sup>

	φ	Zug		Ez	Druck		Scherung		Zug σ <sub>B</sub> 10 <sup>5</sup> h, 10 <sup>6</sup> LW	ν	δ <sub>6</sub>	E/δ	α	λ	c	Lit.
		σ <sub>zB</sub>	σ <sub>02</sub>		σ <sub>zB</sub>	σ <sub>02</sub>	τ <sub>B</sub>	G								
X2NiCoMo 18.12.4	8,10	2250	2200	200000				79500		0,27	28	2,5	10,3			
X2NiCoMo 18.12.4 Blech, 75% kaltverformt	8,10	2660	2610	200000							32	2,5				
X2NiCoMo 18.3.5	8,05	1790		193000						0,30	22	2,4				
Inconel 718	8,05	1300		197000						0,30	16	2,45				
Ti 8V5Fe 1AL (Rattenmaterial, kaum schweißbar)		1530	1430													
Ti AL6V4	4,38	1030		111000						0,33	23,5	2,5				
Ti V13Cr 11AL3	4,76	1310		111000							27,5	2,3				
ALZnMgCu 1,5 (AZ 64)	2,75	540	460	72000							19,5	2,0				
ALCu Mg / F44	2,75	440		72700			73500			0,32	10	18	2,6	109 ± 140	0,96	

1) Es gelten die gleichen Dimensionen wie für die Verbundwerte

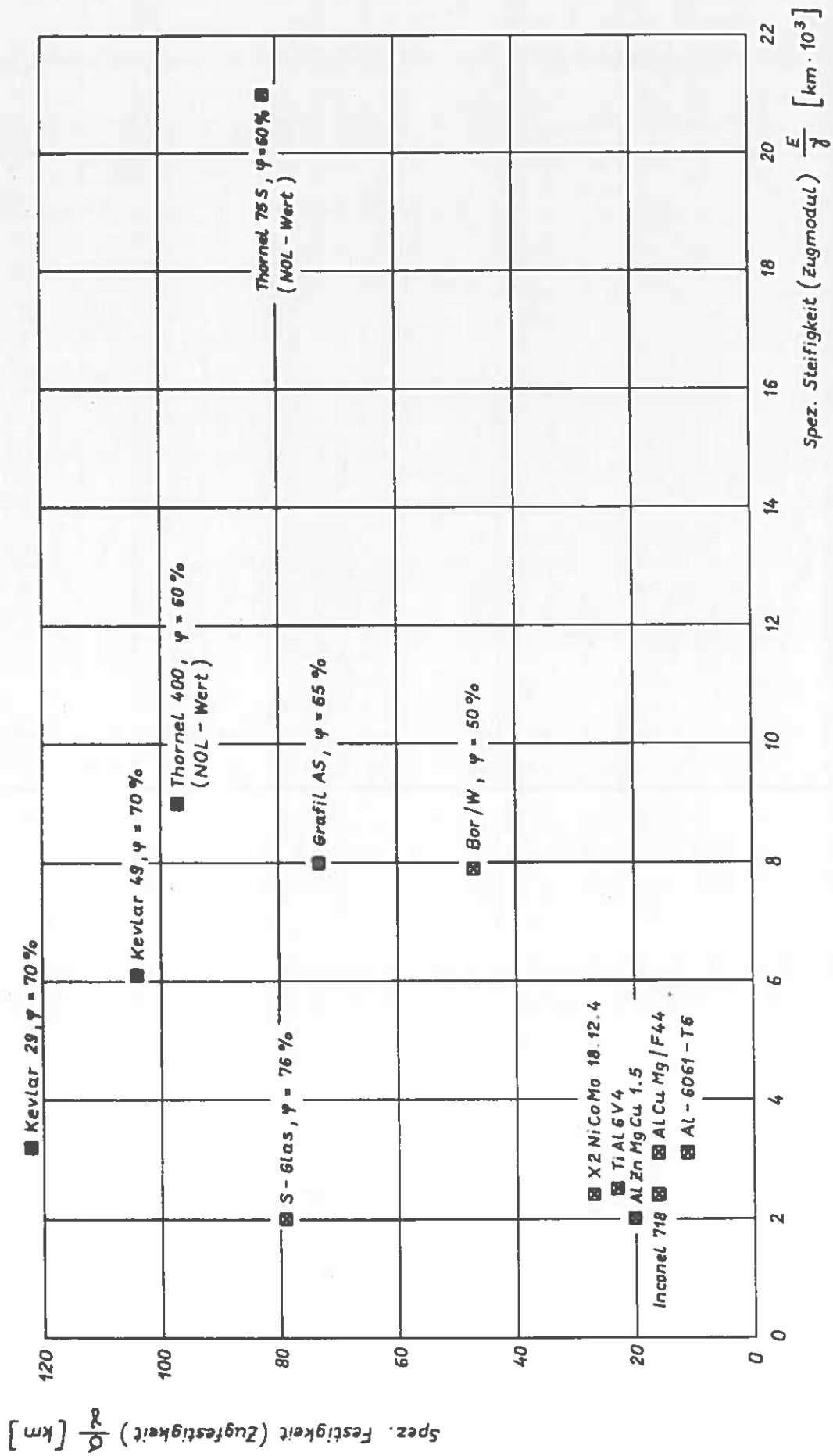


Bild 2.10 Spezifische Eigenschaften von Verbundwerkstoffen ( Bauteil - oder NOL - Werte ) und Metallen

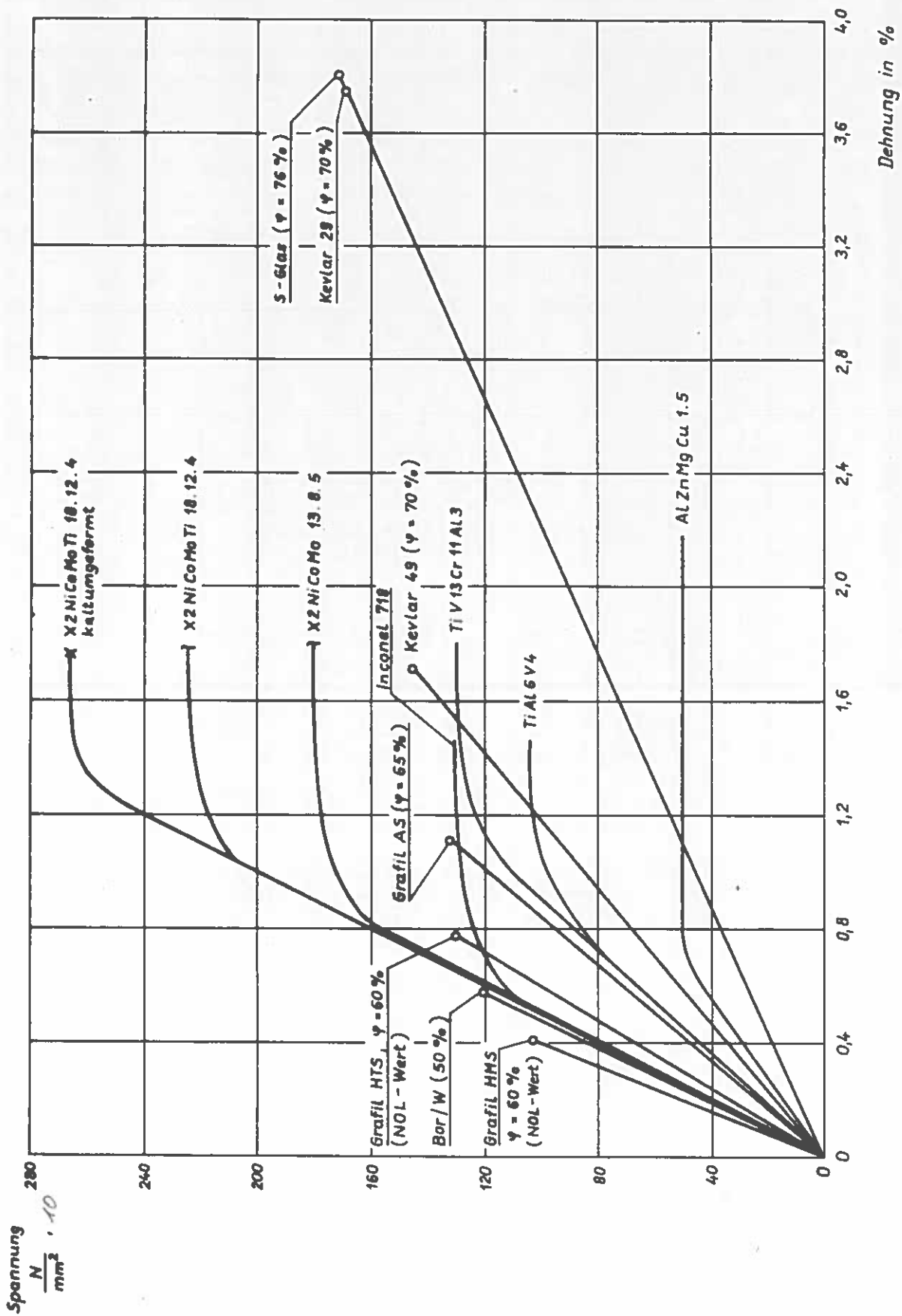


Bild 2.11 Spannungs - Dehnungs - Diagramm einiger Verbundwerkstoffe und Metalle  
( Raumtemperatur 23°C , einachsig )

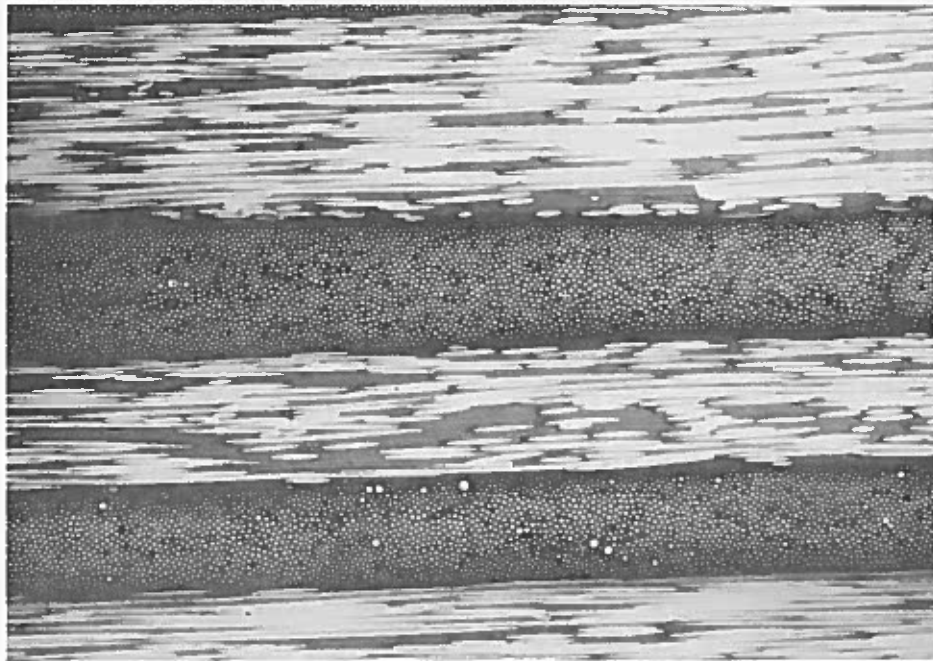
Verwendung geringerer Mengen des teureren Werkstoffs  
Erleichterungen bei der Herstellung  
Verbesserte Schlagfestigkeit  
Höhere Belastbarkeit zum Bruch  
Kleinere Querschnitte  
Geringere Korrosionsempfindlichkeit  
Höhere Dämpfung  
Geringere Wärmeleitfähigkeit  
Größere Steifigkeit

Tabelle 2.7 Verschiedene mögliche Vorteile von Hybrid-Verbundwerkstoffen

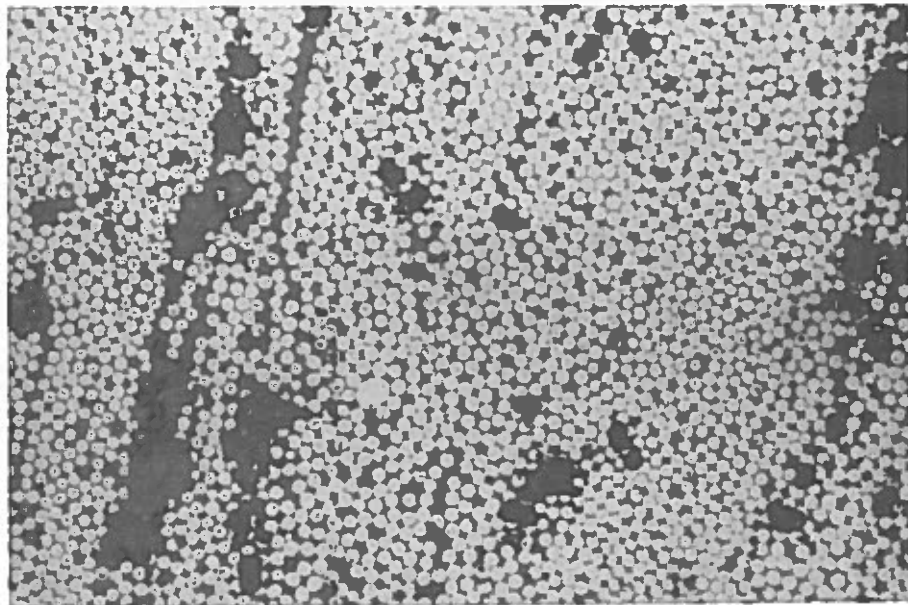
1. Faserfestigkeit
  - a) Minderung der Festigkeit durch chemische Reaktion mit Faserüberzug oder Matrix
  - b) Beschädigung der Oberfläche während der Verbundherstellung
  - c) Faserbruch
2. Grenzschicht
  - a) Schwache Faser - Matrix - Grenzschicht  
Sofern Überzüge aufgebracht werden
  - b) Schwache Faser - Überzug - Grenzschicht
  - c) Schwache Überzug - Matrix - Grenzschicht
3. Matrix
  - a) Porosität
  - b) Einschlüsse
  - c) Verunreinigung der Matrix
4. Fertigung
  - a) Geringer Faservolumenanteil
  - b) Schlechte Faserorientierung
  - c) Schlechte Faserverteilung
  - d) Ungenügende Aushärtung

Tabelle 2.8 Probleme bei der Herstellung des Verbundes  
[Geiger/Füller]





$t_k$  ca. 0,2mm



0,01mm

Bild 2.12 Schliffbilder eines CFK - Wickelverbundes  
(REM - Aufnahme)

### 3. Herstellung von Verbundbauteilen

Bevor die verschiedenen Herstellungsverfahren von Bauteilen aus Faserverbund aufgeführt werden, ist zu klären, in welcher Art Fasern verarbeitet werden können bzw. welche Verstärkungsmaterialien auf dem Markt vorliegen.

#### 3.1 Verstärkungsmaterialien

Die Eigenschaften von Faserverbund hängen sehr davon ab, in welchen Verstärkungsmaterialien die Fasern zum Einsatz kommen (Bild 3.1). So werden beispielsweise bei Kohlenstofffasern folgende Produkte angeboten [MBB, WF Inf. 1973, S. 38]:

- Einzelfasern - mit 5 bis 10  $\mu$ m Durchmesser. Zur Verstärkung einer Metallmatrix werden seit neuestem Fasern mit 50 bis 250  $\mu$ m Durchmesser geliefert
- Rovings - bestehend aus 100 bis 10000 Endlosfasern bis rund 300 m Länge
- Garn - bis etwa 1000 m Länge, verdrillt und nicht verdrillt
- Gewebe - verschiedenster Webarten, auch dreidimensional
- Filz, Matte - verschiedene Arten
- Prepregs - Faserstrang, Band, Gewebe, Matte mit Kunstharzen imprägniert. Handelsübliches Band z.B. 1000 x 300 mm Breite, 0,125 bis 0,375 mm Dicke, Fasergehalt 50 bis 60 Gew. %.

Diese Produkte werden mit und ohne Oberflächenbehandlung geliefert, damit die Fasern besser von der Matrix benetzt werden und die Haftung der Matrix ebenfalls verbessert wird.

Es sollen nun diejenigen Faserprodukte vorgestellt werden, die für festigkeitsmäßig hochwertige Bauteile am interessantesten sind, nämlich Roving, Gewebe und Matte. Ihre Beschreibung kann nach dem VDI-Blatt 2012 und nach [Haferkamp] vorgenommen werden.

##### 3.1.1 Rovings

Rovings sind Spinnfäden, die mit und ohne Drillung in größerer Zahl annähernd parallel zu einem Fadenstrang zusammengefaßt sind. Bei Glasseidenrovings können es 20 bis 120 Spinnfäden sein. Die Spinnfäden - auch Enden genannt - entstehen durch Zusammenfassung einer

bestimmten Zahl von Elementarfäden. Die Gesamtzahl der Elementarfäden bzw. Filaments in einem Roving ist verschieden.

Zum deutschen Standardspinnfaden der Endlosglasfasern wurde der Spinnfaden EC-10 [Johnson]. Die Anzahl seiner Elem.fäden ist 204. Er besitzt - bei dem üblichen Elementarfadendurchmesser von 10 mm - eine sogenannte Spinnfadenfeinheit von 40 Tex (1 Tex = 1 g/1 km, vgl. auch Anhang II) und weist 60-fach zusammengesput als sogenannter 60-ends-Roving eine sogenannte Rovingstrangfeinheit von 2400 Tex auf.

Die Entwicklung der Rovings zielte später in Richtung von größeren Elementarfadendurchmessern bis 14 mm und reduzierter Spinnfadenzahl. Schließlich wurde bei Glas im Rahmen der Optimierung der Fertigungsparameter der 1-end-Roving (Cosmostrand) hergestellt. Mit ihm werden Rovingstrangfeinheiten zwischen 300 und 2400 Tex angeboten, wobei mit den kleineren Texwerten auch kleinere Lagendicken verwirklichtbar sind.

Mehrere Rovings werden im allgemeinen zu einem Wickelband zusammengefaßt. Der Bandquerschnitt berechnet sich dann aus Anzahl der Rovings mal Anzahl der Spinnfäden mal Anzahl der Elementarfäden mal Fläche des Elementarfadens.

Da die Herstellungskosten um so höher sind, je mehr Lagen gewickelt werden müssen, verarbeitet man Bänder aus Faserbündeln mit 10000 und mehr Filaments. Es lassen sich damit auch unterschiedliche Lagenstärken realisieren.

Mit Rovings werden die höchsten Festigkeiten erzielt, jedoch liegt die Verstärkung nur in einer Richtung vor.

### 3.1.2 Gewebe

Gewebe sind auf Webmaschinen hergestellte Bahnen, die aus mindestens zwei Fadensystemen (Kette und Schuß) bestehen und deren einzelne Fäden in einer bestimmten Bindungsart rechtwinklig miteinander verkreuzt sind. Gewebe sind in der Regel zweidimensionale Verstärkungsmaterialien, die bei gleicher Anzahl von Fäden in Kett- und Schußrichtung auch gleiche Festigkeit in diesen Richtungen aufweisen.

### 3.1.3 Matten

Matten sind regellos geschichtete, flächige Verstärkungsbahnen. Sie haben in allen Richtungen ihrer Ebene dieselben Festigkeiten, die jedoch niedriger sind als bei Gewebeverstärkungen. Die geschnittenen Fasern sind ca. 20 bis 50 mm lang; die Whisker in Whiskerfilzen nur

wenige Millimeter.

### 3.2 Verarbeitungsarten

#### 3.2.1 Trockene Verarbeitung

Mit Harzmischanlagen und Tränkeinrichtungen können aus Reaktionsharzmasse und Verstärkungsfasern vorimprägnierte, begrenzt lagerfähige Fasererzeugnisse hergestellt werden. Sie werden Prepregs genannt. Geliefert werden vorimprägnierte Rovings, Matten und Gewebe. Es gibt aber auch Stapelglasfasern in Form einer klebrigen, knetbaren Masse.

Prepregs in Form von Rovings werden beim Trocken-Wickelverfahren verwendet, und Matten beim Trocken-Legeverfahren. Prepregs lassen sich bis zu ihrer Verarbeitung mehrere Monate entsprechend den Vorschriften gekühlt aufheben, ohne daß das Harz aushärtet.

Die Vorteile dieses Verfahrens sind: definierte Faservolumenverhältnisse, gleichmäßige Harzverteilung über dem Bauteil und geringe Abweichung der Faserorientierung von der gewollten Richtung. Von der Bearbeitungsseite her ist die Verwendbarkeit hochviskoser Harze von Vorteil und die vereinfachte Verarbeitung der Prepregs. Alles in allem können die Prepregs zu einer Verringerung der Streuung und Verbesserung der Mittelwerte der Werkstoffgrößen verhelfen. Nachteile sind der Preis, und daß eine Härtung bei erhöhter Temperatur vorgenommen werden muß.

Borfasern und Kohlenstofffasern werden relativ häufig als Prepregs verwendet. Besonders bei der Borfaser ist aufgrund der hohen Steifigkeit eine nasse Verarbeitung schwierig. Borfaser-Lamine werden deswegen [VDI 2010, Bl. 1] am besten über Prepreg-Halbzeuge hergestellt. Die Borfasern werden dabei mit Hilfe eines Wickelverfahrens in einer vorvernetzten Harzschicht getränkt. Borfasern in Aluminiummatrix können schon als dünne Bleche und Bänder geliefert werden. Bei den Kohlenstofffasern werden hauptsächlich im "Topf" gelieferte Rovingbänder verarbeitet.

#### 3.2.2 Nasse Verarbeitung

Bei dieser Verarbeitungsart wird das Harz erst unmittelbar vor dem Wickeln oder Legen mit der Faser in Berührung gebracht. Das zeigt direkt die Vor- und Nachteile an. Es ist nicht wünschenswert, Fadenzuführung und Harzbad mitrotieren zu lassen.

Von Vorteil ist die mögliche Verwendung kaltaushärtender Harze und der gegenüber Abschnitt 3.2.1 geringere Arbeitsaufwand. Von Nachteil ist die begrenzte Gebrauchsdauer des Harz-Härter-Bades und die etwas

schwierigere Faseranteilregulierung, die beim Wickelverfahren über eine Verspannung der Wickelrollen erfolgt. Je höher der Wickelzug ist, desto höher ist auch der Faseranteil. Anwendung findet diese Imprägnierart überwiegend bei Glas-, Kevlar- und Kohlenstofffasern.

### 3.3 Faserverarbeitungsverfahren

Die Herstellung flächenhaft ausgedehnter Bauteile kann durch Spritzen, Roving-Verwickeln, mit Hilfe vorgeformter Bänder oder Laminatplatten geschehen. Dabei können diese Rohprodukte als Prepregs ausgebildet sein.

In vielen Fällen ist gegenüber dem Fertigungsaufwand metallischer Bauteile mit einem zusätzlichen Aufwand für die Fertigung des Faserverbundes zu rechnen. Dieser Aufwand wird in Abhängigkeit von den Eigenschaften der Faser schwanken. Allerdings bietet sich bei Verwendung von Faserverbunden öfters die Gelegenheit direkt die Form des Fertigproduktes zu erzielen, ohne daß - wie bei der Metallverarbeitung - Einzelteile zur endgültigen Form durch eine Fügemethode usw. verbunden werden müssen.

Eine Zusammenstellung der Faserverarbeitungsverfahren bieten die Richtlinie VDI 2011, die Studie GFK und die Vetrotex-Broschüre.

Zur Art der Verarbeitung von Fasermaterialien kann gesagt werden, daß sie festigkeitsmäßig ähnlich wichtig ist wie die Faserauswahl. Wenn optimale Ergebnisse erzielt werden sollen, müssen eine gleichmäßige Anfangsspannung der Fasern, eine gute Faserausrichtung und auch eine gleichmäßige Faserverteilung vorliegen.

#### 3.3.1 Verfahren für niedrig beanspruchte Bauteile Handauflegeverfahren (Handlaminierung)

Das vorgenannte Verfahren ist ein handwerkliches Verfahren, bei dem mit oder ohne Druckluft Matten und Gewebe auf oder in eine Form (Matrize oder Patrize der zu erstellenden Struktur) lagenweise gebracht werden. Luft und überflüssiges Harz werden dabei durch Handwalzen so gut wie möglich herausgequetscht.

Der Vorteil dieses Verfahrens liegt in der relativ einfachen Fertigung, der allerdings mit niedrigem und ungleichmäßig verteiltem Fasergehalt erkauft wird. Für GFK-Gewebe z.B. werden Faservolumenanteile bis  $\varphi = 50\%$  erreicht, für Matten ist der Wert niedriger. Zur Gewinnung von Strukturen hoher Festigkeit und kleinen Gewichtes ist dieses Verfahren nicht geeignet.

## Schleuderverfahren

Bei der Herstellung von Rotationskörpern wird u.a. das Schleuderverfahren angewendet. Dabei werden lockere Faserarmierungen aus Matten oder aus Geweben in einer Außenform geschleudert. Dann wird in die drehende Außenform Harz eingespritzt, was zu einer sehr dichten, fast luftfreien Oberfläche des dann noch auszuhärtenden Rohres führt. Die erreichbaren Fasergehalte werden für GFK mit bis zu 40 % angegeben.

## Preßverfahren

Für größere Serien werden heiß- aber auch kaltarbeitende Preßverfahren eingesetzt. Diese Verfahren lassen schon eine recht genaue und reproduzierbare Fertigung zu, so daß mit ihnen auch hochbeanspruchbare Bauteile hergestellt werden können. So lassen sich z.B. rotierende Scheiben aus einer Vielzahl orthotroper Gewebe (Matten sind dann nicht mehr geeignet) zu einem quasiisotropen Gebilde aufbauen. Beim Kaltpressen lassen sich schon Faseranteile von  $\varphi = 50\%$  herausholen.

Zwei andere Verfahren - das Faserspritzverfahren und das Niederdruckverfahren - sind von nicht so großer Bedeutung.

### 3.3.2 Wickerverfahren (Filament-Winding)

Nach den vorgenannten mehr handwerklichen Verfahren zur Herstellung unterschiedlich stark beanspruchbarer Strukturteile finden wir bei den Wickerverfahren rein maschinelle Verfahren, die eine sehr gute Reproduzierbarkeit gegenüber den unter Abschnitt 3.3.1 genannten gewährleisten. Diese Verfahren dienen zur Herstellung von Strukturteilen oder Strukturen optimaler Festigkeit bei kleinstem Gewicht. Ihr Prinzip besteht in der Regel darin, Rovings oder Gewebebänder in einer Tränkvorrichtung mit Harz zu imprägnieren, in einer Abstreifvorrichtung vom überschüssigen Harz zu befreien und über Führungsrollen auf einen Wickeldorn zu wickeln. Selbstverständlich können auch Prepregs verarbeitet werden.

Naturgemäß läßt dieses Verfahren nur das Wickeln rotationssymmetrischer Strukturen zu. Es gelang damit im Jahre 1948 Richard Young zum erstenmal einen Behälter für festen Raketentreibstoff aus Glasfasern und Epoxidharz herzustellen.

Grundsätzlich handelt es sich bei allen Wickelsystemen um eine Kombination von hin- bzw. hergehenden, drehenden Bewegungen, wobei zu beachten ist, daß beim Wickeln die Fäden nebeneinander zu liegen

kommen (Bilder 3.2 und 3.3). Das bedeutet, daß die Drehzahl des Kernes mit dem Vorschub der Fadenführung abgestimmt sein muß.

Nach [Dürrkopp] kann man die einzelnen Wickelverfahren nach der Wickelkernkinematik in Drehbank-, Planeten- und Taumelsysteme und nach der Art der Fadenablage beim Wickeln in schraubenförmiges Wickeln, Wickeln von Pol zu Pol und das Strickland-B-Verfahren einteilen.

Diese Hauptwickelsysteme sollen nun etwas näher beschrieben werden, so wie es in der VDI 2011, bei [Neitzel] und [Haferkamp] sehr gezielt geschehen ist und hier teilweise übernommen werden soll.

#### a) Schraubenförmiges Wickeln

Das schraubenförmige Wickeln ist das am weitesten verbreitete Verfahren.

Beim Arbeiten mit einem rotierendem Kern wird das Verstärkungsmaterial über einen beweglichen Führungsarm aufgewickelt. Der Wickelwinkel wird aus den an das Bauteil gestellten Anforderungen und seiner geometrischen Form ermittelt. Er liegt zwischen ca.  $10^\circ$  und  $90^\circ$  (Umfangswicklung) und wird durch die Drehgeschwindigkeit des Kernes und den Vorschub der Fadenführung eingestellt. Die Fadenführung bewegt sich parallel zur Längsachse des Kernes. Einer vollständigen Überdeckung des Kernes entsprechen also zwei Schichten des Faserwerkstoffs.

Bei nicht rotierendem Kern wird der Faden vorbeigeführt. Nachteilig ist dann, daß sich bei dem nun liegenden Kern das Harz beim Naßverfahren an der Unterseite sammelt.

#### b) Das Strickland-B-Verfahren

Das Strickland-B-Verfahren ermöglicht das Wickeln konischer Körper. Mit Hilfe eines rotierenden Armes werden bei diesem Verfahren Längsfäden in Achsrichtung auf den Kern gelegt, durch die die notwendigen Umfangswicklungen fixiert werden.

#### c) Wickeln von Pol zu Pol

Das Wickeln von Pol zu Pol ermöglicht Wickelwinkel kleiner ungefähr  $15^\circ$  und damit das Herstellen von geschlossenen Behältern. Diese Wickelart liefert die beste Festigkeit in Achsrichtung. Die Faserablage kann dabei planar oder geodätisch sein (die Begriffe planar und geodätisch werden im nächsten Abschnitt erklärt).

Bei rotierender Fadenführung dreht sich der Wickelkern langsam um

seine Achse, während der Arm mit dem Faden um den Körper rotiert. Bei feststehender Fadenführung ist die Achse des rotierenden Wickelkörpers gegenüber der Horizontalen um den Wickelwinkel geneigt. Die Drehung um diese Achse ist langsam und dient nur dem Fadenvorschub. Zusätzlich rotiert der Kern um eine senkrechte Achse, die eigentliche Wickelachse.

Dazu noch ergänzend gibt Neitzel je nach den erforderlichen Eigenschaften eine etwas andere Einteilung der Wickelarten an (Bild 3.4),

das reine Umfangswickeln, wenn die Last überwiegend in Umfangsrichtung auftritt;

das kombinierte Umfangs- und Schraubenwickeln, mit dem man gute Festigkeit in Achs- und Umfangsrichtung erzielt;

das reine Schraubenwickeln, welches für sich nicht ändernde Belastungsrichtungen optimal wäre;

das Wickeln von Pol zu Pol, das die beste Festigkeit in Achsrichtung ergibt;

das Doppelschraubenwickeln für Teile mit unterschiedlichen Polöffnungen.

Zu den einzelnen Wickelverfahren führt Ainsworth noch einige zusätzliche Bemerkungen an: Umfangswickeln reduziert die festigkeitsmindernden Kreuzungspunkte auf dem Polrand. Für sich in der Richtung ändernde Belastungen ist das Schraubenwickeln nicht optimal, da die Fasern nicht in Hauptspannungsrichtung liegen, so daß bei Änderung der Belastungsrichtungen <sup>das Horn</sup>erheblich zum Tragen herangezogen wird. Das führt bei GFK-Behältern zu dem bekannten Schwitzen (Weeping), falls kein abdichtender Liner verwendet worden ist.

Liegen Langzeitbelastungen und größere Lastwechselzahlen vor, so ist Umfangswickeln in Verbindung mit planarem Wickeln am besten. Da beim planaren Wickeln gegenüber dem exakten geodätischen Wickeln von Pol zu Pol direkt über die Polkappen gewickelt wird, können Behälter mit unterschiedlichen Polöffnungen fast ohne Gewichtsverlust hergestellt werden. In diesem Zusammenhang sei aber auf Abschnitt 4.9 verwiesen.

### 3.4 Herstellungszubehör für Wickelverfahren

#### 3.4.1 Kerne

Die einzelnen Faserstränge müssen auf einen Kern gewickelt werden, dessen Außenkontur der Innenkontur des fertigen Verbundkörpers entspricht. Somit ist es unabhängig von der Art eines Verbundkörpers notwendig, einen Kern analog Bild 3.5 zu verwenden. An diesen werden



entsprechend den verschiedenen Fertigungsprozessen - Verwickeln von Rovings, Handlaminierung von Matten usw. - und auch den unterschiedlichen Strukturen entsprechend - Behälter, Rohre, Scheiben, Stäbe usw. - die mannigfaltigsten Forderungen gestellt.

Weiter sind die chemische Verträglichkeit, das Korrosionsverhalten, das Temperaturverhalten und die Permeabilität bei in einem Wickelbehälter verbleibendem Kern (hier z.B. dünner, druckstabilisierter Liner) von großem Interesse.

Ganz grob können die Kerne in folgende Gruppen unterteilt werden:

herauslösbarer Kern;  
wiederverwendbarer Kern;  
Linerkern,

wobei die folgenden an alle Kernarten gestellten Anforderungen einzuhalten sind:

- genaue Zentrierung (z.B. zwecks Einhaltung der Wickelbedingungen);
- genügend hohe Druckfestigkeit, Formerhaltung beim Wickelprozeß (keine Durchbiegung);
- gute Formgebung, glatte Oberfläche;
- kleiner Wärmeausdehnungskoeffizient;
- Wärmebeständigkeit beim Aushärten;
- glatte Oberfläche.

Welche Art von Kern die beste ist, kann dabei nur für den speziellen Verbundkörper mit Blick auf seine geometrische Form, die Stückzahl und die Einzelwerkzeugkosten gesagt werden. Hier sollen die Eigenheiten der Kerne und später auch der Liner im wesentlichen behälterbezogen aufgeführt werden

#### a) herauslösbarer Kern

Gips, in den z.B. eine Kette mit eingelegt wird, mit deren Hilfe nach dem Härten <sup>des</sup> Gips gebrochen werden kann;

eutektisches Salz, das wasserlöslich ist und auf unterschiedliche Schmelzpunkte ausgerichtet werden kann;

Quarzsand-Polyvinylalkohol-Gemisch, das ebenfalls wasserlöslich ist, zusätzlich aber preiswerter und formbeständiger ist als die vorgenannten (Bild 3.5 );

eutektisches Metall, das einen niedrigen Schmelzpunkt besitzt, aber sehr schwer und teuer ist.

Zur Herabsetzung des Kerngewichtes, seiner Aushärte- und Lösezeit und um Schwindrisse zu vermeiden, wird im allgemeinen ein Hohlkern hergestellt. Das kann z.B. ein druckaufnehmendes Gerüst mit dicker Wandschale beim lösbaren Kern sein, führt aber im allgemeinen zu wiederverwendbaren Kernen. Da im allgemeinen die Oberflächen der Kerne rau und porös sind, muß ein Überzug aufgeklebt werden, der seinerseits allein oder durch ein Trennmittel mit einem weiteren Überzug verbunden für eine exakte Verbundinnenfläche garantiert.

#### b) wiederverwendbarer Kern

Metallsegmente (zuzüglich Aussteifung bei Behältern), deren Kostenaufwand nur bei höherer Stückzahl zu rechtfertigen ist;

#### c) Linerkern

Hier erfolgt die kombinierte Anwendung eines Liners (Büchse) sowohl als Abdichtung als auch als Kern, um Behälter zu erstellen.

Dünne Faserverbundschale, die vorher auf einem einfachen Kern gewickelt, dann aufgeschnitten und des Kernmaterials entledigt wird. Die Schalen verbleiben nach Zusammenkelben und Wickeln im Bauteil. Diese Lösung ist nicht gewichtsoptimal. Beim Wickeln eines Behälters muß dieser Verbundliner außerdem innendruckstabilisiert werden.

Aluminium-Liner aus fließgedrückten AlMg<sub>3</sub>-Schalen. Meistens eine Verbindung von drei Linerteilstücken durch zwei Elektronenstrahlschweißnähte gefügt. Die Wandstärken sind 0,2 bis 0,5 mm. Der Liner kann aus zwei Schüssen hergestellt werden, wobei der Fitting gedreht und der Boden nebst Zylinderstück aus dem Vorformling heraus fließgedrückt wird.

Innendruckstabilisierung beim Wickeln sorgt für ein Nichtauftreten von Beulen. Beim Verbund muß dabei beachtet werden, ob sein Dehnungsvermögen mit dem des Liners zusammenpaßt.

#### 3.4.2 Liner

Beim Auftreten aggressiver Medien und beim Auftreten hoher Drücke sind Faserwerkstoffe durch eine Auskleidung zu schützen, damit es nicht zur Auflösung bzw. Durchlässigkeit der Strukturwandung kommt. Diese Auskleidung auf der Innenseite eines Behälters heißt Liner. Er kann je nach den Einsatzbedingungen organischer oder anorganischer

Art sein. Die Hauptforderungen an einen Liner sind

- Korrosionswiderstand;
- Undurchlässigkeit für Gase und Flüssigkeit unter Druck;
- Dehnungsverträglichkeit mit dem Verbundwerkstoff, gute Zweiachsige Belastbarkeit;
- ausweichende Ermüdungsfestigkeit.

Da die Liner aber nicht nur als Auskleidung dienen, kann man sie unterteilen in solche, die reine Auskleidungsfunktionen ausüben, und solche, die zwei oder mehrere Aufgaben lösen.

#### a) Metalliner

Der Wunsch nach kleiner Leckrate von Druckbehältern und der Verwendung kryogener Füllmedien macht eine Verwendung von metallischen Linern notwendig. Geeignet dafür sind zwei Sorten: Stahl- und Aluminiumliner.

Da die Liner häufig in den Fitting (Bild 3.6) übergehen, wird im allgemeinen ein ausreichend fester, aber leichter Werkstoff z.B. AlMg3 ausgewählt, weil man bei ihm - bei gleichem Gewicht - einen dickeren Querschnitt wählen kann, was sich sehr günstig auf die Biegesteifigkeit des Fittings auswirkt. Metalliner sollen so dünn wie möglich sein. Auch das spricht für Aluminium, weil ein gleichdicker Stahlliner erheblich schwerer ist, aber aus Fertigungsgründen nicht dem Verhältnis der spezifischen Gewichte entsprechend dünner hergestellt werden kann. Allerdings können die Wandstärken nach dem Wickelvorgang elektrolytisch noch auf etwa 0,15 mm abgetragen werden.

Grundsätzlich ist die Wahl des Liners auch von der Wahl eines kalt- oder warmhärtenden Harzes abhängig, weil z.B. infolge Dehnungsbehinderung Beulgefahr besteht.

Für Innendruckbehälter legt Morris, 1969, dem Festigkeitsingenieur vier Auslegungskonzepte für Metalliner vor:

elastischer, glatter Liner, der nur im elastischen Druck-Zug-Bereich arbeitet, damit unter Druck kein Beulen auftritt;

verklebter, glatter Liner, der im plastischen Bereich arbeiten kann, weil die Verklebung ein Beulen verhindert (für den kritischen Radius einer unverklebten Stelle sollte jedoch ein Überschlag vorgenommen werden);

gesickter Liner, der aufgrund der zusätzlichen Sicken bzw. Falten auch nichtverklebt im elastischen Bereich arbeiten kann;

glatter, dickerer lastmittragender Liner, der während der Betriebszeit nur im elastischen Bereich arbeitet, aber entsprechend dem Autofrettageprinzip einer Anfangsverformung unterworfen sein kann.

Liner, speziell metallischer Art, müssen sehr genau gearbeitet sein, damit keine Schwierigkeiten beim Wickelvorgang entstehen und die zu wickelnde Struktur gut reproduzierbar wird. Ungleichförmigkeiten führen nicht nur zu schwieriger Wickelmaschineneinstellung, sondern u.a. zu Wickelbandablageverschiebungen, Lufteinschlüssen bei Einbeulungen mit eventuell nachfolgenden Instabilitäten im Betrieb und zu ungleichmäßigem Faseranteil über der Oberfläche.

#### b) sonstige Liner

Als Liner werden außerdem gummielastische Stoffe, Naturkautschukblasen, polymere Filme, Metallüberzüge und Metallfolien verwendet. Sie sind dabei immer in Verbindung mit dem Kern zu betrachten, auf den sie teilweise aufgetragen werden. Um diffusionsdichte Hochdruckbehälter für Gase herzustellen, wurden wasserlösliche "Paraplast"-Kerne mit einer elektrisch leitenden Schicht versehen, dann auf galvanischem Wege mit einer Metallschicht versehen (z.B. Nickel) und überwickelt. Nach Auswaschen des Kerns erhielt man eine Hochdruckflasche mit Metalliner.

Als bewährtes und rationelles Verfahren bietet sich eine Methode an, bei der als Wickeldorn eine nach dem Blaserfahren hergestellte Flasche aus einem Thermoplasten verwendet wird, die im Strukturteil verbleibt und gleichzeitig dem Behälter als funktioneller Liner dient. Je nach dem aufzunehmenden Medium erfolgt die Wahl des entsprechenden, blasfähigen Thermoplasten. Ist die Eigenfestigkeit bzw. Steifigkeit eines solchen Linerdorns nicht genügend groß, um der Beanspruchung während des Wickelns zu widerstehen, so genügt häufig ein Aufblasen dieses Dorns während des Wickelns und Aushärtens, um eine genügende Formbeständigkeit zu gewährleisten.

### 3.5 Einzelheiten der Wickeltechnik

#### 3.5.1 Wickelbare Bauteilformen

Die Wickelverfahren dienen im wesentlichen zur Herstellung nahtloser,

nicht vollkommen geschlossener, hohler Rotationskörper [Geiger/Füller]. Allerdings sind nur solche Körper wickelbar, deren Radius sich stetig ändert. Eine Sammlung der wichtigsten Formen bzw. Anwendungen zeigt Bild 3.7:

Rohr, Zylinder  
Raketenspitze, Adapter, Kegel  
Isotensoid, Ovaloid, Planaroid  
Kugel, Ellipsoid.

Zusätzlich zu der Rotationssymmetrie sollte der Wickelkörper bei geodätischer Fadenablage bezüglich seiner Böden (Dome) symmetrisch sein, weil sonst sich widersprechende Wickelwinkelforderungen gestellt werden. Diese Aussage wird erst im übernächsten Abschnitt erklärt.

Zur Begründung, warum nicht jede beliebige Form gewickelt werden kann, müssen Grundlagen der Fadenführung erarbeitet werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Fadenvorschub beim Wickeln kontinuierlich, entsprechend den Erfordernissen geändert werden kann. Allgemein kann man sagen: Will man mit einem endlosen Faden eine geschlossene Hülle auf einen Kern wickeln, so muß man zwangsläufig auf beiden Polen den Fadenvorschub umkehren. Das bedeutet, daß der Wickelwinkel an den Umkehrpunkten immer  $90^\circ$  zur Längs-(Wickel-)achse beträgt.

### 3.5.2 Wickelbedingungen

In den Differentialgleichungen, die für Wickelkörper nach der Netztheorie aufgestellt werden, ist eine Größe  $\tan \alpha$  enthalten, in der  $\alpha$  der Wickelwinkel ist (s. Bild 3.8). (Solange das Harz weich ist, das heißt für den Wickelvorgang, gilt immer die Netztheorie als die das Gleichgewicht beschreibende Theorie). Sie wird jedoch erst in einem späteren Kapitel nebst anderen Berechnungstheorien erläutert.

Gewöhnlich bezeichnet man  $\tan \alpha$  als Wickelbedingung. Man findet sie entsprechend den Erfordernissen der Fertigung (Wickelmaschinenart) oder infolge eines gewollten Fadenkraftverlaufes (Geodätisch, falls die Wickelmaschine es kann) als funktionellen <sup>Zusammenhang</sup> von geometrischen Größen des Wickelkörpers. Je nach der Fadenablage kann man zwei Wickelarten unterscheiden, das planare und das geodätische Wickeln. Ihre Wickelbedingungen werden jetzt vorgestellt.

Nimmt man an, daß senkrecht zur Fadenrichtung keine Reibungskräfte übertragen werden, dann muß der Faden so abgelegt werden - sonst würde er sich ~~er~~lich etwas hinrutschen -, daß er den kürzesten Weg für eine gesamte Umschlingung benötigt, wenn die Bedingung  $\alpha = 90^\circ$

für die Umkehrpunkte eingehalten wird. Zwischen allen beliebigen Punkten entlang einer Fadenlinie muß dann der Faden auf einer geodätischen Linie verlaufen. Wir kommen somit zu:

### a) Geodätisches Wickeln

Beim geodätischen Wickeln (Bild 3.9) gibt uns die Clairautsche Bedingung für geodätische Linien auf Rotationskörpern die Beziehung

$$r \cdot \sin \alpha = e \quad (3.1)$$

an. Diese differentialgeometrische Beziehung liefert nach trigonometrischer Umformung die Wickelbedingung

$$\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{e^2}{r^2 - e^2} \quad (3.2)$$

Zur besseren Einprägung soll der Verlauf des Wickelwinkels  $\alpha$  bzw. die Clairautsche Bedingung bei einem Kegel hergeleitet werden (Bild 3.10). Dabei liegt der Untersuchung die mathematische Aussage zugrunde, daß geodätische Linien von Kegeln in der Abwicklung als Gerade erscheinen, und daß am kleinen Radius des Kegels das Band umgekehrt werden soll.

In der Abwicklung muß also die geodätische Linie an den kleinen Kreis tangieren. Der Sinus des Wickelwinkels muß dann am Zylinderdurchmesser

$$\sin \alpha_z = x_e / x_R = e \cdot 2 \sin \xi / (R \cdot 2 \sin \xi)$$

sein und an einer beliebigen Stelle  $\sin \alpha = e/r$  werden. Diese Bezeichnung stellt wieder die vorgenannte Clairautsche Bedingung dar, g.e.d..

### b) Planares Wickeln

Beim planaren Wickeln (Bild 3.11) kann die Funktion  $\tan \alpha$  aus der geometrischen Beziehung gefunden werden [Zimmermann], daß der Faden in einer Ebene -also planar- verläuft. Die zugehörige Formel wird im Kapitel 4 aufgeführt (Tabelle 4.1).

Planares Wickeln bedeutet den Erhalt einer anderen Differentialgleichung (kurz DGL) als beim geodätischen Wickeln und damit einer anderen Bodenkontur.

### c) Besonderheiten der Wickelarten

Eine wesentliche Konsequenz des geodätischen Wickelns für die Faserbeanspruchung ist mit [Zimmermann] in [Cuntze] gezogen worden. Durch spezielle Substitution kann man nämlich beweisen, daß die geodätische Kontur zu einem Isotensoiden, einem Körper gleicher Festigkeit, führt. Beim geodätischen Wickeln sind somit Wickelbedingung und Forderung nach gleicher Beanspruchung der Fasern ( $\sigma_F = \text{const}$ ) identisch.

Da beim geodätischen Wickeln auch eine reibungsfreie Oberfläche das Fadenablegen gestattet, kann man umgekehrt für das planare Wickeln folgern, daß hier beim Wickeln, erst durch Schubspannungen infolge nicht verschwindender Reibung das Wegrutschen der Fäden verhindert wird.

#### d) Einfluß der Reibung

Um ein Gefühl für die Bedeutung der Reibung zu bekommen und weil es für das sogenannte "Nichtlineare Wickeln" sehr wichtig ist, sollen die wesentlichen Beziehungen kurz beschrieben werden.

Bei Abweichungen der Fadenablage von der geodätischen Linie wird die immer vorhandene Reibung zwischen Faden und Wickelkern bis zu einem bestimmten Grenzwert das Abrutschen verhindern. Wie groß diese Abweichungen sein dürfen, ist besonders wichtig bei der Bestimmung der Mindestlängen des Zylinderteils von Behältern mit unterschiedlichen polaren Öffnungen, denn bei diesen muß der Wickelwinkel über der Zylinderlänge geändert werden.

Das Gleichgewicht in der Tangentialebene des Zylindermantels liefert nach Bild 3.12 die Beziehung für ein Band

$$Z \cdot d\alpha = \sigma_F \cdot F_{\text{Band}} \cdot d\alpha = \mu N ,$$

wobei  $N$  die Preßkraft des Bandes normal zum Ellipsenschnitttrand ist und senkrecht zur genannten Tangentialebene steht.

Die Gleichung für den Fadenzug führt auf

$$N = \sigma_F \cdot F_{\text{Band}} \cdot d\vartheta .$$

Aus diesen beiden Gleichgewichtsbedingungen leiten wir eine physikalische Bedingung

$$d\alpha = \mu \cdot d\vartheta$$

her. Mit den geometrischen Beziehungen

$$dx = r \cdot d\varepsilon \quad , \quad \varrho \cdot d\vartheta = dy \quad , \quad \sin \alpha = dx/dy$$

und dem größten Krümmungsradius der einbezogenen Ellipse

$$\varrho = R / \sin^2 \alpha$$

erhalten wir außerdem

$$d\vartheta = \sin \alpha \cdot d\varepsilon .$$

Das zu lösende Integral ist also

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\sin \alpha} = \mu \int_0^{\Delta \varepsilon} d\varepsilon .$$

Es hat die Lösung

$$\ln \left( \tan \frac{\alpha_1}{2} \right) - \ln \left( \tan \frac{\alpha_0}{2} \right) = \mu \cdot \Delta \varepsilon .$$

Umgeformt finden wir für den Umfangswinkel, auf dem der Winkelverzug  $\alpha_1 - \alpha_0$  stattfindet,

$$\Delta \epsilon = \frac{1}{\mu} \ln \frac{\tan \frac{\alpha_1}{2}}{\tan \frac{\alpha_0}{2}} \quad (3.3)$$

Der Zusammenhang der zur Wickelwinkeländerung notwendigen Mindestlänge des Zylinders mit dem Drehwinkel  $\Delta \epsilon$  führt über

$$dz = dx \cdot \cot \alpha$$

zum Integral

$$\int_0^{l_{\min}} dz = R \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \cot \alpha \, d\epsilon = \frac{R}{\mu} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\cot \alpha}{\sin \alpha} \, d\alpha$$

Die Lösung dieses Integrals ergibt (Betrag nehmen)

$$l_{\min} = - \frac{R}{\mu} \left[ \frac{1}{\sin \alpha_1} - \frac{1}{\sin \alpha_0} \right] \quad (3.4)$$

Aus dieser Formel ist ersichtlich, daß der Zylinderradius die maximale Änderung des Wickelwinkels linear beeinflusst und daß die erforderliche Zylinderlänge vom Anfangswinkel abhängt. Je kleiner der Wickelwinkel, umso größer die erforderliche Zylinderlänge. Die Reibwerte der Naßwickelbänder liegen um  $\mu = 0,1$ . Bei Prepregs sind die Werte höher.

In Bild 3.13 ist die Veränderung des Wickelwinkels zweier Behälter angegeben.

### 3.5.3 Bandbreite, Lagenanzahlen und Wandstärke

Die tatsächliche Bandbreite hat indirekt Einfluß auf die Festigkeit eines Behälters oder eines anderen Bauteils. Für die Vorbemessung wird die Bandbreite entsprechend den gesammelten Erfahrungen geschätzt. Für die wirkliche Auslegung ist jedoch eine genaue Kenntnis notwendig. Die Bandbreiten  $B_\alpha$  und  $B_{q_0}$  können zum einen an einer Probewicklung direkt als Mittelwert über mehrere Bandbreiten gemessen werden, zum anderen lassen sich die rechnerischen Werte mit Hilfe des zugehörigen Wickelprotokolls ermitteln. Bei einem biaxial gewickelten Behälter gilt beispielsweise (Bild 3.14).

$$\text{Umfangslage: } B_{q_0} = \frac{\text{Zylinderteil-Länge}}{\text{Anzahl der Schlittenumläufe für } 0} = \frac{l_z}{\bar{n}_{q_0}} \quad (3.5a)$$

$$\begin{aligned} \text{Kreuzlage: } B_\alpha &= B_1 \cos \alpha_2, \\ B_1 &= \frac{\text{Umfang}}{0,5 \cdot \text{Anzahl der Schlittenumläufe für } \lambda} = \frac{2\pi R_z}{\bar{n}_\alpha} \quad (3.5b) \end{aligned}$$



Da der Querschnitt bekannt ist, kann mit bekannten Bandbreiten die Festlegung der Wandstärken getroffen werden.

Die Dicken der einzelnen Wickellagen sind bei Kreuz- und Umfangslagen

$$t_{\alpha}^{(1)} = \frac{F_{\text{Band}}/\varphi}{B_{\alpha}} \quad \text{und} \quad t_{90}^{(1)} = \frac{F_{\text{Band}}/\varphi}{B_{90}} \quad (3.6)$$

Die Gesamtwandstärken des Laminates sind

$$t_{\alpha} = N_{\alpha} \cdot t_{\alpha}^{(1)} = \alpha \frac{F_{\text{Band}}/\varphi}{\frac{2\pi R_2}{n_{\alpha}} \cos \alpha_2} \quad \text{und} \quad t_{90} = N_{90} \cdot t_{90}^{(1)} \quad (3.7)$$

wobei  $N_{\alpha}$ ,  $N_{90}$  die Vielfachheit der zu wickelnden Lagen darstellen, die sich aus der Festigkeitsrechnung ergeben.

Zum besseren Verständnis sei die Ermittlung der Lagenanzahlen an einem Beispiel durchgeführt:

Es ergaben sich bei  $\varphi = 60\%$  in einer Rechnung die erforderlichen Verbundwandstärken von  $t_{\alpha} = 1,01$  mm und  $t_{90} = 1,30$  mm bei einem Bandquerschnitt der Fasern von  $F_6 = 0,294$  mm<sup>2</sup> (6 Rovings à 1440 Filaments von ca. 6,6 μm). Unter der Annahme  $B_{\alpha} \approx B_{90} = 2,6$  mm erhalten wir  $t_{\alpha}^{(1)} = t_{90}^{(1)} = 0,294/0,6 \cdot 2,6 = 0,188$ . Damit errechnen sich folgende Lagenanzahlen:  $N_{\alpha} = 1,01/0,188 = 5,4/$  und  $N_{90} = 1,30/0,188 = 6,9$

Da es aus Wickel- und Symmetriegründen keine einfachen Kreuzlagen gibt - es sind ein Hingang und ein Hergang der Wickelmaschine notwendig - ergeben sich als wickelbare doppelte Lagen 4⊙ und 3X. Unter den vorliegenden Bedingungen führt die Auslegung zu einer Überdimensionierung. Nach der angewendeten Netztheorie muß aus Gleichgewichtsgründen gelten

$$\frac{N_{\alpha}}{N_{90}} = \frac{5,4}{6,9} = 0,78 \approx \frac{N_{\alpha \text{ verh.}}}{N_{90 \text{ verh.}}} = \frac{(3 \cdot 2)/}{(4 \cdot 2)0} = \frac{6}{8} = 0,75.$$

Eine Korrektur über die Bandbreite vorzunehmen, ist allerdings maschinentechnisch häufig möglich. Im vorliegenden Fall würde man eine Korrektur vornehmen.

Die Verbundwandstärke ist schließlich

$$t_{\text{verh.}} = t_{\alpha \text{ verh.}} + t_{90 \text{ verh.}} \quad (3.8)$$

### 3.5.4 Wickelmuster

Grundforderungen an das Wickeln sind:

- Die Ablage der Wickelbänder muß so erfolgen, daß sie bei Belastung möglichst in Richtung der Zugbeanspruchung liegen.

- Es muß ein geschlossenes Muster gewickelt werden.

Die erste Forderung als Grund-Auslegungsregel soll hier nicht mehr abgehandelt werden, vielmehr gilt es, einige Ausführungen zum Wickelmuster zu machen.

Beim Betrachten der verschiedenen Wickelarten zeigt sich, daß beim schraubenförmigen (geodät.) Wickeln im Gegensatz zum Umfangswickeln (geodät.) und Polarwickeln (nicht geodät.) verschiedene Wickelmuster möglich sind (vgl. Bilder 3.15 u. 3.3)

- Einfachmuster und
- Mehrfachmuster.

Der wesentliche Unterschied ist, daß beim Mehrfachmusterwickeln ein gleichmäßigerer Aufbau erfolgt, aber auch festigkeitsmindernde Kreuzungspunkte entstehen. Zu beachten ist außerdem beim Wickelvorgang: Einfachmuster verursachen eine unsymmetrische Belastungsform von Kern bzw. Linerkern, Mehrfachmuster verteilen die Lasten besser. Das Muster hängt vom Wickelwinkel  $\alpha$  und beim Behälter von der Zylinderlänge ab.

Bevor weiter auf das Wickelmuster eingegangen wird, muß noch eine Hilfsgröße erklärt werden. Außer dem Wickelwinkel  $\alpha$  ist der Umschlingungswinkel  $\beta$  für das Wickelmuster von Bedeutung. Dieser Umschlingungswinkel hat gemäß Bild 3.8 nichts zu tun mit einer Umschlingung des Polfittings, da eine solche Umschlingung weder beim geodätischen noch beim planaren Wickeln auftreten sollte. Er ist verschieden groß bei den beiden vorgenannten Wickelarten.

Allgemein wird beim Wickelmuster das Ziel verfolgt, keine zu hohe Teilung ( $T \leq 4$ ) zu erzielen (Bild 3.16), weil zu hohe Teilungen bzw. Vielfachmuster keine geschlossene Struktur ergeben. Das liegt zu einem Teil an der begrenzten Ablegegenauigkeit der Wickelmaschine. Außerdem baut sich der Verbund am Polfitting stark auf, was zu Harznestern und kleinem Faservolumenanteil führt. Bild 3.15 b zeigt einen Behälter mit  $T = 52$ , der obwohl er sehr gut gewickelt war, nicht den erhofften Berstdruck brachte.

Um ein geschlossenes Muster zu erhalten, müssen mehrere Bedingungen eingehalten werden. Als erstes ist dabei die Gleichung zur Bestimmung der Teilungszahl maßgebend

$$\frac{\beta_{\text{ges.}}}{360^\circ} = \frac{DU}{T}$$

Als Größen sind in dieser Formel zu ermitteln: DU als Vielfaches der Dornumdrehungen und T als Teilungszahl. Genauer: DU ist diejenige kleinste ganze Zahl von Umdrehungen, nach der das Wickelband - um eine Wickelbreite versetzt - wieder neben das zuerst abgelegte Band kommt.

Der Quotient  $\frac{DU}{T}$  muß deshalb ein Bruch aus ganzen Zahlen sein. Als Richtgrößen können angenommen werden  $T \leq 4$ ,  $DU \leq 8$ . Zur Bestimmung von  $\frac{DU}{T}$  muß der Drehwinkel  $\beta_{ges.}$  bekannt sein. Er setzt sich zusammen aus

$$\beta_{ges.} = 2 (\beta_z. + \beta) = 2 (\beta_z. + \beta_{iso} + \beta_{\substack{\text{Kugel} \\ \text{Kegel}}}) \quad (3.9)$$

und wird von der Geometrie des Isotensoidbehälters geliefert. Eine anschauliche Darstellung von Dornumschlingungen und Teilungszahlen zeigt Bild 3.17. Wickelbare Verhältnisse  $\frac{DU}{T}$  im Bereich kleiner Teilungszahlen sind in Tabelle 3.1 zu finden.

Mit den Größen (der Einfluß der Bandbreite und der Wanddicke ist der Übersichtlichkeit hier nicht einbezogen worden)

$$\sin \alpha = \frac{e}{r} \quad , \quad \tan \alpha = \frac{e}{\sqrt{r^2 - e^2}} \quad (3.10)$$

$$\sin \alpha_z. = \frac{e}{R_z.} \quad , \quad \tan \alpha_z. = \frac{\bar{e}}{\sqrt{1 - \bar{e}^2}} \quad , \quad \bar{e} = \frac{e}{R_z.}$$

gilt, da

$$\tan \alpha_z. = \frac{\hat{\beta}_z. R_z.}{l_z.} = \beta \frac{\pi}{180} \frac{R_z.}{l_z.}$$

für den Umschlingungswinkel im Zylinderbereich

$$\beta_z. = \frac{180}{\pi} \tan \alpha_z. \frac{l_z.}{R_z.} \quad (3.11)$$

Die beiden übrigen Anteile des gesamten Umschlingungswinkels seien zur Abrundung des Verständnisses auch noch angegeben. Es folgt aus [Zimmermann] mit Hilfe numerischer Integration des Ausdruckes

$$d\hat{\beta}_{iso} = \frac{\tan \alpha}{r} \sqrt{1 + r'^2} dz \quad ,$$

der Umschlingungswinkel im Isotensoidbodenbereich

$$\beta_{iso} = \frac{180}{\pi} \int_{z=0}^{z_w} \frac{e}{r} \sqrt{\frac{1+r'^2}{r^2+e^2}} dz \quad (3.12)$$

Da im Punkt  $r_w, r_z.$  der Wendepunkt und der Endpunkt liegen (Gaußsche Krümmung dann kleiner Null (vgl. Abschnitt 4.9), schließt bis zum Pol ein Kugel- oder Kegelstück an. Die Größe  $\beta_{\substack{\text{Kugel} \\ \text{Kegel}}}$  wird ebenfalls wie  $\beta_{iso}$  durch Auffinden von  $r(z)$  mittels numerischer Integration (vgl. Abschnitt 4.9.3) bestimmt.

Wie wir sehen, ist im interessanten Bereich der Umschlingungswinkel  $\beta$  immer kleiner als  $180^\circ$ . Daraus folgt, daß bei der Teilung  $T = 1$  immer

ein Zylinderstück vorliegen muß.

Als letztes muß noch ein volles Muster garantiert werden. Diese Bedingung läßt sich in die Formel

$$2\pi r = \frac{B_\alpha}{\cos \alpha} k T \quad (3.13)$$

kleiden, Sie leitet sich aus der Notwendigkeit ab, daß an jeder axialen Stelle des Wickelkörpers, alle Bänder auf dem Umfang  $2\pi r$  liegen müssen. Dabei wird aber bei bekannten  $B_\alpha$ ,  $\alpha$ ,  $T$  die Festlegung der Bandzahl  $k$  pro Symmetriesektor so vorgenommen, daß an der Stelle des kleinsten Wickelwinkels ein geschlossenes Muster erreicht wird, sonst entstehen Lücken zwischen den Bändern.

Für die wickeltechnische Vordimensionierung von Behältern muß noch eine Näherungsformel genannt werden. Nach [Cuntze], S. 34, ist das

$$\text{Volumen} \approx \pi R_z^3 \left( \underbrace{\frac{l_z}{R_z}}_{\text{Zylinder}} + 2 \cdot \underbrace{0,44}_{\text{Böden}} \right) \quad (3.14)$$

Die Auslegung eines zylindrischen Behälters mit Böden gemäß Bild 3.16 kann mit Hilfe der Tabellen 3.2<sup>u. 3.3</sup> erfolgen.  $R_z$ ,  $l_z$  sind darin Größen, die im allgemeinen aus Optimierungsrechnungen bezüglich der günstigsten Behälterform für ein bestimmtes Volumen gewonnen werden. Allerdings geschieht das unter Nebenbedingungen wie geringstes Gewicht, Einbaubarkeit in ein bestimmtes Gehäuse, Preis, günstige Fertigung, wobei man sehr auf die Wickelmuster achtet.

Nach den Bemerkungen auf den vorhergehenden Seiten wird zumeist unter vielen möglichen Formen diejenige ausgewählt, deren Tripel  $\alpha_z, R_z, l_z$  bei festem Volumen zu einer möglichst niedrigen Teilung führt. Zur Verdeutlichung der vorstehenden Ergebnisse sei noch bemerkt: Behälter, deren  $\beta_z$  um  $i \cdot 180^\circ$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) größer sind, haben dieselbe Teilungszahl.

Für die Praxis ist das Verhältnis  $DU/T$  keine ganze Zahl, sondern etwas größer als diese Zahl, da noch um eine, unterschiedlich große Bandbreite weiter gefahren werden muß. Die Berechnung des Umschlingungswinkels muß besonders bei kleinen  $\alpha_z$  mit einem Behälterberechnungsprogramm geschehen, weil kleine Fehler in der Größe des Umschlingungswinkels  $\beta$  größere Fehler in der Zylinderlänge hervorrufen. Beim Umschlingungswinkel kann allerdings in bestimmten Grenzen durch Verstellung des Fadenauges eine Korrektur vorgenommen werden.

Wenn an einer Stelle eines Wickelkörpers  $DU$ ,  $T$  und  $k$  festgelegt werden, so gelten sie für den ganzen Wickelkörper. An Stellen des Wickel-

körpers mit einem anderen  $r$  muß zur Erhaltung der Gleichung (3.13) der Wickelwinkel  $\alpha$  abgeändert werden.

Eine Veränderung von  $\alpha$  führt wieder zur nicht-geodätischen Ablage, gemäß Abschnitt 3.4.2c, so daß nur so kleine Winkeländerungen gemacht werden dürfen, wie die Reibung des Wickelbandes es erlaubt.

### 3.5.5 Wickelspannung und ihre Folgen

Um eine gleichbleibende Qualität des Verbundes garantieren zu können, reicht es nicht aus, einen Minimal-Faseranteil zu gewährleisten und eine gute Faserverteilung über den Querschnitt. Es gehören noch Qualitätsmerkmale wie gute Faserausrichtung, keine Nester im Verbund u.a. dazu. Einfluß auf alle diese Größen nimmt die Wickelspannung, auch Fadenspannung genannt.

Jeder Wickelkörper muß mit einer bestimmten Wickel (band)-Spannung hergestellt werden, die nicht nur für die richtige Ablage des Bandes und ein sauberes Netzwerk sorgt, sondern auch für die gewünschte Parallelausrichtung der Faser. Durch diese Ausrichtung wird der tragende Faserquerschnitt erst voll genutzt.

Leider wird die Wickelspannung nach oben durch bestimmte Bedingungen begrenzt:

- Keine Vorschädigung der Fasern
- Sinnvoller Harzgehalt (Ausquetschen beim Naßwickeln)
- Gute Imprägnierung
- Keine Linerbeulung oder Kernverformung.

Eine vernünftige Wickelspannung für CFK beispielsweise ist die des folgenden Beispiels

$$\sigma_{\text{Wick.}} = \frac{Z}{F_c} = \frac{10 \text{ N}}{0,294 \text{ mm}^2} = 34 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ (Faserwert).}$$

Das entspricht einer Wickelzugkraft bei 6 Rovings pro Roving à 1440 Filaments von  $Z = 10/6 = 1,7 \text{ N}$ . Bei GFK werden größere Werte genannt. Höhere Abzugsgeschwindigkeiten des Wickelbandes verlangen höhere Wickelspannungen.

Müssen größere Wickelspannungen zur Gewährleistung einer richtigen Bandablage herangezogen werden, dann können sich sofort Schwierigkeiten mit den vier genannten Forderungen einstellen. Die größte Vorschädigung werden solche Wickelbänder erhalten, die aus Fasern geringer Bruchdehnung bestehen. Glasfasern sind deshalb wegen ihrer großen Dehnung problemloser zu verarbeiten als Kohlenstofffasern.

Der Grund für den Wunsch nach konstanter Vorspannung liegt darin, daß allein mit ihr der Harzgehalt bestimmt wird. Nicht die vom Harzband mitgebrachte Harzmenge, sondern die Spannung im Wickelband und die Krümmung der Dornoberfläche bestimmen den Harzanteil.

Wird der Fadenzug zu groß, so sieht das Netzwerk zwar recht gut aus, aber der Verbund wird zu trocken. Der Fasergehalt ist nicht mehr sinnvoll hoch, sondern zu hoch, denn mit zu geringem Harzgehalt geht die ertragbare Querbruchdehnung gegen Null. Infolge von Nichtumhüllung der Fäden mit Harz - schlechter Imprägnierung - werden Spannungsumlagerungen in Tragrichtung nicht mehr möglich.

Ein guter Verbund ist somit nicht ohne Fadenspannungskontrolle reproduzierbar. Die Kontrolle wird durch eine Kompensationsbremse und eine Rückholschwinge zwischen Imprägnierstelle und Fadenaugē durchgeführt, da durch sie Belastungsschwankungen durch Veränderung des Fadenweges ausgeglichen werden. Am Ende der Fadenzuführung wird dann die Fadenspannung mit einem geeigneten Meßverfahren kontrolliert. Besonders schwierig ist die Fadenspannungskontrolle bei nichtlinearen Wickelprogrammen, die immer dann vorliegen, wenn der Wickelwinkel sich örtlich ändert, bzw. wenn die Fadenabzugsgeschwindigkeit schwankt.

Ein großes Problem beim Wickeln von Rotationsschalen ist die Abnahme der Wickelspannung in den ersten Lagen durch Aufbringen der weiteren Lagen. Es kann sogar sein, daß die ersten Lagen in ihrer Fadenausrichtung gedrückt und verschoben werden, so daß die Laminatwerte keine gute Qualität darstellen. In solchen Fällen, die i.a. erst bei vielschichtigen Laminaten auftreten, hilft nur das Arbeiten mit gezielt abnehmender Wickelspannung von innen nach außen.

Infolge des Wickelzuges erhalten Festigkeit und Steifigkeit des Kernes oder des Liners erst ihre volle Bedeutung. Gibt z.B. ein Schaumstoffkern nach, so werden die ersten Wickellagen (entsprechend dem vorhin Erwähnten) geschädigt. Bei der Verwendung innendruckstabilisierter Liner kommt nach das Beulproblem beim Wickeln hinzu, und zwar wird durch Aufblasen des Liners ein Beulen verhindert. Bei diesem Beulen handelt es sich nicht um ein klassisches Stabilitätsproblem, da die Belastung infolge Umschnürung nicht konservativ ist.

Als Auslegungsbedingung für den Stabilisierungsdruck gilt: Die Stabilisierungsdruckerhöhung vor Aufbringen einer Lage muß theoretisch gleich dem zusätzlichen Wickeldruck nach Aufbringen dieser Lage sein. Praktisch braucht der Wickeldruck nicht voll angesetzt werden. Das zeigt die Tatsache, daß nach Ablage einiger Bänder die vorhergehenden entspannt werden, da sie nicht mehr wegen der Reibung der Bänder nachgestafft werden können. Ein Abzug von 30 % dürfte realistisch sein.

Die Möglichkeit, eine Innendruckstabilisierung von Linern beim Wickeln vorzunehmen, geht bei zu hoher Wickelzugspannung verloren. Welche Innendrucke vor dem Wickeln der einzelnen Lagen dabei aufzubringen sind, läßt sich leicht aus den Kesselformeln ermitteln. Von Interesse für den Behälter sind der Außendruck infolge einer doppelten Umfangslage  $\odot$  auf dem Zylinderteil

$$p_{\odot} = \frac{2t_{q_0}^F}{R_z} \sigma_{Wick.} \quad \text{mit } t_{q_0}^F \approx \varphi \cdot t_{q_0} \quad (3.15a)$$

und die Axiallast am Äquator infolge der Kreuzlage X

$$P_X = 2\pi R_z \cdot (2t_{\alpha}^F) \sigma_{Wick.} \cos\alpha_z. \quad (3.15b)$$

Um diese Last auszugleichen benötigt man, falls  $t_{\alpha}^F = t_{q_0}^F$ , einen Innendruck von

$$\begin{aligned} p_X &= \frac{P_X}{\pi R_z^2} = \frac{2\pi R_z \cdot (2t_{q_0}^F) \sigma_{Wick.} \cos\alpha_z}{\pi R_z^2} \\ &= 2 p_{\odot} \cos\alpha_z. \end{aligned}$$

Glg. 3.15 a) zeigt auch auf, daß der Wickelzug sich sehr am Behälterradius orientieren muß, weil bei gleicher Wickelspannung der wirkende Außendruck sich umgekehrt proportional zum Radius verändert. Kleine Radien erfordern somit steifere Kerne bzw. steifere Liner nebst höherem Stabilisierungsdruck bei gleichem Wickelzug.

### 3.6 Verarbeitung und Härtung (Auszug aus VDI 2010, Bl. 2 u. 3)

Die duroplastischen Kunststoffe, zu denen die UP-RH und EP-RH gehören, werden im allgemeinen in flüssiger Form verarbeitet. Es hat deswegen ein Härtungsvorgang zu erfolgen. Dabei findet durch Polymerisations-, Polykondensations- oder Polyadditionsvorgänge eine chemische Reaktion statt, die zu einer räumlichen Vernetzung der Moleküle führt. Gleichzeitig damit erfolgt eine irreversible Formgebung.

Die Handhabung der UP-RH und EP-RH sieht vor der Verarbeitung eine Mischung mit der vorgesehenen Reaktionsmittel- und Beschleunigermenge vor. Dabei muß bei den EP-RH das gewünschte Mischungsverhältnis sehr genau eingehalten werden.

Bei der Härtung wird zwischen Härtung bei Raumtemperatur oder Kalt-härtung (bis 80°C) und der Warmhärtung unterschieden, wobei man letzterer noch im Bereich über 120° den Namen Heißhärtung geben könnte. Die Verarbeitungszeit (Topfzeit) hängt wesentlich vom gewählten Harz-System ab. Gerade die Verarbeitungsspanne der EP-RH ist in weiten Grenzen variierbar. Sie hängt wesentlich vom Gelierungsbeginn ab

und äußert sich in einer kürzeren oder längeren Zeitspanne für die Entformung.

Unter Gelierzeit versteht man bei Raumtemperaturhärtung die Zeit von der Zugabe der Reaktionsmittel bis zum Beginn des Viskositäts- und Temperaturanstiegs. Sie ist praktisch mit der Verarbeitungszeit identisch und wird angegeben als Zeit innerhalb der die Temperatur der Probe um ca.  $10^{\circ}$  ansteigt (Bild 3.18).

Bei Warmhärtung wird als Gelierzeit (Anspringzeit) die Zeit angegeben, innerhalb der sich die Probe von  $65^{\circ}$  auf  $90^{\circ}\text{C}$  (für UP-RH) erwärmt (Bild 3.19).

Die Gelierzeit ist abhängig von der Reaktivität des Reaktionsharzes, dem Zusatz an Reaktionsmitteln und der Temperatur des Ansatzes, jedoch nicht von der Reaktionsharzmenge.

Die Härtingszeit ist die Zeitspanne, innerhalb der eine Reaktionsharzmasse ihre Höchsttemperatur erreicht; sie wird bei Raumtemperaturhärtung vom Einmischen der Reaktionsmittel an, bei Warmhärtung von  $65^{\circ}\text{C}$  an gerechnet.

Die Härtingszeit kann durch die Wahl des Reaktionsharzes, die Kombination verschiedener Reaktionsmittel und Beschleuniger, die Temperatur und die Beschleunigermenge variiert werden. Während der Verarbeitungszeit können hinzugefügte Inhibitoren den Gelierungsvorgang verzögern.

Der chemische Vorgang beim Härten ist im allgemeinen exotherm und hat bei nicht gesteuertem Temperaturverlauf einen Festigkeitsabfall zur Folge, der durch Ribildung infolge Eigenspannung verursacht wird. Nach Neitzel kann die Wärmeentwicklung durch Verminderung der Katalysatormenge, durch Kühlung und durch Mischen mit Harztypen von niedriger exothermer Reaktion beeinflusst werden.

Bei Kalthärtung tritt das Ribildungsproblem kaum auf, weil die Aushärtezeit bei Raumtemperatur erst nach Tagen oder Wochen erreicht wird. Allerdings ist bei Kalthärtung eine rechtzeitige Nachhärtung bei Temperaturen über RT sinnvoll, um die höchstmögliche statische und dynamische Festigkeit zu erreichen. Für einige Harzsysteme waren in Tabelle 2.3 die Härtezeiten angegeben worden.

Vor allem bei der Kalthärtung stört die lange Härtezeit der EP-RH. Einige UP-RH können schon nach 20 min. entformt werden, während die EP-RH Stunden oder gar Tage benötigen. Auch die Nachhärtung bei erhöhter Temperatur kann nicht grundsätzlich abhelfen. Eine relativ



lange Härtezeit der EP-RH ist deswegen mit einzuplanen. Weil bei den EP-RH die Volumen-Schrumpfung größtenteils schon vor dem Gelieren einsetzt, sind einerseits die Eigenspannungen niedriger als bei den UP-RH, andererseits ist aber die Entformung schwieriger.

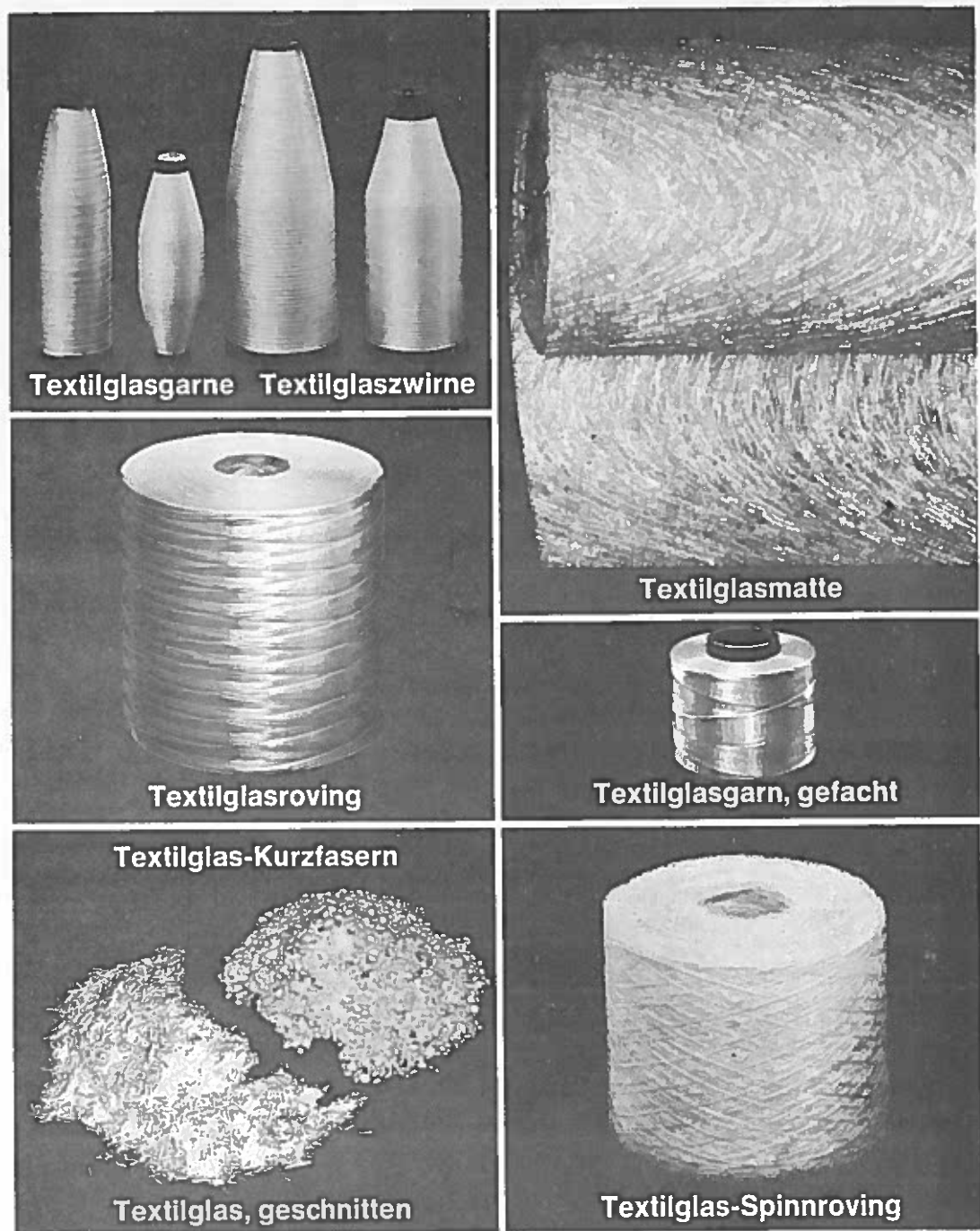
Im Bild 3.20 sind von EP-RH-Systemen einige Temperaturkurven aufgezeichnet, wie sie sich bei der Reaktion einstellen.

Obwohl verschiedene Härtungssysteme ein Verarbeiten bei Temperaturen unter  $18^{\circ}\text{C}$  zulassen, ist für einwandfreies Härten eine Lagerung der Fertigteile über mehrere Wochen bei Temperaturen von  $20^{\circ}\text{C}$  unbedingt erforderlich. Bild 3.21 zeigt den unterschiedlichen Verlauf der Härtung bei System A und B bei Raumtemperatur. Der Aushärtegrad steigt anfangs bei System B rascher an, erreicht jedoch bei System A einen etwas höheren Endwert.

Durch Anwendung höherer Temperaturen kann man die Nachhärtungszeit auf wenige Stunden verkürzen und einen höheren Aushärtegrad erzielen. Die Nachhärtung bei erhöhter Temperatur sollte möglichst unmittelbar im Anschluß an die Härtung durchgeführt werden, um besonders bei Verarbeitungstemperaturen unter  $18^{\circ}\text{C}$  sowie bei geringerem Härter- und Beschleunigerzusatz die Gefahr einer Unterhärtung zu vermeiden (Bild 3.22). Unterhärtung bedeutet: der Härtungsprozeß bricht vorzeitig ab und kann durch Wärmezufuhr zu einem späteren Zeitpunkt nicht mehr in Gang gebracht werden.

Unvollständige Härtung wirkt sich besonders auf die Alterungsbeständigkeit, die Witterungsbeständigkeit und die Chemiekalienfestigkeit aus.

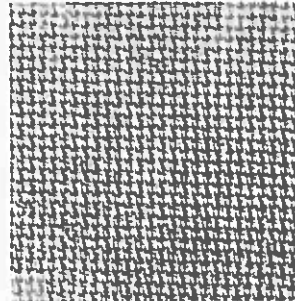
Von wesentlicher Bedeutung ist die schon erwähnte Volumenschrumpfung bei der Härtung [Patt.]. Diese Schrumpfung liegt bei EP-RH erheblich niedriger als bei UP-RH (s. auch Abschnitt 2.2.4) und erreicht auch nach Bild 3.23 viel schneller ihren - gegenüber UP-RH - kleineren Maximalwert. Damit ist die Mikrorißbildung in einer späteren Phase, in der das Harz weit spröder ist, erheblich reduziert.



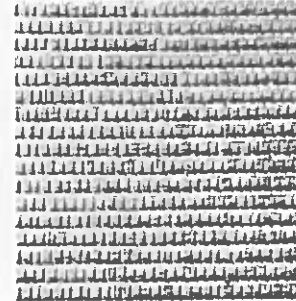
**Bild 3.1 Fasererzeugnisse in der Verbundverarbeitung  
-Beispiel Glas-  
(aus Firmenbroschüre der Gevetex Textilglas GmbH)**

Aus VETROTEX-Textilglas stellen eine Reihe leistungsfähiger Glaswebereien Gewebe, Bänder, Schläuche und Kordeln verschiedener Konstruktionen her.

Einen Ausschnitt aus den Fertigungsprogrammen unserer Kunden zeigen diese Abbildungen.



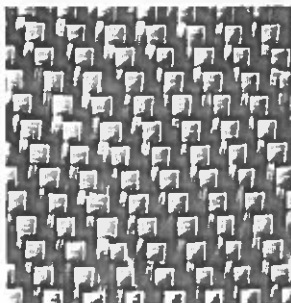
Flexibles Textilglas-Gewebe, Scheindreherbindung



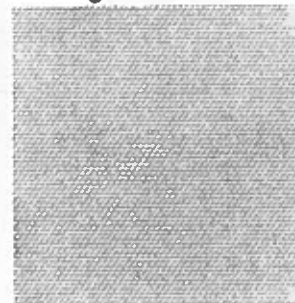
Unidirektionales Textilglasrovings-Gewebe



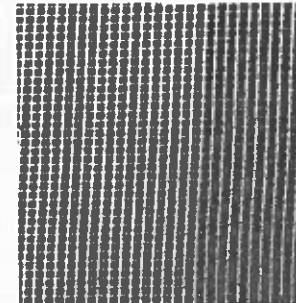
Textilglas-Bänder



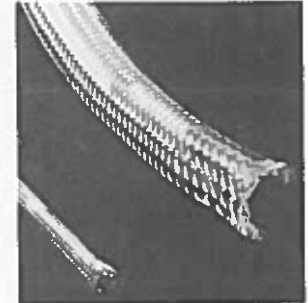
Textilglas-Gewebe, Doppelkörper, schußverstärkt.



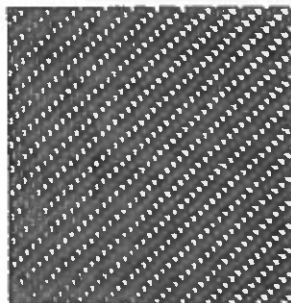
Textilglas-Zwirngewebe, Leinwandbindung



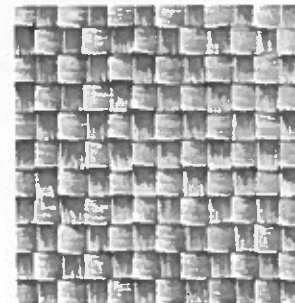
Vorimprägniertes Textilglas-Gittergewebe



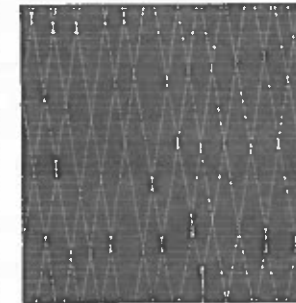
Textilglas-Flecht-schläuche



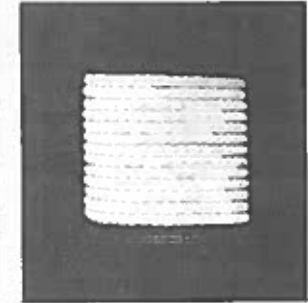
Textilglas-Gewebe, Doppelkörper



Textilglasrovings-Gewebe, Leinwandbindung

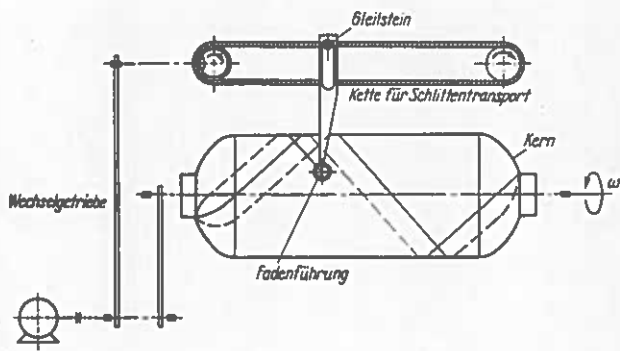


Textilglas-Gelege

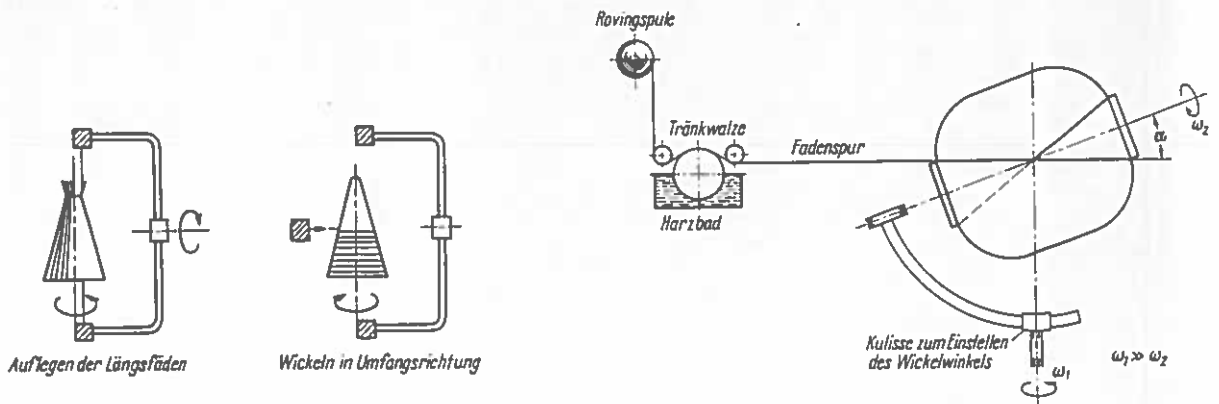


Textilglas-Schnüre

zu Bild 3.1



a) Schraubenförmiges oder axiales Wickeln



b) Wickeln kegelförmiger Körper

c) Polares Wickeln für geschlossene Behälter

Bild 3.2 Wickelverfahren  
(aus "Glasfaserverstärkte Kunststoffe",  
VDI-Lehrgangsbuch)

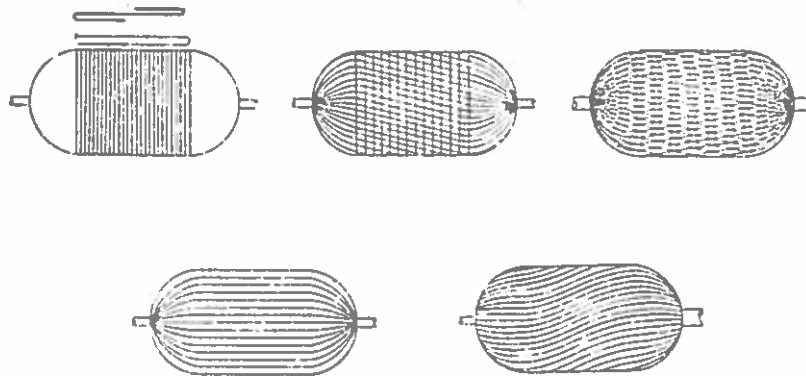
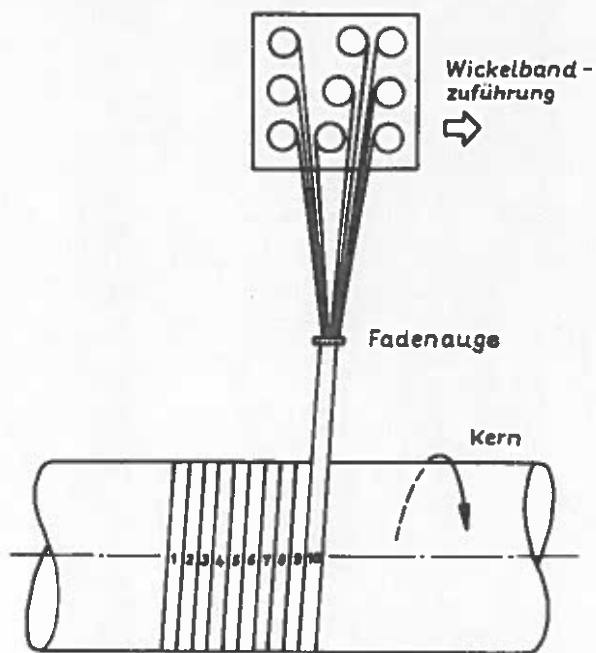


Bild 3.4 Wickelmöglichkeiten von Behältern [Neitzel]



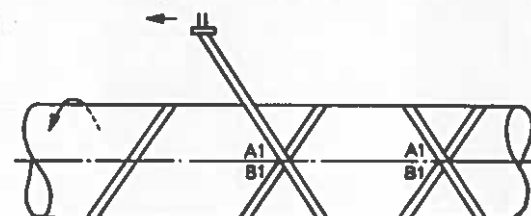
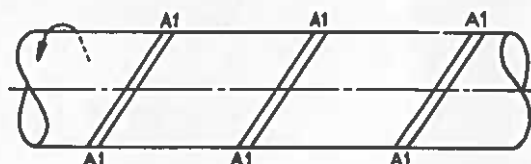
**Umfangswickeln**

Die Bänder werden nahezu 90° zur Kernachse abgelegt

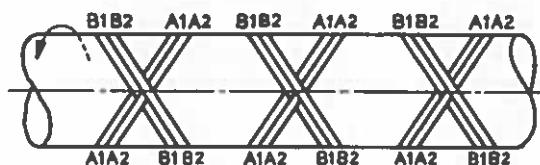
Richtung A →

Richtung B ←

**Ein Vorwärtsgang**

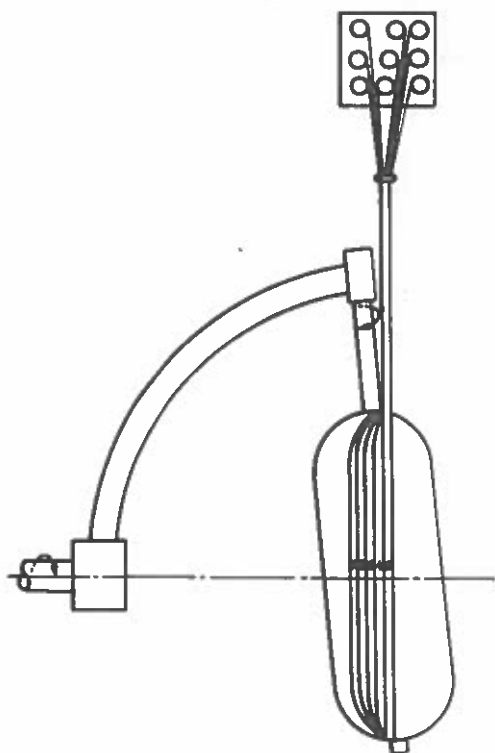


**Zwei komplette Gänge**



**Schraubenwickeln**

Darstellung einer typischen Wickelfolge



**Polarwickeln**

Bei diesem Beispiel ist der Wickelschlitten stationär, während der Kern um einen Boden und um seine Längsachse rotiert

**Bild 3.3**  
**Wickelbandablage**  
( nach [ Ainsworth ] )

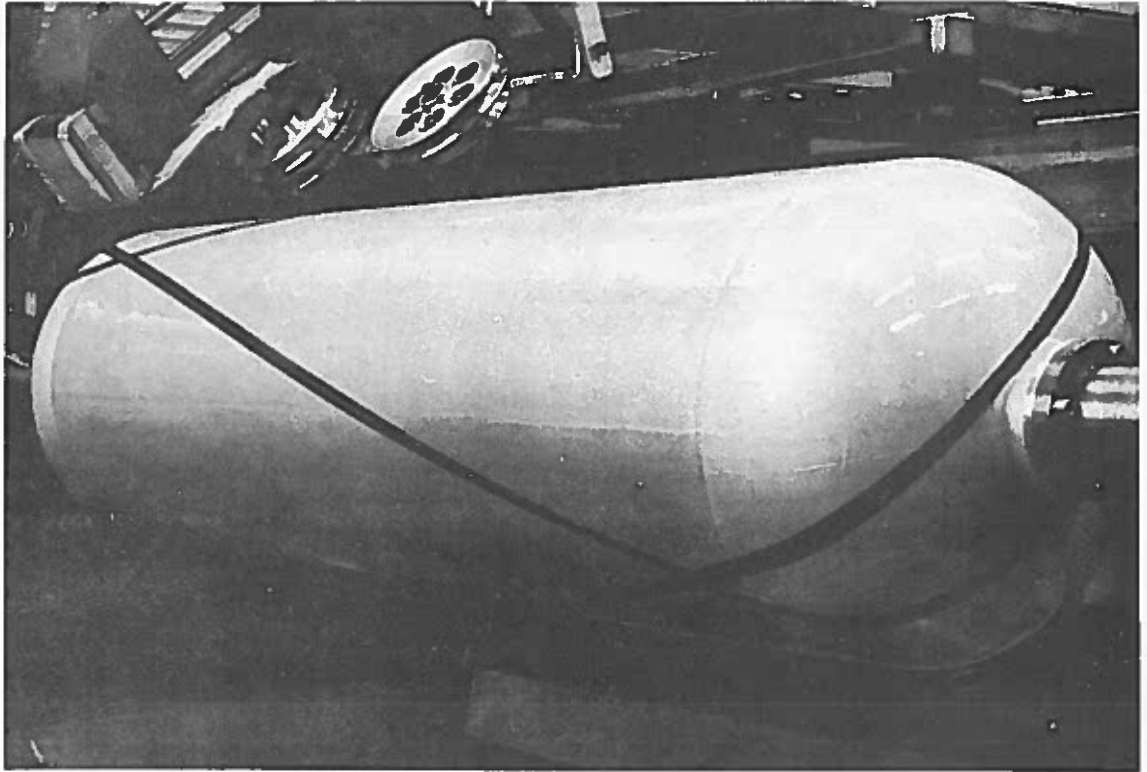


Bild 3.5 Kern aus Quarzsand-Polyvinylalkohol-Gemisch mit Adiprenebeschichtung beim Wickelbeginn (T=2)  
(Foto: M.A.N.-Neue Technologie, München)

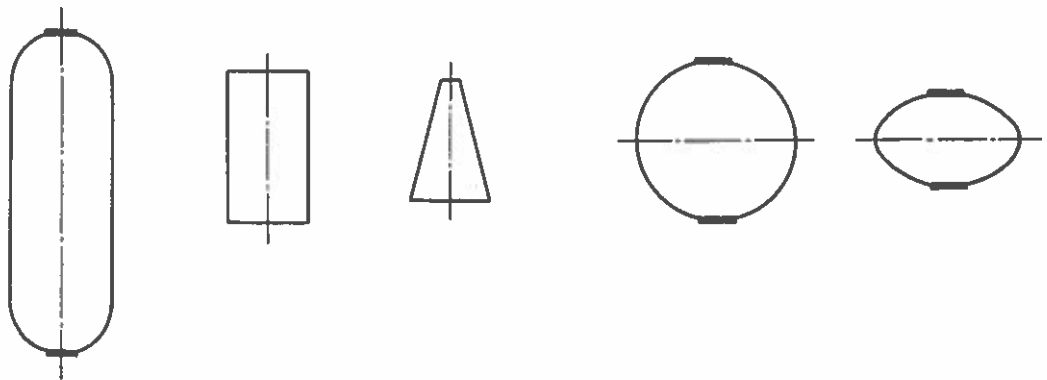


Bild 3.7 Wickelbare Körperformen

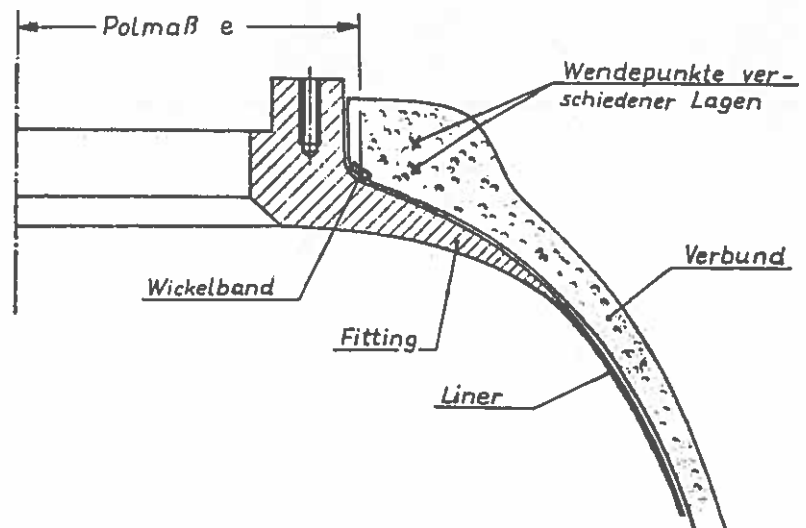
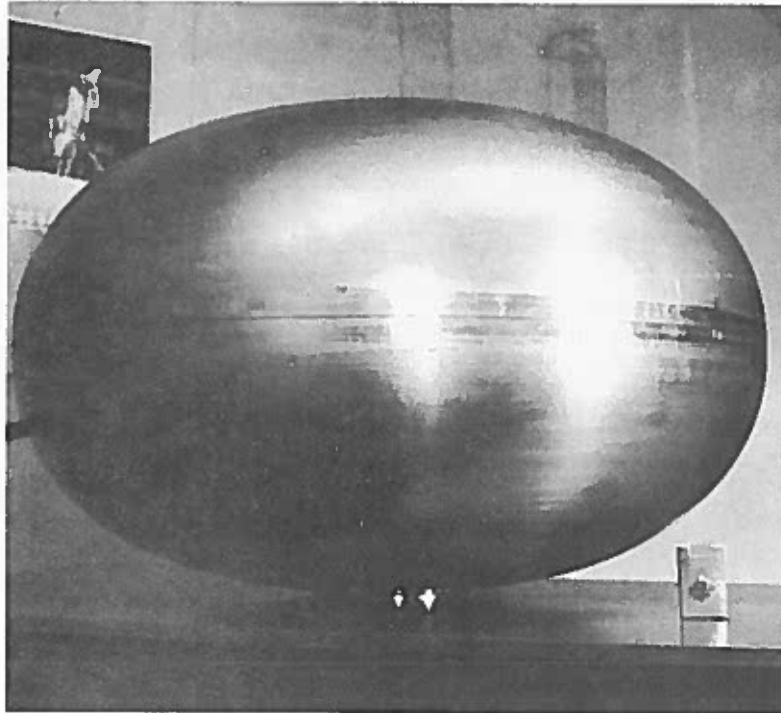


Bild 3.6 Liner mit Fitting

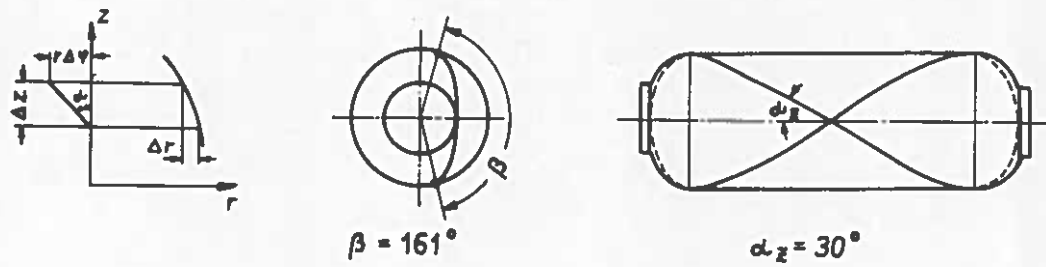


Bild 3.8 Umschlingungswinkel u. Wickelwinkel

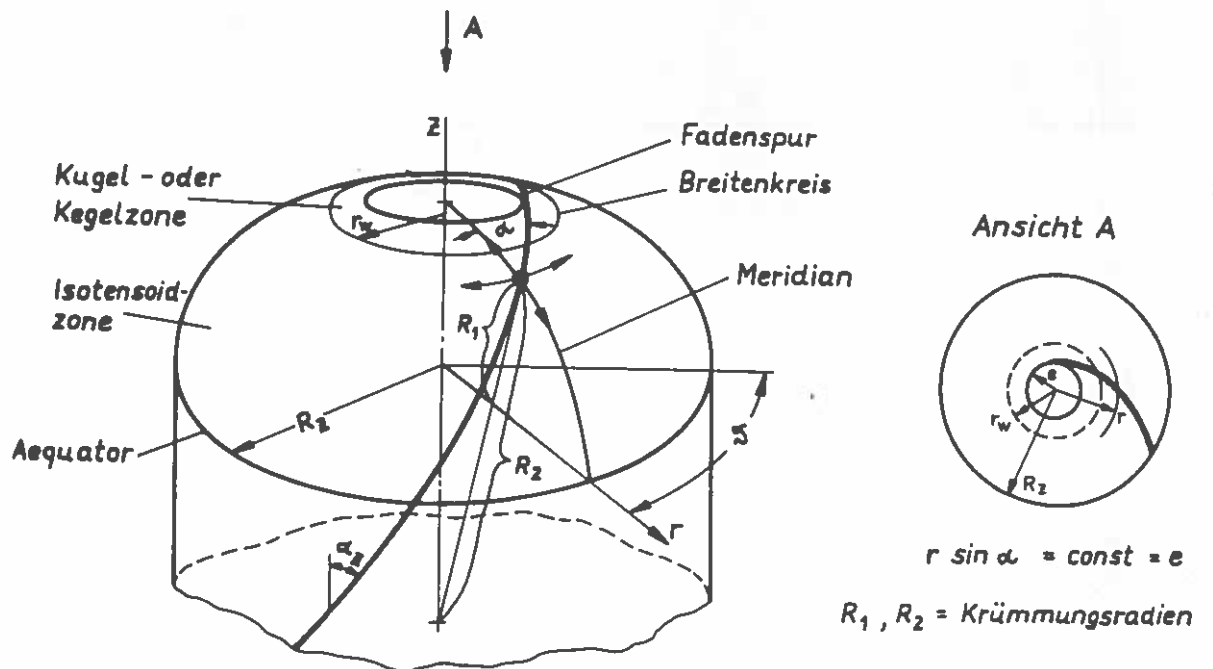


Bild 3.9 Geodätisch gewickelter Behälter



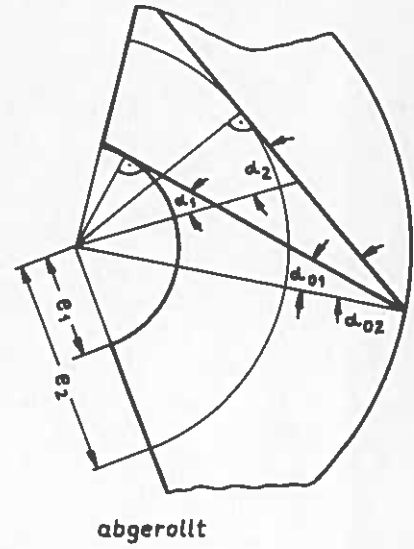
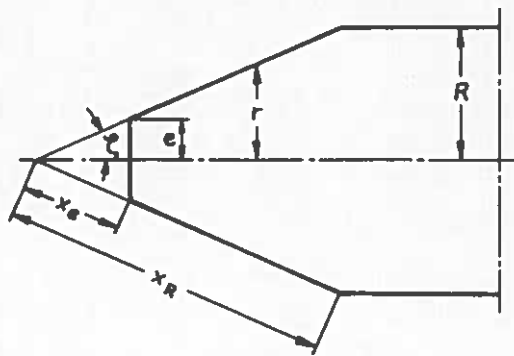


Bild 3.10 Fadenablage am kegeligen Behälter

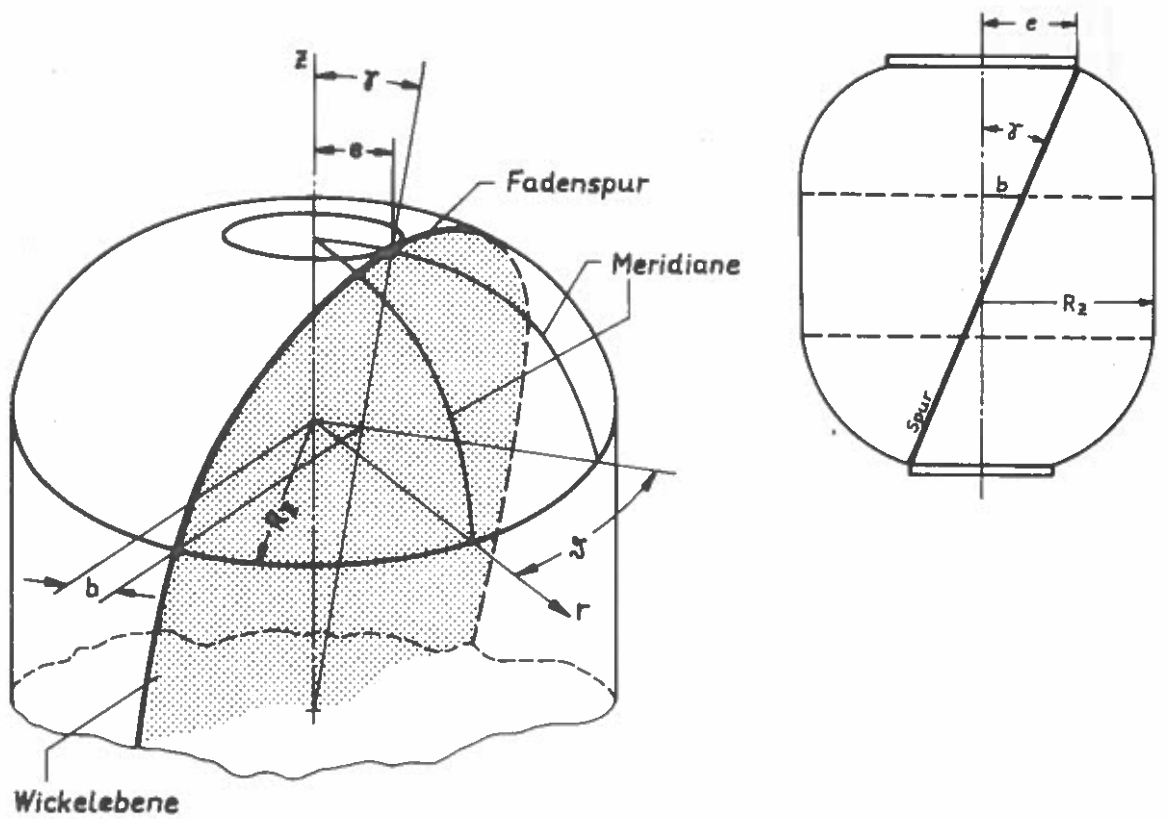


Bild 3.11 Planar gewickelter Behälter

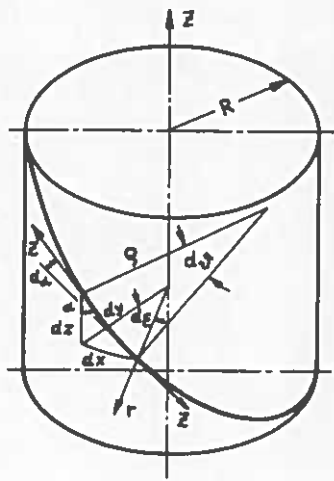


Bild 3.12  
Gleichgewicht am Faden-  
element beim Wickeln

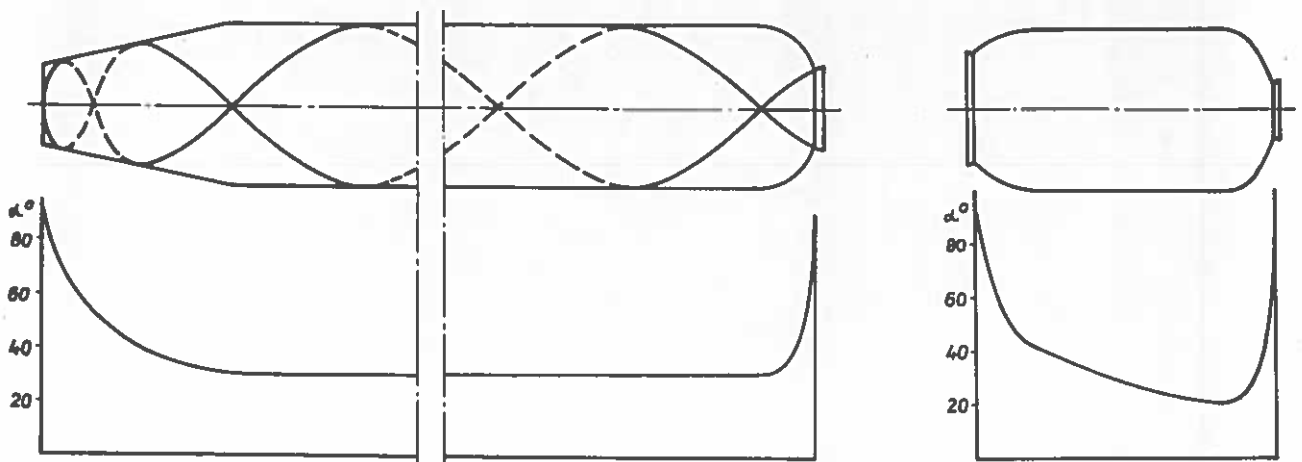
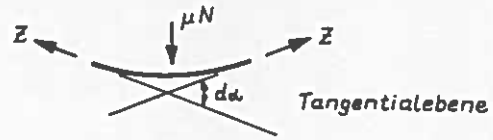


Bild 3.13 Wickelwinkel an verschiedenen Behältern :  
Kegel + Zylinder und Zylinder mit ungleichen  
Polöffnungen

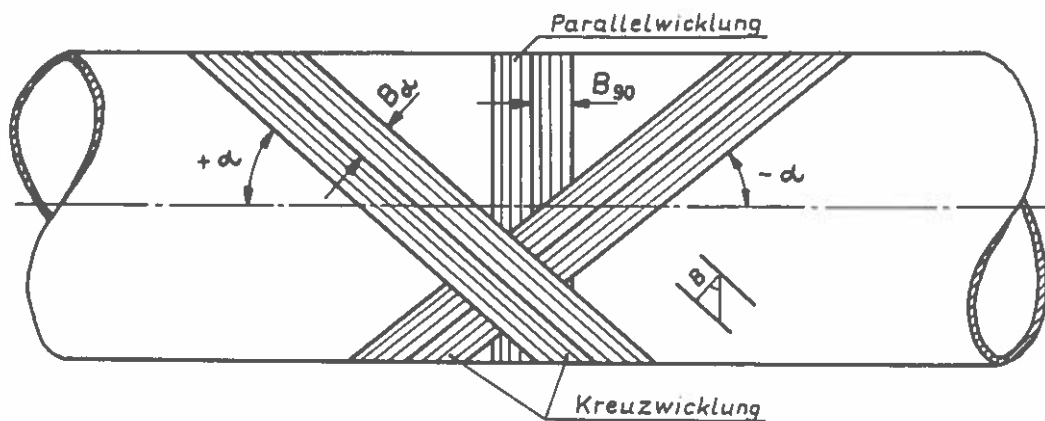
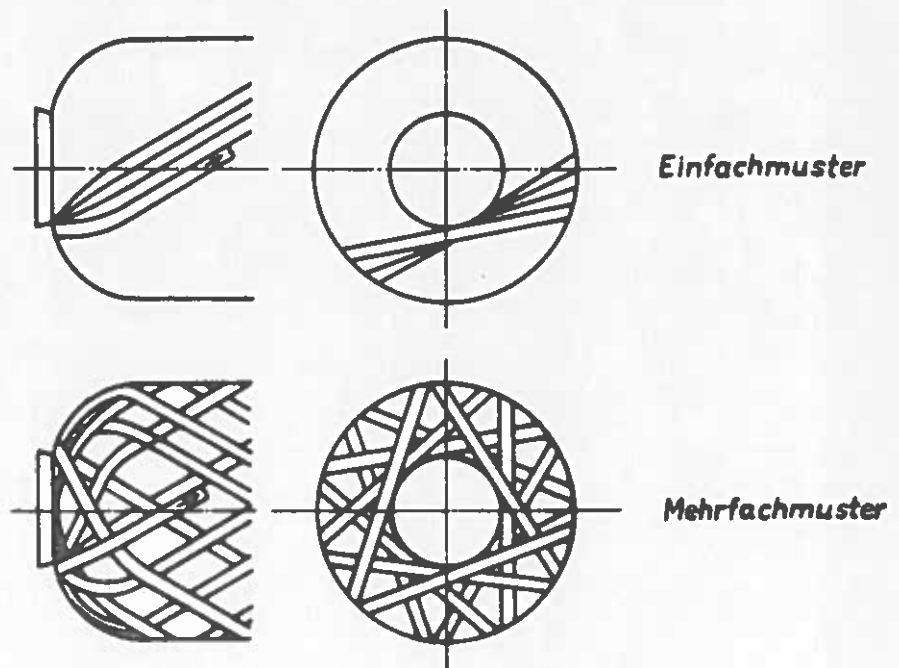
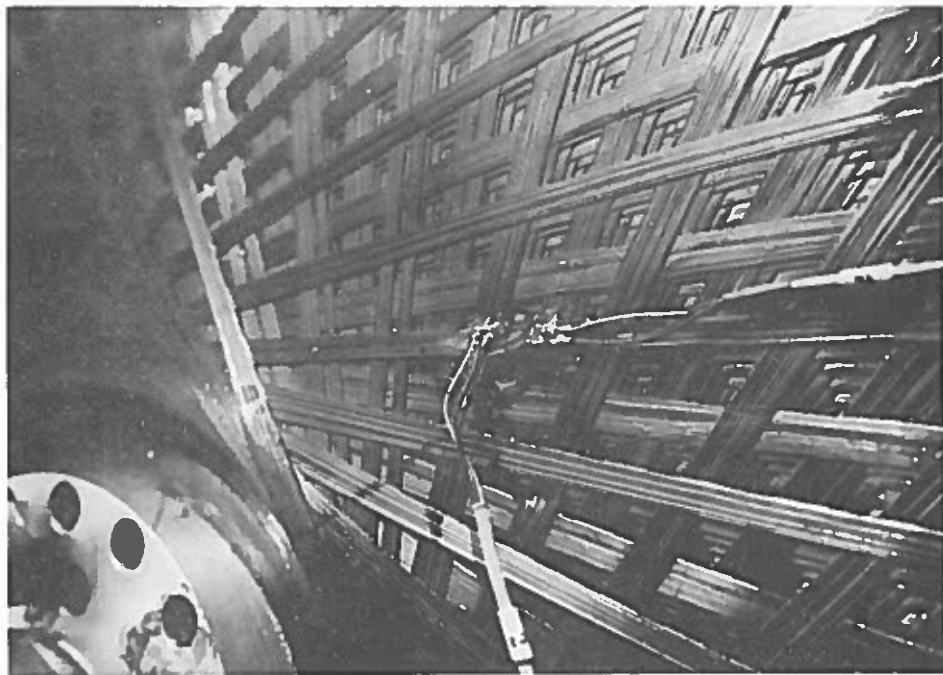


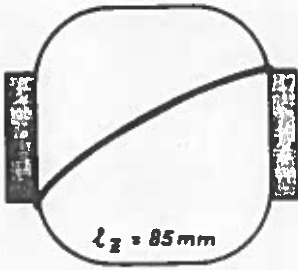
Bild 3.14 Wickelbandbreiten



**Bild 3.15 Wickelmuster**

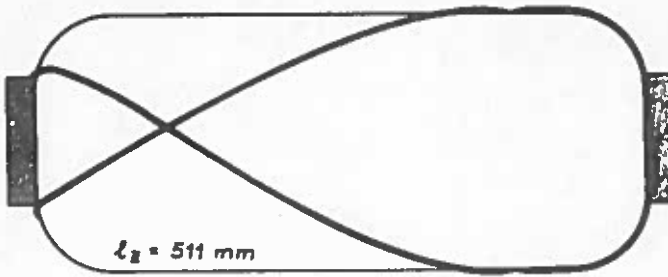
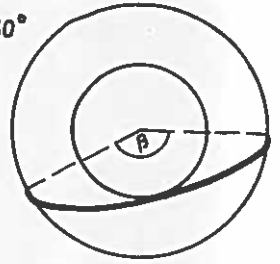


**Bild 3.15 b** Sauberes Wickelmuster trotz großer Teilungszahl  
 ( $T=52$ ), aber harzärmer Verbund  
 (Foto: M.A.N.-Neue Technologie, München)

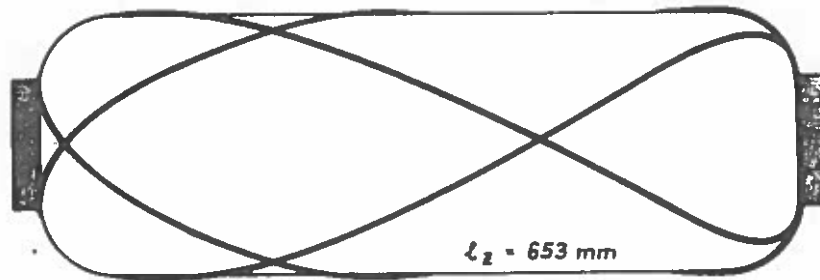
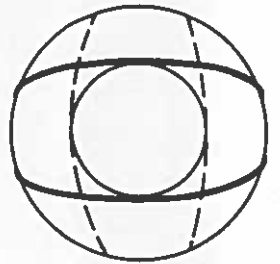


$$\begin{aligned} \bar{e} &= 0,5 \\ \alpha_z &= 30^\circ \\ \beta &= 162^\circ \\ R &= 157 \text{ mm} \end{aligned}$$

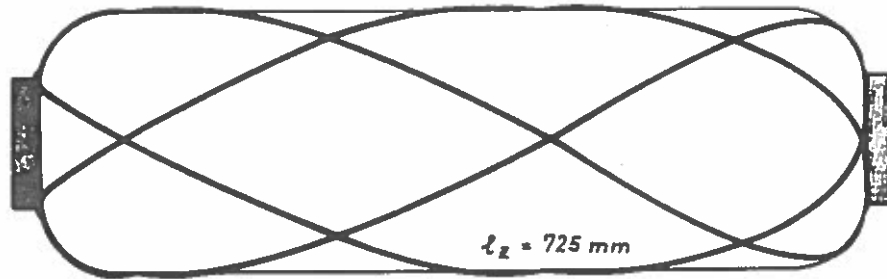
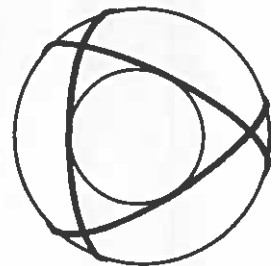
$$\begin{aligned} T &= 1 \\ DU &= 1 \hat{=} 360^\circ \\ \frac{DU}{T} &= 1,0 \end{aligned}$$



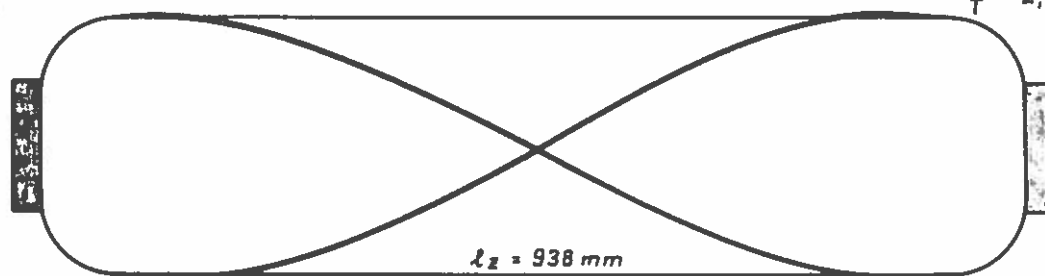
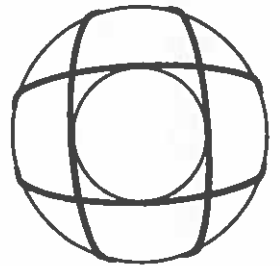
$$\begin{aligned} T &= 2 \\ DU &= 3 \\ \frac{DU}{T} &= 1,5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} T &= 3 \\ DU &= 5 \\ \frac{DU}{T} &= 1,667 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} T &= 4 \\ DU &= 7 \\ \frac{DU}{T} &= 1,75 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} T &= 1 \\ DU &= 2 \\ \frac{DU}{T} &= 2,0 \end{aligned}$$

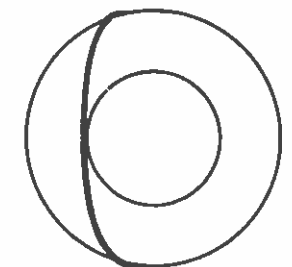


Bild 3.16 Wickelteilung und -muster (Beispiele)

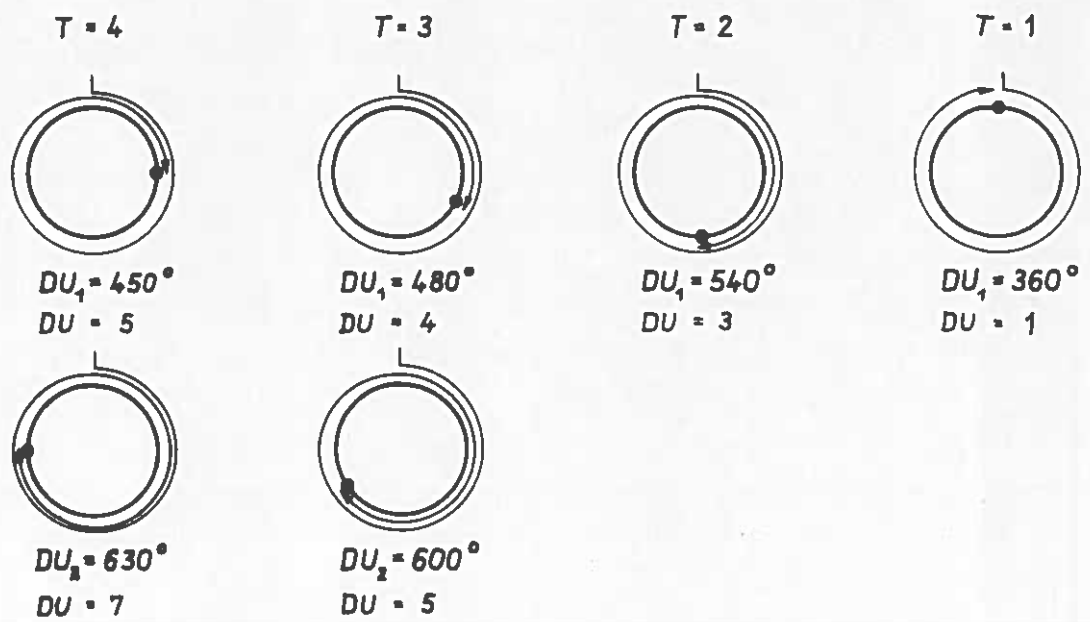


Bild 3.17 Dornumschlingungen und Teilungszahl

$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{2}{1}\right)$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$
$\left(\frac{1}{2}\right)$	<del><math>\frac{2}{2}</math></del>	$\left(\frac{3}{2}\right)$	<del><math>\frac{4}{2}</math></del>	$\frac{5}{2}$	<del><math>\frac{6}{2}</math></del>	$\frac{7}{2}$
$\left(\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}\right)$	<del><math>\frac{3}{3}</math></del>	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{5}{3}\right)$	<del><math>\frac{6}{3}</math></del>	$\frac{7}{3}$
$\left(\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{2}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4}\right)$	<del><math>\frac{4}{4}</math></del>	$\frac{5}{4}$	<del><math>\frac{6}{4}</math></del>	$\left(\frac{7}{4}\right)$

Tabelle 3.1 Wickelbare Verhältnisse  $DU/T$

$\alpha^\circ$	5	10	15	20	25	30	35	40
$\beta^\circ$	172,8	168,8	164,2	161,3	160,7	162,9	168,8	179,6

Tabelle 3.2 Umschlingungswinkel (geodät.) in Abhängigkeit vom Wickelwinkel. Polkappe = Kugelstück

I) geg.: Behälterabmessungen  $R_z$ ,  $l_z$ , Vol,  $e$

$$1) \frac{l_z}{R_z} \approx \frac{\text{Vol}}{\pi R_z^3} - 0,88$$

II) ges.: Wickeldaten  $\alpha_z$ ,  $\beta$ ,  $DU$ ,  $T$ ,  $k$

$$2) \bar{e} = \frac{e}{R_z}, \quad \alpha_z = \arcsin \bar{e}$$

3) gemäß Tab. 3.2  $\beta$  schätzen

$$4) \beta_z = \frac{180}{\pi} \frac{l_z}{R_z} \tan \alpha_z$$

$$5) \frac{(\beta + \beta_z)}{180^\circ} = \frac{DU}{T} \quad (\text{Werte s. Bild 3.14})$$

Festlegung:  $T$ ,  $DU$

6) Kontrolle

$$\beta_z = \frac{DU}{T} 180^\circ - \beta$$

$$\frac{l_z}{R_z} = \frac{\pi}{180} \frac{\beta_z}{\tan \alpha_z} \quad \uparrow \text{und} \quad \text{Vergleich mit 1)}$$

$$7) k = 2\pi R_z \frac{\cos \alpha_z}{B \alpha_z} \frac{1}{T}$$

8) Mit Computer:

Wirkl. Vol. (aus Integration der Kontur-Dgl.  
beim Aufsuchen der Bodenkontur)

Tabelle 3.3 Wickeltechnische Auslegung geodätischer Faser-verbundbehälter

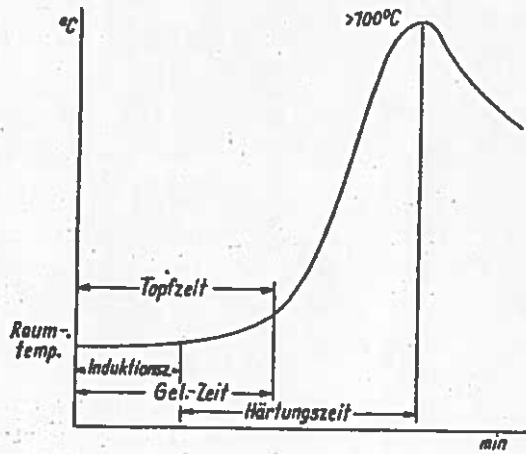


Bild 3.18 Härtingsverlauf bei Polyesterharzen [Haferkamp]

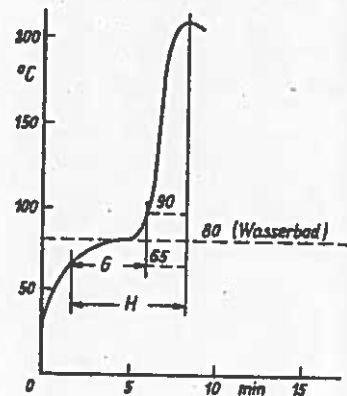


Bild 3.19

Reaktionskurve eines Normalreaktionsharzes bei Warmhärtung nach DIN 16945

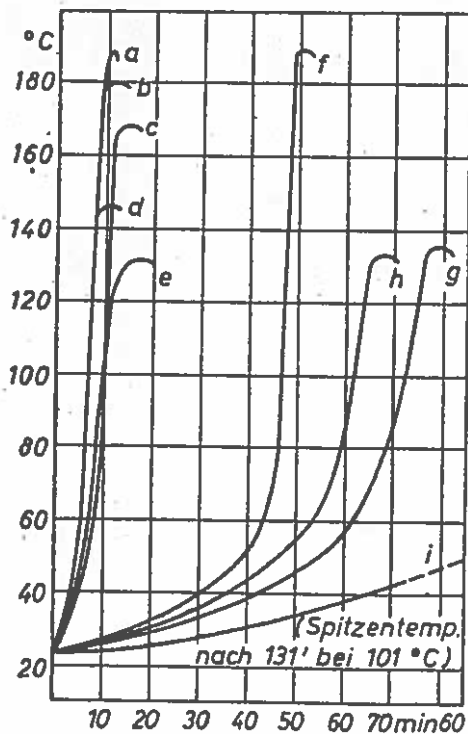


Bild 3.20

Reaktionstemperatur von verschiedenen Epoxidreaktionsharz-Reaktionsmittel-Systemen [VDI-Bildungswerk]

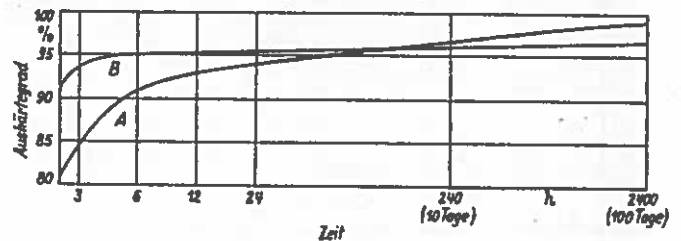


Bild 3.21

Aushärtegrad bei Raumtemperatur-Nachhärtung für UP-RH in Abhängigkeit vom Härtungssystem  
 A Methyläthylketonperoxid/Kobalt  
 B Benzoylperoxid/Amin  
 [VDI-Bildungswerk]

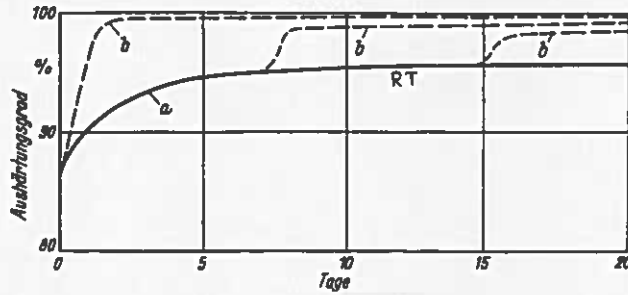


Bild 3.22 Einfluß der Zeitspanne zwischen Härten und Nachhärten bei erhöhter Temperatur auf den erreichbaren Aushärtungsgrad ohne (a) und mit Nachhärtung (b) (schematisch)  
VDI 2010, Blatt 2

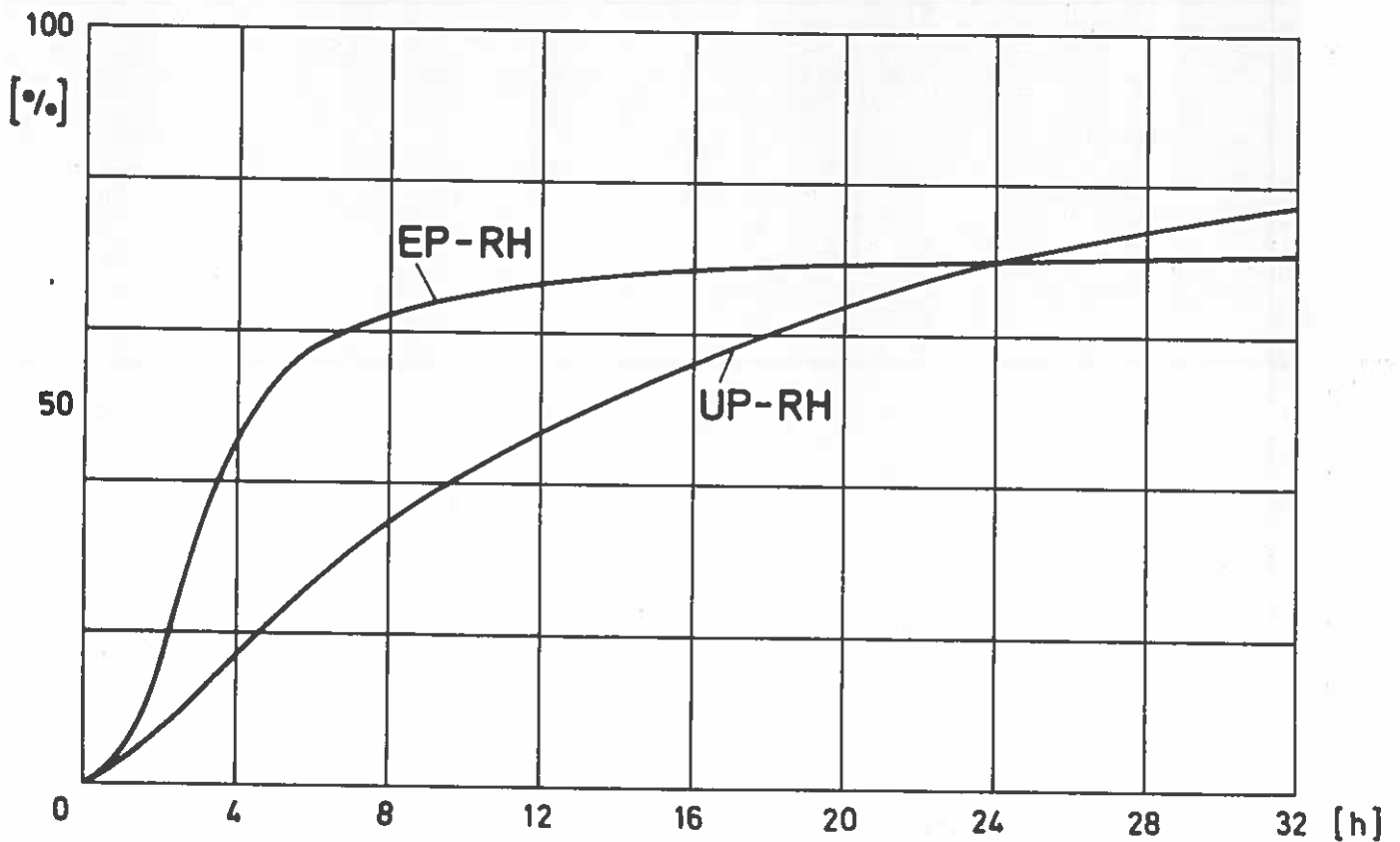


Bild 3.23 Volumenschrumpfung von Reaktionsharzen in Prozent ihres Endwertes (Warmhärtung)  
[Patterson]



#### 4. Geometrisch lineare Theorien von Faserverbundstrukturen

In diesem Kapitel sollen die Differentialgleichungen von Strukturformen aufgeführt werden, die aus den verschiedenen Faserwerkstoffen hergestellt werden können.

Eine Beschränkung auf die geometrisch lineare Theorie bzw. Theorie 1. Ordnung ist notwendig, weil hier eine kurze, zusammenfassende Darstellung angestrebt werden soll, das Aufnehmen der Theorie 2. Ordnung den Rahmen dieser Arbeit aber bei weitem sprengen würde. Als mathematische Grundlagen der tensoriellen Formulierungen dienen die Bücher von Green-Zerna und E. Klingbeil.

##### 4.1 Allgemeiner Körperträger

###### 4.1.1 Verzerrungstensor

Um beschreiben zu können, wie sich die Abstände zweier Körperpunkte während der Verformung innerhalb der Zeit  $T_2 - T_1$  ändern, muß man den Verzerrungstensor kennen, da dieser die Abweichung des verformten Systems vom unverformten angibt.

Zur Ermittlung des Verzerrungstensors bedienen wir uns des Ortsvektors  $\mathcal{R}$  zu einem Punkt des verformten dreidimensionalen Kontinuums, der sich aus dem Ortsvektor des unverformten Körpers und dem Verschiebungsvektor  $\check{u}$  zusammensetzt (Bild 4.1)

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) &= \mathcal{r}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) + \check{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t) \\ &= x^k n_k + u^k \vartheta_k.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Die Basissysteme des unverformten und des verformten Systems sind die  $\vartheta_k$  und  $\check{\vartheta}_k$ .  $n_i$  ist das Koordinatensystem (KOS) des Ausgangssystems.

Die kovarianten (Index unten) Basisvektoren  $\vartheta_k$  des unverformten Systems im krummlinigen, körperfesten KOS  $\theta^i$  werden definiert als Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien (Bild 4.2). Beide Basisvektoren liegen im unverformten System und im verformten System infolge  $x^i(\theta^i)$  fest, weil -zum einen- bei Zeitunabhängigkeit der  $x^i$  das totale Differential nur  $d\mathcal{R} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x^i} dx^i$  liefert und zum anderen die Ortsunabhängigkeit von  $n_i$  zu  $d\mathcal{R} = n_i dx^i$  führt. Sie heißen demzufolge

$$\vartheta_i = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta^i} = \mathcal{R}_{,i} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} = n_j \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} \quad \text{und} \quad \check{\vartheta}_i = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta^i} = \vartheta_i + \check{u}_{,i}.\tag{4.2a}$$

wobei  $\check{u}_{,i}$  die partielle Ableitung des Verschiebungsvektors darstellt, die es nun aufzufinden gibt. Zunächst bedeutet das aber die Herleitung verschiedener Formeln.

Nach einer Definition der Tensoranalysis steht der kontravariante Basisvektor  $\eta^r$  senkrecht auf  $\eta_i$  und  $\eta_k$ . Das bedeutet, daß

$$\eta^r = \frac{1}{\epsilon_{ikr}} (\eta_i \times \eta_k) \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{matrix} \quad (4.2b)$$

ist, worin  $\epsilon_{ikr}$  einen Multiplikationsfaktor darstellt, der sich aus

$$\epsilon_{ikr} (\eta^r \cdot \eta_r) = \epsilon_{ikr} = (\eta_i \times \eta_k) \cdot \eta_r = [\eta_i, \eta_k, \eta_r] = \text{Spatprodukt } V$$

errechnet.

Das Spatprodukt gibt dabei den Volumenwert des von den Basisvektoren aufgespannten Spates an. Es kann nach zwei verschiedenen Methoden ermittelt werden: über die Metriktensorkomponenten

$$\eta_i \cdot \eta_k = g_{ik} \quad (4.3)$$

$$V = \sqrt{|g_{ik}|} = \sqrt{g} = \sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}} \quad (\text{Symm. Matrix}) \quad (4.4)$$

oder einfacher über die Transformationsmatrix zwischen den Basissystemen (vgl. Anhang I,  $\tilde{\eta}_k \equiv \eta_k$ )

$$\eta_i = \tilde{a}_i^k \tilde{\eta}_k = \tilde{a}_i^k \eta_k, \quad \tilde{a}_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial \theta^i} \quad (4.5)$$

aus

$$V = \begin{vmatrix} \tilde{a}_1^1 & \tilde{a}_1^2 & \tilde{a}_1^3 \\ \tilde{a}_2^1 & \tilde{a}_2^2 & \tilde{a}_2^3 \\ \tilde{a}_3^1 & \tilde{a}_3^2 & \tilde{a}_3^3 \end{vmatrix} = [\eta_1, \eta_2, \eta_3] \quad (4.6)$$

Daraus kann für  $\epsilon_{ikr}$ , den sogenannten "ε-Tensor", geschlossen werden

$$\epsilon_{ikr} = \begin{cases} \sqrt{g} & \text{für gerade Permutationen } 123, 312, 231 \\ -\sqrt{g} & \text{für ungerade Permutationen } 213, 321, 132 \\ 0 & \text{wenn zwei Indizes gleich.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Für das Kreuzprodukt  $\eta_i \times \eta_k$  sieht die Berechnung folgendermaßen aus

$$\eta_i \times \eta_k = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \tilde{a}_i^1 & \tilde{a}_i^2 & \tilde{a}_i^3 \\ \tilde{a}_k^1 & \tilde{a}_k^2 & \tilde{a}_k^3 \end{vmatrix}. \quad (4.8)$$

Der Einheitsvektor in Richtung von  $\eta^i$  ist  $\hat{\eta}^i = \eta^i / \sqrt{g^{(ii)}}$ , wobei die kontravarianten Metriktensorkomponenten über eine Matrizenrechnung aus den Unterdeterminanten  $U$  bzw. den Kofaktoren  $D^{ik}$  ermittelt werden

$$\eta^i \cdot \eta^k = g^{ik} = \frac{(-1)^{i+k} U(g_{ik})}{g} = \frac{D^{ik}}{g} \quad (4.9a)$$

oder über eine gemischtvariante, tensorielle Form, die zu zwei Koordinatensystemen gehört

$$y^i \cdot y_k = \delta_k^i = g^{ij} y_j \cdot y_k = g^{ij} \delta_j^k = g^{ik} = g_k^i, \quad (4.10)$$

wobei  $\delta_k^i$  das Kronecker-Symbol darstellt

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{für } i=k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}. \quad (4.11)$$

Der später ebenfalls benötigte Zusammenhang der Kofaktoren mit der kovarianten Metrik wird über den Entwicklungssatz der Determinanten gefunden

$$g \delta_k^i = g_{ik} D^{i3}. \quad (4.9b)$$

Nach diesen Ausführungen kann die partielle Ableitung des Verschiebungsvektors  $\tilde{u}$  gefunden werden

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{,i} &= \frac{\partial (u^k y_k)}{\partial \theta^i} = \frac{\partial u^k}{\partial \theta^i} y_k + u^k \frac{\partial y_k}{\partial \theta^i} \\ &= u^k_{,i} y_k + u^k y_{k,i}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

wobei als partielle Ableitung der Basisvektoren vorliegt

$$\begin{aligned} y_{k,i} &= \frac{\partial (y_k)}{\partial \theta^i} = \frac{\partial}{\partial \theta^i} \left( n_j \frac{\partial x^j}{\partial \theta^k} \right) = n_j \frac{\partial^2 x^j}{\partial \theta^i \partial \theta^k} \\ &= \frac{\partial \theta^m}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \theta^i \partial \theta^k} y_m = \Gamma_{ik}^m y_m \hat{=} \Gamma_{ki}^m y_m. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Durch geeignete Umformung ist es also möglich, die Ableitungen der Basis wieder auf die Ausgangsbasis zu beziehen. Der Multiplikationsfaktor  $\Gamma_{ki}^m$  in dieser Gleichung ist das "Christoffelsymbol 2. Art". Seiner Definition entsprechend ist es symmetrisch in den unteren Indizes. Es gelten

$$\begin{aligned} y_{k,i} \cdot y^j &= \Gamma_{ki}^m y_m \cdot y^j = \Gamma_{ki}^m \delta_m^j = \Gamma_{k,i}^j \\ \Gamma_{k,i}^j &= \frac{\partial \theta^j}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial \theta^i \partial \theta^l} = \frac{\partial \theta^j}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^k}{\partial \theta^i \partial \theta^k} = \Gamma_{ik}^j. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Der Zusammenhang mit dem Christoffelsymbol 1. Art ist

$$\Gamma_{ki}^j = g^{jm} \Gamma_{kim}$$

Statt der Glg. (4.14) kann auch durch Überschiebung mit den sogenannten Metriktensoren  $g_{ij}$ ,  $g^{ij}$  und einigen Umformungen direkt ein Zusammen-

hang mit den Metriktensoableitungen gefunden werden

$$\Gamma_{ki}^j = \frac{1}{2} g^{jk} (g_{in,k} + g_{nk,i} - g_{ki,n}) , \quad (4.15a)$$

was bei [Klingbeil, S. 84,] nachzulesen ist.

Zusammenfassend können die Ableitungen der Basisvektoren ausgedrückt werden durch

$$y_{k,i} = \Gamma_{k,i}^j y_j , \quad y^k_{,i} = -\Gamma_{ij}^k y^j \quad (4.15b)$$

und das Christoffelsymbol (kein Tensor 3. Stufe)

$$\Gamma_{ki}^j = y_{k,i} \cdot y^j = -y^j_{,i} \cdot y_k , \quad (4.15c)$$

wie durch das zwangsläufige Verschwinden der Ableitungen des "Kronecker-Deltas" nachgewiesen werden kann

$$(y^j \cdot y_k)_{,i} = (\delta_k^j)_{,i} = 0 = y^j_{,i} \cdot y_k + y_{k,i} \cdot y^j .$$

Nach dem Einsetzen von (4.13) in (4.12) und Austausch der Summationsindizes wird

$$\check{y}_{,i} = u^k_{,i} y_k + u^k \Gamma_{ki}^m y_m = (u^k_{,i} + u^n \Gamma_{ni}^k) y_k \quad (4.16)$$

Die Klammer in (4.16) lautet vereinfacht geschrieben mit den kovarianten Ableitungen  $u^k|_i$  und den Christoffelsymbolen  $\Gamma_{ni}^k$

$$u^k|_i = u^k_{,i} + u^n \Gamma_{ni}^k . \quad (4.17)$$

Es lassen sich nun die Metriktensooren

$$g_{ij} = y_i \cdot y_j = x^k_{,i} n_k \cdot x^l_{,j} n_l = x^k_{,i} x^l_{,j} \delta_{kl} = x^l_{,i} x^l_{,j} \quad (4.18)$$

und

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \mathcal{G}_i \cdot \mathcal{G}_j = (y_i + \check{y}_{,i}) \cdot (y_j + \check{y}_{,j}) = g_{ij} + \check{y}_{,i} \cdot y_j + y_i \cdot \check{y}_{,j} + \check{y}_{,i} \cdot \check{y}_{,j} \\ G_{ij} &= g_{ij} + u^k|_i y_k \cdot y_j + y_i \cdot u^l|_j y_l + u^k|_i y_k \cdot u^l|_j y_l \\ &= g_{ij} + u^k|_i g_{kj} + u^l|_j g_{il} + u^k|_i u^l|_j g_{kl} \\ &= g_{ij} + u_j|i + u_i|j + u^k|_i u_k|_j . \end{aligned} \quad (4.19)$$

herleiten. Entsprechend werden die kovarianten Ableitungen  $u_{j,i}$  ermittelt

$$\begin{aligned} \check{y}_{,i} &= u_{r,i} y^r + u_r y^r_{,i} = u_{r,i} y^r - u_r \Gamma_{ij}^r y^j \\ &= (u_{j,i} - u_r \Gamma_{ij}^r) y^j = (u_j|i) y^j . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Den Verformungsunterschied zwischen zwei Punkten des Körpers drückt man nach Bild 4.1 durch die Linienelemente aus. Es ergibt sich mit

$$ds^2 = d\delta \cdot d\delta = d\Theta^i y_i \cdot d\Theta^j y_j = g_{ij} d\Theta^i d\Theta^j \equiv d\delta \cdot d\delta$$

$$dS^2 = d\mathcal{R} \cdot d\mathcal{R} = d\Theta^i Q_i \cdot d\Theta^j Q_j = G_{ij} d\Theta^i d\Theta^j \equiv d\mathcal{R} \cdot d\mathcal{R}$$

die Längendifferenz zu

$$dS^2 - ds^2 = (G_{ij} - g_{ij}) d\Theta^i d\Theta^j \equiv d\mathcal{R} \cdot d\mathcal{R} - d\delta \cdot d\delta \quad (4.21)$$

Damit kann der Verzerrungstensor (Formänderungstensor) definiert werden. Hier wird nach Cauchy-Green die Linienelementdifferenz auf den unverformten Körper bezogen. Sie gehorcht als Abweichung des Metriktensors des verformten Systems von dem des unverformten der Beziehung

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (G_{ij} - g_{ij}) \quad (4.22a)$$

Bei Vernachlässigung der quadratischen Glieder  $u^k|_i \cdot u_k|_j$ , also bei geometrisch linearer Theorie, läßt sich die einfache Gleichung

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (u_j|_i + u_i|_j) \quad (4.22b)$$

für den Verzerrungstensor erhalten.

Selbstverständlich kann man sowohl die Metriktensoren  $g_{ij}$  und  $G_{ij}$  als auch die Verzerrungstensor-Definition gemäß Almansi auf die Basis  $Q_i$  des verformten Körpers beziehen.

#### 4.1.2 Spannungstensor

Bei einem infinitesimalen, krummlinigen Tetraeder (Bild 4.3) lautet das Kräftegleichgewicht mit den Spannungsvektoren auf den Seitenflächen

$$4 dF = (4^4 dF_4 =) 4^i dF_i \quad (4.23)$$

Das Momentengleichgewicht ist im vorliegenden Fall schon erfüllt, weil die Kräfte bei beliebig kleinen Seitenflächen durch einen Punkt gehen. Die Massenkraft wird vernachlässigt, da sie von höherer Ordnung kleiner ist als die Spannungen.

Da das Tetraederelement (hier unverformter Körper) infinitesimal klein ist, können weiterhin die Seitenflächen  $\Theta^i = \text{const.}$  als eben angesehen werden und somit die Kanten als geradlinig.

Wird nun jede Seite  $dF_i$  durch den auf ihr senkrecht stehenden Vektor  $f_i$  repräsentiert, so gilt bekanntlich  $\sum_{i=1}^4 f_i = 0$ , beziehungsweise (Schreibweise Leipholz)

$$-f_4 = (-n^4 dF_4 =) -n dF = n^i dF_i = \frac{y^i}{\sqrt{y^{(ii)}}} dF_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Zerlegt man den Einheitsvektor  $\check{n}$  in Richtung der  $\vartheta^i$ , so kann angesetzt werden

$$n = n_i \vartheta^i$$

Damit wird

$$n_i \vartheta^i dF = \frac{\vartheta^i}{\sqrt{g^{(ii)}}} dF_i \quad \text{oder} \quad dF_i = n_i \sqrt{g^{(ii)}} dF,$$

und nach Einsetzen des Kräftegleichgewichts (4.23) läßt sich der Ausdruck

$$4 dF = 4^i n_i \sqrt{g^{(ii)}} dF$$

finden, worin die Größe  $4^i \sqrt{g^{(ii)}}$  einen kontravarianten Vektor darstellen muß. Es wird für ihn geschrieben

$$4^i \sqrt{g^{(ii)}} = \tau^{ij} \vartheta_j. \quad (4.24)$$

Man nennt  $\tau^{ij}$  den kontravarianten Spannungstensor.

Der Spannungsvektor in einer beliebigen Schnittfläche (zuvor Index 4) ist somit

$$4 = \tau^{ij} n_i \vartheta_j. \quad (4.25)$$

Die  $\tau^{ij}$  darin sind die Komponenten des Spannungstensors. Um eine Dimensionierung vornehmen zu können, benötigt man die physikalischen Komponenten  $\check{\tau}^{ij}$ . Diese stellen die Spannungswerte bezüglich der Einheitsbasen  $\vartheta_i / \sqrt{g_{(ii)}}$  dar. Ihre Ermittlung erfolgt in Abschnitt (4.1.3).

#### 4.1.3 Physikalische Komponenten

Zur Gewinnung der technischen Gleichungen ist die Ermittlung der physikalischen Komponenten von Tensoren erster und zweiter Stufe notwendig.

Für die Verschiebungen z.B. errechnen sich die physikalischen Komponenten über verschiedene Darstellungen einer Invarianten  $\check{\vartheta}^{(1)}$  mit und ohne Einheitsbasen

$$\check{\vartheta}^{(1)} = \check{n} = u_i \vartheta^i = u_i \frac{\vartheta^i}{\sqrt{g^{(ii)}}} = u^i \vartheta_i = u^i \sqrt{g_{(ii)}} \frac{\vartheta_i}{\sqrt{g_{(ii)}}}$$

Zu

$$\check{u}^i = u^i \sqrt{g_{(ii)}} \quad \text{und} \quad \check{u}_i = u_i \sqrt{g^{(ii)}}. \quad (4.26a)$$

Bei Spannungs- und Verzerrungskomponenten ist die Umrechnung etwas komplizierter. Als Invariante bei den Verzerrungskomponenten dient die Differenz der Linienelementquadrate. Das ist entsprechend (4.21) der Skalar

$$\check{\vartheta}^{(0)} = dS^2 - ds^2 = 2 \check{\gamma}_{ij} d\Theta^i d\Theta^j.$$

Wie (4.26 a) zu entnehmen ist, können auch die differentiellen Längen  $d\theta^i$  sehr leicht durch ihre physikalischen Komponenten ausgedrückt werden, indem wieder eine Erweiterung herangezogen wird

$$ds^2 - ds^2 = 2 \gamma_{ij} \frac{1}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}} \left( \frac{\sqrt{g_{(ii)}} d\theta^i}{d\theta^i} \right) \left( \frac{\sqrt{g_{(jj)}} d\theta^j}{d\theta^j} \right)$$

Die physikalischen Verzerrungskomponenten (dimensionslos) lassen sich dann aus

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}} \quad (4.26b)$$

errechnen.

Nun fehlen noch die physikalischen Spannungen. Gemäß Gleichung (4.24) gilt  $\tau \sqrt{g_{(ii)}} = \tau^{ij} \sigma_{ij}$ . Hier ist also der Spannungsvektor  $\tau$  die Invariante, und es wird

$$\tau = \tau = \frac{\tau^{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}}} \sigma_{ij} = \frac{\tau^{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}}} \sqrt{g_{(ii)}} \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}}} = \tau_{ij}^i \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}}} = \frac{\tau_{ij}^i}{\sqrt{g_{(ii)}}} \sqrt{g_{(jj)}} \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{g_{(jj)}}}.$$

Somit sind für die kontravarianten und die gemischtvarianten Spannungen die folgenden Umrechnungsformeln anschreibbar

$$\tilde{\tau}^{ij} = \sqrt{\frac{g_{(jj)}}{g_{(ii)}}} \tau^{ij} \quad \text{und} \quad \tilde{\tau}_j^i = \sqrt{\frac{g_{(jj)}}{g_{(ii)}}} \tau_j^i \quad (4.26c)$$

Für orthogonale, krummlinige Koordinaten können die Beziehungen (4.26 b) und (4.26 c) infolge

$$g_{ij} = g^{ij} = 0, \text{ wenn } i \neq j \quad \text{und} \quad g^{ii} = (g_{ii})^{-1}$$

vereinfacht geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{ij} &= \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}} \gamma_{ij}, \\ \tilde{\tau}^{ij} &= \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}} \tau^{ij} \quad \text{und} \quad \tilde{\tau}_j^i = \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}} \tau_j^i. \end{aligned} \quad (4.26d)$$

Zum Schluß muß noch angemerkt werden: Alle vorstehenden physikalischen Komponenten sind keine Tensorkomponenten mehr.  $\tilde{\tau}^{ij}$  läßt sich nicht mehr wie  $\tau^{ij}$  transformieren.

#### 4.1.4 Gleichgewichtsbedingungen

Wir schneiden aus dem unverformten Körper ein infinitesimales, krummliniges Parallelepipid heraus (Bild 4.3) und betrachten nur die Schnittkräfte in einer Richtung. Der Schnittkraftvektor in einer Fläche  $\Theta^1 = \text{const}$  ist dann

$$4^1 dF_1 = 4^1 \sqrt{g^{(11)}} \sqrt{g} d\theta^2 d\theta^3 \hat{=} \tau^{1j} y_j \sqrt{g} d\theta^2 d\theta^3 \quad (4.27)$$

und abgekürzt

$$= 4^1 d\theta^2 d\theta^3.$$

Indem wir noch die vektorielle Beziehung (4.24) heranziehen, schreiben wir rein geometrisch

$$\begin{aligned} dF_1 &= |y_2 \times y_3| d\Theta^2 d\Theta^3 = |y^1| \sqrt{g} d\Theta^2 d\Theta^3 \\ &= \sqrt{g^1 \cdot g^1} \sqrt{g} d\Theta^2 d\Theta^3 = \sqrt{g^{11}} \sqrt{g} d\Theta^2 d\Theta^3 \end{aligned}$$

an.

Das Gleichgewicht mit der Massenkraft lautet am Volumenelement (Bild 4.3

$$[-\underline{t}^1 + \underline{t}^1 + \underline{t}^1_{,1} d\Theta^1 + \dots] d\Theta^2 d\Theta^3 = k^1 d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3,$$

woraus sich allgemein

$$\underline{t}^i_{,i} + k = 0 \quad (4.28)$$

finden läßt.

Als partielle Ableitung der Schnittkräfte bekommen wir

$$\begin{aligned} \underline{t}^i_{,i} &= \frac{\partial(\tau^{ij} y_j \sqrt{g})}{\partial \Theta^i} = \sqrt{g} [\tau^{ij}_{,i} y_j + \tau^{ij} y_{j,i}] + \tau^{ij} y_j (\sqrt{g})_{,i} \\ &= \sqrt{g} [\tau^{ij}_{,i} y_j + \tau^{ik} \Gamma^j_{ki} y_j] + \tau^{ij} y_j (\sqrt{g})_{,i}. \end{aligned}$$

Unbekannt ist darin die Ableitung von  $\sqrt{g}$ . Nach der Kettenregel gilt

$$(\sqrt{g})_{,i} = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \Theta^i} = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial g_{kl}} \frac{\partial g_{kl}}{\partial \Theta^i} = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial g_{kl}} g_{kl,i}.$$

Infolge Gleichung (4.13) ist die Ableitung der Metrikensorkomponenten bekannt. Außerdem lassen sich die beiden Ausdrücke

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g} = \frac{1}{2\sqrt{g}}$$

und

$$\frac{\partial(g \delta^i_k)}{\partial g_{lk}} = \delta^i_k \frac{\partial g}{\partial g_{lk}} = D^{lj} \sim \frac{\partial g}{\partial g_{lk}} = D^{lk} = g g^{lk},$$

mit (4.9 b) so umformen, daß

$$(\sqrt{g})_{,i} = \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{kl} g_{kl,i}$$

wird. Mit

$$\begin{aligned} y_{l,i} &= g_{kl,i} y^k + g_{kl} y^{k,i} \\ y^l \cdot y_{l,i} &= g_{kl,i} y^l \cdot y^k + g_{kl} y^l \cdot y^{k,i} \\ y^l \cdot \Gamma^m_{li} y_m &= g^{kl} g_{kl,i} + g_{kl} y^l \cdot (-\Gamma^k_{in}) y^n \\ &\sim g^{kl} g_{kl,i} = \delta^l_m \Gamma^m_{li} + g_{kl} g^{ln} \Gamma^k_{in} = \Gamma^l_{li} + \delta^n_k \Gamma^k_{in} \\ &= \Gamma^l_{li} + \Gamma^n_{in} = 2 \Gamma^k_{ki} \quad \text{nach Austauschen der} \\ &\quad \text{Summationsindizes,} \end{aligned}$$

erhalten wir schließlich

$$(\sqrt{g})_{,i} = \frac{1}{2} \sqrt{g} \cdot 2 \Gamma^k_{ki} \quad (4.29)$$

Dieses Ergebnis, eingesetzt in die Schnittkraftgleichung, führt nach Umformung auf

$$\underline{t}^i_{,i} = \sqrt{g} [\tau^{ij}_{,i} + \tau^{ik} \Gamma^j_{ki} + \tau^{ij} \Gamma^k_{ki}] y_j \quad (4.30a)$$



Die rechteckige Klammer darin stellt die kovariante Ableitung des Spannungstensors dar. Es kann deshalb verkürzt geschrieben werden

$$\underline{t}^i{}_{,i} = \sqrt{g} [\tau^{ij} |_{,i}] y_j \quad (4.30b)$$

Nun muß noch die Massenkraft  $k$  auf die Volumenienheit umgerechnet werden. Das heißt, man setzt einfach an

$$k d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3 = p dV = p^i y_i dV = p^i y_i \sqrt{g} d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3 \quad (4.31)$$

und erhält

$$\begin{aligned} \sqrt{g} \tau^{ij} |_{,i} y_j + p \sqrt{g} &= 0 \\ \boxed{\tau^{ij} |_{,i} + p^j} &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Hierin sind die Komponenten  $\tau^{ij}$  symmetrisch, wie das Momentengleichgewicht  $y_i \times \underline{t}^i = 0$  am Element zeigt. Und zwar ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= y_i \times (t^i \sqrt{g^{(ii)}} \sqrt{g}) = y_i \times (\tau^{ij} y_j \sqrt{g}) \\ &= y^r \sqrt{g} \tau^{ij} \sqrt{g} - y^r \sqrt{g} \tau^{ji} \sqrt{g} \quad \text{für } i=j=r \\ &= g [(\tau^{12} - \tau^{21}) y^3 + (\tau^{23} - \tau^{32}) y^1 + (\tau^{31} - \tau^{13}) y^2], \end{aligned}$$

eine Beziehung, die aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren nur dann identisch Null ist, wenn

$$\tau^{ij} = \tau^{ji}. \quad (4.33)$$

## 4.2 Spezielle Körperträger

Das Kräftegleichgewicht an einem Körper wird mit Glg. (4.32) beschrieben, wobei im allgemeinen die tensoriellen Größen durch physikalische Größen ersetzt werden.

Die obigen drei partiellen Differentialgleichungen (4.32) für die Spannungen lassen sich wie üblich in die partiellen Differentialgleichungen der drei Verschiebungen  $u_i(\Theta^i)$  überführen, wenn die Verzerrungs- Verschiebungsbeziehungen (4.22) und ein Elastizitätsgesetz eingesetzt werden. Eine Lösung des Gleichungssystems ist somit bei gegebener Volumenbelastung  $p^i$  und gegebenen Randbedingungen zur Festlegung der Integrationskonstanten möglich. Wie das Gleichungssystem für die Spannungen und die Verzerrungsbedingungen bei verschiedenen Verbundkörperformen aussehen, zeigen die nächsten Kapitel.

### 4.2.1 Rotationskörper mit einer Achse

Ein mit den Zylinderkoordinaten des Bildes 4.4 beschreibbarer Rotations-

körper besitzt den Ortsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= n_1 x^1 + n_2 x^2 + n_3 x^3 = n_i x^i \\ &= n_1 r \cos \vartheta + n_2 r \sin \vartheta + n_3 z, \end{aligned} \quad (4.34)$$

so daß mit den krummlinigen Koordinaten

$$\Theta^1 = r, \quad \Theta^2 = \vartheta, \quad \Theta^3 = z$$

die folgenden Einheitsvektoren erhalten werden

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta^1} &= \mathbf{q}_1 = n_1 \cos \vartheta + n_2 \sin \vartheta \\ \mathbf{q}_2 &= -n_1 r \sin \vartheta + n_2 r \cos \vartheta \\ \mathbf{q}_3 &= n_3 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Die Metriktensoren lassen sich gemäß  $g_{ij} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j$  und  $g^{ij} = \mathbf{q}^i \cdot \mathbf{q}^j$  als

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

finden, worin sich z.B. die Komponenten  $g_{11}$  und  $g^{12}$  auf folgende Weise ermitteln lassen

$$\begin{aligned} g_{11} &= \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_1 = (n_1 \cos \vartheta + n_2 \sin \vartheta) \cdot (n_1 \cos \vartheta + n_2 \sin \vartheta) \\ &= n_1 \cdot n_1 \cos^2 \vartheta + n_2 \cdot n_2 \sin^2 \vartheta = 1 \end{aligned}$$

$$g^{12} = \frac{(-1)^{1+2} U_{21}}{g} = \frac{(-1)^3}{1 \cdot r^2 \cdot 1} (0 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = 0.$$

Die Christoffel-Symbole berechnen sich nach Gleichung (4.15 a). Dabei sind von Null verschieden

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \quad (4.37)$$

Die Gleichgewichtsgleichungen lauten nun beispielsweise für  $j = 2$  nach Gleichung (4.32)

$$\begin{aligned} \tau_{,i}^{i2} + \tau^{i2} \Gamma_{ki}^k + p^2 &= 0 \\ \left( \frac{\partial \tau^{12}}{\partial \Theta^1} + \frac{\partial \tau^{22}}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial \tau^{32}}{\partial \Theta^3} \right) + \tau^{21} \Gamma_{12}^2 + \tau^{12} \Gamma_{21}^2 + \tau^{12} \Gamma_{21}^2 + p^2 &= 0 \\ \frac{\partial \tau^{12}}{\partial r} + \frac{\partial \tau^{22}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau^{32}}{\partial z} + \tau^{12} \frac{3}{r} + p^2 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung muß noch auf die physikalischen Komponenten der Spannungen umgeschrieben werden. Es werden mit

$$\tau^{*ij} = \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}} \tau^{ij}, \quad p^{*i} = \sqrt{g_{(ii)}} p^i$$

$$\sigma_r = \tau^{*11} = \sqrt{1 \cdot 1} \tau^{11} = \tau^{11}, \quad \sigma_\vartheta = r^2 \tau^{22}, \quad \sigma_z = \tau^{33}$$

$$\tau_{rz} = \tau^{*13} = \sqrt{1 \cdot 1} \tau^{13} = \tau^{13}, \quad \tau_{r\vartheta} = r \tau^{12}, \quad \tau_{\vartheta z} = r \tau^{23}$$

$$p_r = p^{*1} = \sqrt{1} p^1 = p^1, \quad p_\vartheta = r p^2, \quad p_z = p^3,$$

so daß gilt

$$\frac{\partial(\frac{1}{r} \tau_{r\vartheta})}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{3}{r^2} \tau_{r\vartheta} + \frac{p_\vartheta}{r} = 0.$$

Das vollständige System der Gleichgewichtsbedingungen heißt

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\vartheta) + p_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau_{\vartheta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\vartheta} + p_\vartheta &= \quad (4.39) \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + p_z &= \quad . \end{aligned} \right.$$

Um zu dem Differentialgleichungssystem für die Verschiebungen zu kommen, müssen neben dem im Kapitel 5 zu behandelnden Elastizitätsgesetz die geometrischen Feldgleichungen bekannt sein, und zwar ebenfalls in ihrer physikalischen Form. Entsprechend den Glg. (4.22 b, 4.17, 4.20) finden wir

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}) = \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j} - 2u_k \Gamma_{ij}^k); \quad (4.40)$$

nach Einsetzen der Christoffelsymbole

$$\gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial r}, \quad \gamma_{22} = \frac{1}{2} (2u_{2,2} - 2u_k \Gamma_{22}^k) = \frac{\partial u_2}{\partial \vartheta} + u_1 r, \quad \gamma_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

$$2\gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta}, \quad 2\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial r}, \quad 2\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{2}{r} u_2.$$

Die Transformationsbeziehungen zur Erhaltung der physikalischen Komponente lauten für die Verzerrungen

$$\gamma_{ij}^* = \sqrt{g^{(ii)} g^{(jj)}} \gamma_{ij}, \quad (4.41)$$

so daß wir für die einzelnen technischen Größen (die Addition der Gleitwinkelanteile  $u_{j,i} + u_{i,j}$  gemäß Abschnitt 5.3 liefert den Faktor 2)

$$\epsilon_r = \gamma_{11}^* = \sqrt{g^{11} g^{11}} \gamma_{11} = \gamma_{11}, \quad \epsilon_\vartheta = \gamma_{22}^* = \frac{\gamma_{22}}{r^2}, \quad \epsilon_z = \gamma_{33}^* = \gamma_{33}$$

$$\left( \frac{1}{2} \gamma_{22} \right) \gamma_{22}^* = \sqrt{g^{22} g^{22}} \gamma_{22} = \frac{\gamma_{22}}{r}, \quad \left( \frac{1}{2} \gamma_{rz} \right) \gamma_{13}^* = \gamma_{13}, \quad \gamma_{12}^* = \frac{1}{r} \gamma_{12}$$

bekommen.

Für die Verschiebungen gilt analog (4.41)

$$u_i^* = \sqrt{q^{(22)}} u_i \quad (4.42)$$

$$u = u_1^* = \sqrt{q^{11}} u_1 = u_1, \quad v = \frac{1}{r} u_2, \quad w = u_3.$$

Damit erhält man die bekannten geometrischen Feldgleichungen (auch Formänderungsbeziehungen genannt):

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\varphi = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\varphi r \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{\varphi z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \quad \tau_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \tau_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1v}{r}. \end{array} \right. \quad (4.43)$$

#### 4.2.2 Kartesischer Körper

In diesem Fall liegt nicht nur ein orthogonales, sondern sogar ein orthonormiertes KOS vor. Der Ortsvektor lautet

$$\mathbf{r} = n_1 x + n_2 y + n_3 z, \quad (4.44)$$

und die Koordinaten sind

$$\Theta^1 = x, \quad \Theta^2 = y, \quad \Theta^3 = z.$$

Die tensoriellen Komponenten sind jetzt mit den physikalischen Komponenten identisch, und die Gleichgewichtsbedingungen heißen vereinfacht (die  $\Gamma_{kr}^i$  sind Null, d.h. die kovarianten Ableitungen sind gleich den partiellen Ableitungen)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + p_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + p_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + p_z = 0 \end{array} \right. \quad (4.45)$$

Die Formänderungsbeziehungen sind ebenfalls recht einfach

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{array} \right. \quad (4.46)$$

#### 4.2.3 Kugel

Bei diesem zentralsymmetrischen Körper (Bild 4.4) gehen wir von dem

Ortsvektor

$$\vec{r} = n_1 r \sin \varphi \cos \vartheta + n_2 r \sin \varphi \sin \vartheta + n_3 r \cos \varphi \quad (4.47)$$

aus. Dann lauten die Basisvektoren, wenn

$$\Theta^1 = r, \quad \Theta^2 = \vartheta, \quad \Theta^3 = \varphi$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= n_1 \sin \varphi \cos \vartheta + n_2 \sin \varphi \sin \vartheta + n_3 \cos \varphi \\ \mathcal{U}_2 &= n_1 r \cos \varphi \cos \vartheta + n_2 r \cos \varphi \sin \vartheta - n_3 r \sin \varphi \\ \mathcal{U}_3 &= -n_1 r \sin \varphi \sin \vartheta + n_2 r \sin \varphi \cos \vartheta \end{aligned} \quad (4.48)$$

Als Metriktensoren liegen vor

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

Die Christoffelsymbole lassen sich vereinfacht berechnen, da in der Matrix ( ) nur die Hauptdiagonale besetzt ist:

$$\Gamma_{lm}^k = \frac{1}{2} g^{(kk)} (g_{mk,l} + g_{lm,m} - g_{2m,k}) \quad (4.50)$$

Entsprechend dem Beispiel (Klingb., S. 85)

$$\begin{aligned} \Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} (g_{33,2} + g_{32,3} - g_{23,2}) \\ &= \frac{1}{2} g^{33} g_{32,2} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} 2r^2 \sin \varphi \cos \varphi = \cot \varphi \end{aligned}$$

lassen sich alle Christoffelsymbole matriziell anschreiben

$$(\Gamma_{ij}^1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -r \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad (\Gamma_{ij}^2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$(\Gamma_{ij}^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & \cot \varphi \\ \frac{1}{r} & \cot \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Das vollständige System der Gleichgewichtsbedingungen lautet

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial (\frac{1}{r \sin \varphi} \tau_{r\varphi})}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (-\sigma_{\vartheta} - \sigma_{\varphi} + 2\sigma_r) + \frac{1}{r} \tau_{r\vartheta} \cot \varphi + p_r = 0 \\ \frac{\partial \tau_{\vartheta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial (\frac{1}{r \sin \varphi} \tau_{\vartheta\varphi})}{\partial \varphi} - \frac{\cot \varphi}{r} (\sigma_{\vartheta} - \sigma_{\varphi}) + \frac{3}{r} \tau_{r\vartheta} + p_{\vartheta} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial (\frac{1}{r \sin^2 \varphi} \sigma_{\varphi})}{\partial \varphi} \sin \varphi + \frac{1}{r} \tau_{r\varphi} + \frac{3}{r} \cot \varphi \tau_{\vartheta\varphi} + p_{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

Als Formänderungsbeziehungen sind zu berücksichtigen

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \epsilon_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r}, & \epsilon_\varphi &= \frac{\cot \alpha \varphi}{r \sin \varphi} w + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + \cot \varphi + \frac{v}{r} \\ 2 \gamma_{r\varphi} &= \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}, & 2 \gamma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} - 2 \cot \alpha \varphi w, & 2 \gamma_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{aligned} \right. \quad (4.53)$$

### 4.3 Allgemeiner Flächenträger

Eine vom Arbeitsaufwand her einfacher als der Körperträger des vorigen Kapitels zu behandelnde Tragstruktur ist der Flächenträger. Er wird unterteilt in einen allgemeineren, gekrümmten Fall und den ebenen Fall.

Um zu den elastizitätstheoretischen Beziehungen dieser zweidimensionalen Tragkonstruktion aus denen des dreidimensionalen Kontinuums zu gelangen, bedarf es einiger Annahmen bzw. Linearisierungen. Diese Annahmen werden an den entsprechenden Textstellen und später speziell im Rahmen einer Zusammenstellung von Gleichgewichtsbedingungen und Verzerrungsbedingungen der Theorie von Green-Zerna und der Technischen Schalentheorie (abgek. T.S.) herausgestellt. In diesem Zusammenhang soll festgehalten werden, daß jede Art von Schalentheorie sich mit einer Näherung zufrieden geben muß, da sonst die mathematischen Schwierigkeiten zu groß werden.

#### 4.3.1 Zusammenhang Geometrie Schale mit Geometrie Raum

Eine erste Änderung gegenüber der dreidimensionalen Theorie erhalten wir, wenn wir uns nach Bild 4.5 auf die Mittelfläche  $\Theta^3 = 0$  im dreidimensionalen Schalenraum beziehen. Als Ortsvektor zu einem Punkt A außerhalb der Mittelfläche führt der Vektor

$$\mathbf{r}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \bar{L} \bar{\mathbf{r}}(\Theta^1, \Theta^2) + t \Theta^3 \boldsymbol{\alpha}_3(\Theta^1, \Theta^2) \quad ^1), \quad (4.54a)$$

wobei  $\boldsymbol{\alpha}_3$  der Einheitsnormalenvektor auf der Mittelfläche sein soll. Die krummlinigen Koordinaten  $\Theta^1$  und  $\Theta^2$ , kurz  $\Theta^\alpha$ , heißen Gaußsche Flächenparameter. Mit ihrer Hilfe werden wir infolge Glg. (4.2) die kovariante Basis  $\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_{,i}$  im Raum finden und eine kovariante Basis, nach der Definition (Bild 4.6)  $\boldsymbol{\alpha}_\alpha = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{,\alpha}$ , in der Mittelfläche der Schale. Als  $\bar{L}$  ist eine charakteristische Länge eingeführt worden, die zum Beispiel der Krümmungsradius oder die kleinste Seitenlänge sein kann.

<sup>1)</sup> Bei Klingbeil werden sowohl  $\mathbf{R} = \boldsymbol{\alpha} + \check{\mathbf{u}}$  (Glg. 4.1) als auch  $\mathbf{R} = \boldsymbol{\alpha} + \Theta^3 \boldsymbol{\alpha}_3$  verwendet. Die letztere Beziehung sollte aber terminologisch konsequent wie Glg. (4.54 a) lauten.

Bei Benutzung der dimensionslosen Größen

$$\Theta^1 = \frac{y^1}{L^1}, \quad \Theta^2 = \frac{y^2}{L^2}, \quad \Theta^3 = \Theta = \frac{y^3}{t} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{t}{L}, \quad y^3 = \lambda \bar{L} \xi^3, \quad (4.55)$$

worin die frei wählbaren Konstanten  $L^1, L^2$  der Normierung dienen, wird aus Glg. (4.54 a) die Gleichung

$$\bar{u} = \bar{L} (\bar{u} + \lambda \Theta^3 \alpha_3). \quad (4.54b)$$

Durch Differentiation nach den  $\Theta^i$  folgt daraus für die Basisvektoren des Schalenraumes ([Klingbeil], S.154)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \Theta^1} &= \eta_1 = \bar{L} (\alpha_1 + \lambda \Theta^3 \alpha_{3,1}) = \bar{L} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \Theta^1} + \lambda \Theta^3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial \Theta^1} \right) \\ \eta_2 &= \bar{L} (\alpha_2 + \lambda \Theta^3 \alpha_{3,2}) \\ \eta_3 &= \bar{L} (\lambda \alpha_3) = \alpha_3 t (\Theta^1, \Theta^2) \end{aligned} \quad (4.56)$$

bzw. in Kurzform

$$\eta_\alpha = \bar{L} (\alpha_\alpha + \lambda \Theta^3 \alpha_{3,\alpha}) \triangleq \bar{L} \mu_\alpha^3 \alpha_\alpha \quad (\text{vgl. 4.62b})$$

Die Basis des Raumes ist damit auf die Basis der Mittelfläche und des zugehörigen Normalenvektors zurückgeführt.

Wir finden dann die Metriktensoren analog  $g_{ij} = \eta_i \cdot \eta_j$  und mit  $\frac{\partial t}{\partial \Theta^3} = 0$  zu

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \bar{L}^2 (\alpha_\alpha + \lambda \Theta^3 \alpha_{3,\alpha}) \cdot (\alpha_\beta + \lambda \Theta^3 \alpha_{3,\beta}) \\ g_{\alpha 3} &= \bar{L}^2 (\alpha_\alpha + \lambda \Theta^3 \alpha_{3,\alpha}) \cdot (\lambda \alpha_3) \\ g_{33} &= \bar{L}^2 \lambda^2 (\alpha_3 \cdot \alpha_3) \end{aligned} \quad (4.57a)$$

Da definitionsgemäß  $\alpha_3 \perp \alpha_\alpha$  ist, bedeutet das mit  $\alpha_3 = \alpha_3 (\Theta^1, \Theta^2)$ , daß

$$\alpha_3 \cdot \alpha_\alpha = 0, \quad \alpha_3 \cdot \alpha_3 = 1, \quad \frac{\partial \alpha_3}{\partial \Theta^3} = \alpha_{3,3} = 0.$$

Nach Differenzieren bezüglich  $\Theta^\alpha$  wird daraus wegen  $(\alpha_{3,\alpha} = \alpha_{\alpha,3})$  (Vertauschungssatz von Schwarz  $\alpha_{\alpha,\beta} = \alpha_{\beta,\alpha}$ )

$$\alpha_{3,\alpha} \cdot \alpha_3 + \alpha_3 \cdot \alpha_{3,\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_3 \cdot \underbrace{\alpha_{3,\alpha}}_{d\alpha_3 = \perp \alpha_3} = 0,$$

und wir erhalten eine Metrik

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \bar{L}^2 (\alpha_\alpha \cdot \alpha_\beta + \lambda \Theta^3 [\alpha_\alpha \cdot \alpha_{3,\beta} + \alpha_\beta \cdot \alpha_{3,\alpha}] + \lambda^2 \Theta^6 \alpha_{3,\alpha} \cdot \alpha_{3,\beta}) \\ g_{\alpha 3} &= 0, \quad g_{33} = \bar{L}^2 \lambda^2 \end{aligned} \quad (4.57b)$$

Nun werden verschiedene Abkürzungen eingeführt; als erstes der sogenannte Flächentensor  $b_{\alpha\beta}$ , auch Krümmungstensor genannt, weil er mit der Flächenkrümmung zusammenhängt. Er genügt der Beziehung  $b_{\alpha\beta} = -\alpha_{3,\beta} \cdot \alpha_\alpha$ . Dann gilt analog obiger Differentiation  $\alpha_{3,\beta} \cdot \alpha_\alpha + \alpha_3 \cdot \alpha_{\alpha,\beta} = 0$ , daß

$$b_{\alpha\beta} = +\alpha_3 \cdot \alpha_{\alpha,\beta}.$$

Der Basisvektor  $\alpha_3$  ist sehr leicht aus der Definition der kontravari-

anten Basis (vgl. 4.2 b) und den Beziehungen der Vektorrechnung (Bild 4.6) zu erhalten

$$\alpha_3 = \alpha^3 = \frac{\alpha_1 \times \alpha_2}{|\alpha_1 \times \alpha_2|} \quad \text{mit} \quad |\alpha_1 \times \alpha_2| = |\alpha_1| |\alpha_2| \sin(\alpha_1, \alpha_2) .$$

Es ist weiter ersichtlich, da  $\alpha_{\alpha, \beta} = \alpha_{\beta, \alpha}$ , daß

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\alpha_1 \times \alpha_2}{|\alpha_1 \times \alpha_2|} \cdot \alpha_{\alpha, \beta} = \frac{[\alpha_{\alpha, \beta}, \alpha_1, \alpha_2]}{|\alpha_1 \times \alpha_2|} = \frac{[\alpha_{\alpha, \beta}, \alpha_1, \alpha_2]}{\sqrt{(\alpha_1 \times \alpha_2) \cdot (\alpha_1 \times \alpha_2)}} = b_{\beta\alpha} .$$

Für das Skalarprodukt der Ableitungen der Basisvektoren der Fläche findet man über die zu Gleichung (4.15 a) analoge Beziehung (diese Beziehung gilt ja für beliebige Koordinatensysteme)

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} \alpha^{\alpha\epsilon} (\alpha_{\epsilon, \beta, \gamma} + \alpha_{\gamma, \epsilon, \beta} - \alpha_{\beta\gamma, \epsilon}) . \quad (4.60a)$$

Darin stellen die

$$\alpha^{\alpha\epsilon} = \alpha^{\alpha} \cdot \alpha^{\epsilon} \quad , \quad \alpha_{\gamma\epsilon} = \alpha_{\gamma} \cdot \alpha_{\epsilon} \quad (4.60b)$$

die Komponenten der Metriktensoren der Fläche dar. Sie sind miteinander verbunden durch

$$\alpha^{\alpha\epsilon} \alpha_{\gamma\epsilon} = \delta_{\gamma}^{\alpha} . \quad (4.60c)$$

Für einige Christoffelsymbole geht man einfacher von

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \alpha^{\alpha} \cdot \alpha_{\beta, \gamma}$$

aus. Das liefert

$$\Gamma_{\rho\beta}^{\alpha} = \alpha^{\alpha} \cdot \alpha_{\beta, \rho} = \alpha^{\alpha\gamma} \alpha_{\gamma} \cdot \alpha_{\beta, \rho} = -\alpha^{\alpha\gamma} b_{\gamma\rho} = -b_{\rho}^{\alpha}$$

$$\Gamma_{\alpha\rho}^{\beta} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha_{\alpha, \rho} = b_{\alpha\rho} \quad , \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha_{\beta, \alpha} = 0$$

$$\Gamma_{\beta\beta}^{\alpha} = \alpha^{\alpha} \cdot \alpha_{\beta, \beta} = 0 \quad , \quad \Gamma_{\beta\beta}^{\beta} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha_{\beta, \beta} = 0 \quad ,$$

wobei Christoffelsymbole, die gleichzeitig zweimal mit dem Index Drei versehen sind, identisch verschwinden.

Hiermit sind die Einzelausdrücke der sogenannten Ableitungsgleichungen der Basisvektoren bekannt. Angewendet auf die Flächenkoordinaten ergeben sich über

$$u_{k, i} = \Gamma_{\alpha i}^m u_{\alpha m} \quad \text{und} \quad u_j^k{}_{, i} = -\Gamma_{\alpha m}^k u_j^{\alpha m}$$

die allgemeinen Ableitungsgleichungen der Flächentheorie von Gauß ( $\alpha_{\alpha, \beta}$ ,  $\alpha^{\alpha, \beta}$ ) und Weingarten ( $\alpha_{3, \alpha}$ )

$$\alpha_{\alpha, \rho} = \Gamma_{\alpha\rho}^{\gamma} \alpha_{\gamma} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\beta} \alpha_{\beta} = \Gamma_{\alpha\rho}^{\gamma} \alpha_{\gamma} + b_{\alpha\rho} \alpha_3$$

$$\alpha_{3, \alpha} = \Gamma_{3\alpha}^{\beta} \alpha_{\beta} + \Gamma_{3\alpha}^{\beta} \alpha_{\beta} = -b_{\alpha}^{\beta} \alpha_{\beta}$$

(4.61)

$$\alpha^{\alpha, \rho} = -\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \alpha^{\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \alpha^{\beta\gamma} = -\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \alpha^{\beta\gamma} + b_{\beta}^{\alpha} \alpha^{\beta\gamma}$$

$$\alpha^{\beta, \alpha} = \alpha_{3, \alpha} \quad , \quad \alpha_{3, \beta} = 0 \quad , \quad \alpha_{\alpha, 3} = 0 .$$



Mit den bekannten Komponenten des Tensors  $a_{\alpha\beta}$  und des Krümmungstensors  $b_{\alpha\beta}$  der Fläche  $\Theta^3 = \Theta = 0$  ist die Ausgangsmetrik des Raumes in Flächengrößen überführt worden:

$$\begin{aligned} q_{\alpha\beta} &= \bar{L}^2 (a_{\alpha\beta} - 2\lambda\Theta b_{\alpha\beta} + \lambda^2\Theta^2 b_{\alpha}^{\gamma} b_{\beta\gamma}) = \bar{L}^2 c_{\alpha\beta} \\ q_{\alpha 3} &= 0, \quad q_{33} = \frac{1}{\bar{L}^2 \lambda^2}. \end{aligned} \quad (4.62a)$$

Darin werden als übliche Abkürzungsbezeichnungen

$$c_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha}^{\gamma} \mu_{\gamma\beta} = a_{\alpha\beta} - 2\lambda\Theta b_{\alpha\beta} + \lambda^2\Theta^2 b_{\alpha}^{\gamma} b_{\beta\gamma} \quad \text{und} \quad \mu_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} - \lambda\Theta b_{\alpha}^{\beta} = \mu_{\alpha\epsilon} a^{\beta\epsilon} \quad (4.62b)$$

gebraucht.

Für die kontravariante Metrik zeigt Zerna, 1962, eine Potenzreihe in den  $\lambda\Theta$  auf

$$\begin{aligned} q^{\alpha\beta} &= \frac{1}{\bar{L}^2} (a^{\alpha\beta} + 2\lambda\Theta b^{\alpha\beta} + 3\lambda^2\Theta^2 b^{\alpha\gamma} b_{\gamma}^{\beta} + \dots) \\ q^{\alpha 3} &= 0, \quad q^{33} = \frac{1}{\bar{L}^2 \lambda^2}. \end{aligned} \quad (4.62c)$$

Die Determinanten  $q$  und  $a$  der kovarianten Metriktensoren werden ermittelt zu

$$\begin{aligned} \sqrt{q} &= [\sigma_{j_1}, \sigma_{j_2}, \sigma_{j_3}] = \bar{L}^3 [\mu_1^{\alpha} \alpha_{\alpha}, \mu_2^{\beta} \alpha_{\beta}, \lambda \alpha_3] \\ &= \bar{L}^3 \lambda (\mu_1^{\alpha} \alpha_{\alpha} \times \mu_2^{\beta} \alpha_{\beta}) \cdot \alpha_3 = \bar{L}^3 \lambda \mu_1^{\alpha} \mu_2^{\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.63a)$$

$$\sqrt{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = (\alpha_1 \times \alpha_2) \cdot \alpha_3 = \epsilon_{12} \quad (4.63b)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a} \\ -\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.63c)$$

Das Verhältnis der Determinanten ist

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{\frac{q}{a}} = \frac{\bar{L}^3 \lambda \mu_1^{\alpha} \mu_2^{\beta} \epsilon_{\alpha\beta}}{\epsilon_{12}} = \frac{\bar{L}^3 \lambda}{\epsilon_{12}} \mu_1^{\alpha} (\mu_2^1 \epsilon_{\alpha 1} + \mu_2^2 \epsilon_{\alpha 2}) \\ &= \frac{\bar{L}^3 \lambda}{\epsilon_{12}} (\mu_1^1 \mu_2^2 - \mu_1^2 \mu_2^1) \epsilon_{12} = \bar{L}^3 \lambda \det(\mu_{\alpha}^{\beta}) = \bar{L}^3 \lambda h^*. \end{aligned}$$

Die Veränderlichkeit über der Schalendicke kennzeichnet darin

$$\begin{aligned} h^* &= (\delta_1^1 - \lambda\Theta b_1^1)(\delta_2^2 - \lambda\Theta b_2^2) - (\delta_1^2 - \lambda\Theta b_1^2)(\delta_2^1 - \lambda\Theta b_2^1) \\ &= 1 - \lambda\Theta (b_1^1 + b_2^2) + (\lambda\Theta)^2 (b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1) \\ &= 1 - (\lambda\Theta) 2H + (\lambda\Theta)^2 K \end{aligned} \quad (4.64b)$$

In Glg. (4.64 b) sind als Abkürzungen enthalten die mittlere Krümmung  $H$  und die Gaußsche Krümmung  $K$

$$H = \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} a^{\alpha\beta} \triangleq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad K = \det(b_{\alpha}^{\beta}) \triangleq \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} \quad (4.65)$$

In diesen Abkürzungen sind die Hauptkrümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$  in einem Schalenpunkt verborgen

#### 4.3.2 Grundformen der Flächentheorie

Bei der Anwendung der Schalentheorie sind vor allem die sogenannten Grundformen der Flächentheorie von Interesse. Jede dieser Grundform ist ein Skalarprodukt von Vektordifferentialen der Schalenmittelfläche (nicht mehr allgemein wie Glg. (4.21))

$$d\bar{x} \cdot d\bar{x} \quad , \quad d\bar{x} \cdot d\alpha_3 \quad , \quad d\alpha_3 \cdot d\alpha_3 \quad . \quad (4.66)$$

Für die Festigkeitsrechnung sind nur die ersten zwei Grundformen von Bedeutung.

#### Erste Grundform

Die erste Grundform benutzt man zur Berechnung eines Bogenelementes  $ds$  längs einer Kurve  $\Theta^\alpha$  in der Schalenmittelfläche. Das Quadrat des Bogenelementes ist nach Aufgabe der allgemeineren Bezeichnungsform  $ds^2 = d\bar{x} \cdot d\bar{x}$  zugunsten der Flächengrößen  $\bar{x} = \bar{L}(\bar{x} + \lambda \Theta^3 \alpha_3) \rightarrow \bar{L} \bar{x}$  (da die Mittelfläche gewählt wurde,  $\Theta^3 = 0$ )

$$\begin{aligned} ds^2 &= \bar{L} d\bar{x} \cdot \bar{L} d\bar{x} = \bar{L}^2 \frac{\partial \bar{x}}{\partial \Theta^\alpha} d\Theta^\alpha \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \Theta^\beta} d\Theta^\beta \\ &= \bar{L}^2 \alpha_\alpha \cdot \alpha_\beta d\Theta^\alpha d\Theta^\beta = \bar{L}^2 a_{\alpha\beta} d\Theta^\alpha d\Theta^\beta \quad , \end{aligned} \quad (4.67a)$$

wie es auch direkt aus (4.62 a) und (4.21) abzulesen ist, wenn  $g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ . Bei einer Parameterdarstellung der Kurven  $\Theta^\alpha(t)$  in der Fläche führt das weiter zu

$$\begin{aligned} ds^2 &= \bar{L}^2 a_{\alpha\beta} \frac{d\Theta^\alpha}{dt} \frac{d\Theta^\beta}{dt} dt dt \\ ds &= \bar{L} \sqrt{a_{\alpha\beta} \dot{\Theta}^\alpha \dot{\Theta}^\beta} dt \quad , \end{aligned} \quad (4.67b)$$

einer Formel, die der Berechnung der Ablegelängen der Fäden auf Verbundschalen zugrunde liegt.

Die für die Faserverbundauslegung bedeutsamen geodätischen Linien von Rotationskörpern sind ebenfalls mit der ersten Grundform bestimmbar. Die Herleitung ihrer DGLn erfolgt -gemäß der Definition geodätischer Linien- über das Variationsproblem für die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten der Schale. Es gilt

$$l = \int_{s_0}^s ds = \int_{t_0}^{t_1} \left( \bar{L} \sqrt{a_{\alpha\beta} \dot{\Theta}^\alpha \dot{\Theta}^\beta} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} F dt = \text{Minimum} \quad .$$

Die Extremalbedingung für das Vorhandensein eines stationären Wertes  $l$  des Integrals über das Funktional  $F$  ist, wenn eine mit den Randbedingungen verträgliche Variation  $\delta \Theta^v(t) = \epsilon \phi^v(t)$  vorliegt,

$$\begin{aligned} \delta l &= \int_{t_0}^{t_1} \delta F(t, \Theta^v) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [F(t, \Theta^v + \epsilon \phi^v, \dot{\Theta}^v + \epsilon \dot{\phi}^v) - F(t, \Theta^v, \dot{\Theta}^v)] dt = 0. \end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung des 1. Integranden liefert

$$F(t, \Theta^v + \epsilon \phi^v, \dot{\Theta}^v + \epsilon \dot{\phi}^v) = F(t, \Theta^v, \dot{\Theta}^v) + \frac{\partial F}{\partial \Theta^{(v)}} \epsilon \phi^{(v)} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\Theta}^{(v)}} \epsilon \dot{\phi}^{(v)} + \dots$$

Dieses eingesetzt, in  $\delta l$  verbleiben nur noch die Glieder

$$\begin{aligned} \frac{\delta l}{\epsilon} &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial \Theta^{(v)}} \phi^{(v)} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\Theta}^{(v)}} \dot{\phi}^{(v)} \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial \Theta^{(v)}} \phi^{(v)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{\Theta}^{(v)}} \phi^{(v)} \right) \right] dt + \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{\Theta}^{(v)}} \phi^{(v)} dt \right]_{t_0}^{t_1} = 0. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung muß bei der Forderung nach einer zulässigen Variation  $\phi^v(t_0) = \phi^{(v)}(t_1) = 0$  sein, damit das Randintegral verschwindet. Als Extremalbedingung verbleibt der zu integrierende Ausdruck, wobei die rechteckige Klammer die Euler-Lagrangen-DGLn darstellt.

Diese DGLn führen zu den DGLn der geodätischen Linien

$$\frac{\partial F}{\partial \Theta^v} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{\Theta}^v} \right) = \frac{1}{2F} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \Theta^v} \dot{\Theta}^\alpha \dot{\Theta}^\beta - \frac{d}{dt} \left( \frac{2a_{\alpha v} \dot{\Theta}^\alpha}{2F} \right) = 0. \quad (4.68)$$

Nach Differentiation und Umordnung erhält man

$$\dot{\Theta}^\beta \frac{\partial}{\partial \dot{\Theta}^\beta} \left( \frac{a_{\alpha v} \dot{\Theta}^\alpha}{F} \right) + \dot{\Theta}^\beta \frac{\partial}{\partial \Theta^\beta} \left( \frac{a_{\alpha v} \dot{\Theta}^\alpha}{F} \right) - \frac{1}{2F} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \Theta^v} \dot{\Theta}^\alpha \dot{\Theta}^\beta = 0.$$

### Zweite Grundform

Die zweite Grundform der Flächentheorie führt zu den für die Konturberechnung von Verbundbehältern ebenfalls wichtigen Hauptkrümmungen.

Es waren

$$\frac{d\bar{u}}{d\Theta^\alpha} = \bar{u}_{,\alpha} = \alpha_\alpha \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha_\beta}{d\Theta^\beta} = \alpha_{\beta,\beta}.$$

Daraus folgt

$$d\bar{u} \cdot d\alpha_\beta = \alpha_\alpha \cdot \alpha_{\beta,\beta} d\Theta^\alpha d\Theta^\beta.$$

Das ist aber gemäß der Definition des Krümmungstensors  $b_{\alpha\beta} = -\alpha_\alpha \cdot \alpha_{\beta,\beta}$

$$d\bar{u} \cdot d\alpha_\beta = -b_{\alpha\beta} d\Theta^\alpha d\Theta^\beta.$$

Den Zusammenhang von Krümmungstensor bzw. zweiter Grundform mit dem Krümmungsradius in einem beliebigen Schalennormabschnitt zeigt die folgende Ableitung. Entsprechend Bild 4.7 ist aus den geometrischen

Zusammenhängen an einem Punkt der Schalenmittelfläche abzulesen

$$\frac{ds}{R} = \frac{|d\varphi|}{|\varphi|} = \frac{|d\varphi|}{1} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R} = \frac{|d\varphi|}{ds} .$$

Hierin stellt die Linie  $s$  die Schnittlinie der Schalenmittelfläche mit einer Ebene dar, die die Flächennormale  $\alpha_3$  beinhaltet. Der Vektor  $\varphi$  ist der Tangenteneinheitsvektor an die Kurve  $s$ . Die Änderung des Tangenteneinheitsvektors  $\frac{d\varphi}{ds}$  steht senkrecht auf der Tangentialebene und zeigt in Richtung oder Gegenrichtung von  $\alpha_3$ . Zu einer Erweiterung auf negative Krümmungen verhilft die Beziehung ([Klingbeil], S. 104)

$$\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \alpha_3$$

Laut Definition ist  $\alpha_3 \cdot \varphi = 0$ . Durch Differentiation dieses Ausdruckes erhält man

$$\frac{d\alpha_3}{ds} \cdot \varphi + \alpha_3 \cdot \frac{d\varphi}{ds} = 0 .$$

Außerdem heißt der Tangenteneinheitsvektor an die Kurve  $\bar{L} \bar{\varphi}(s)$

$$\varphi = \frac{\bar{L} d\bar{\varphi}}{ds} .$$

Somit läßt sich schreiben (unter Berücksichtigung von (4.67 b))

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= - \frac{d\alpha_3}{ds} \bar{L} \frac{d\bar{\varphi}}{ds} = + \alpha_3 \cdot \frac{d\varphi}{ds} \\ &= - \bar{L} \frac{d\alpha_3 \cdot d\bar{\varphi}}{(\bar{L})^2 d\bar{\varphi} \cdot d\bar{\varphi}} = + \frac{b_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta dt dt}{\bar{L} a_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta dt dt} \quad (4.69) \\ &= \frac{b_{\alpha\beta} \dot{\theta}^\alpha \dot{\theta}^\beta}{\bar{L} a_{\alpha\beta} \dot{\theta}^\alpha \dot{\theta}^\beta} , \end{aligned}$$

wobei in der letzten Beziehung rein formal durch Erweiterung mit dem Differential  $dt$  auf eine Parameterdarstellung mit dem Parameter  $t$  übergegangen wurde. Die Krümmung der Schnittkurve eines Normalschnittes ist also gleich dem Quotienten aus zweiter und erster Grundform.

Wir haben zuvor nur die Krümmung in Richtung beliebiger Koordinatenlinien bzw. Parameterlinien untersucht. Es sind aber speziell die Linien von Interesse, in deren Richtung extremale Krümmungen vorliegen, nämlich die (Haupt-) Krümmungslinien.

Eine beliebige Schnittrichtung der Schalenfläche kann durch einen Faktor  $\chi = d\theta^1/d\theta^2$  festgelegt werden. Das kann z.B. (s. Bild 4.8) die Ablegeline eines Fadens auf einem Wickelkörper sein, wenn als Koordinaten der Winkel  $\vartheta$  und die Mantelerzeugende  $\varphi$  einer Rotationschale verwendet werden. Das Einsetzen von  $\chi$  in die ausgeschriebene Form von (4.69) liefert

$$\frac{\bar{L}}{R} = \frac{b_{11} \chi^2 + 2 b_{12} \chi + b_{22}}{a_{11} \chi^2 + 2 a_{12} \chi + a_{22}} = \frac{Z}{N} \quad (\text{abgek.}). \quad (4.70)$$

Die Differentiation dieser Funktion  $d(\bar{L}/R)/d\chi = 0$ , ergibt

$$[(2\chi b_{11} + 2b_{12})N - Z(2\chi a_{11} + 2a_{12})]/N^2 = 0.$$

Da N die erste Grundform beinhaltet, die immer ungleich Null ist, erhält man durch Ausmultiplizieren des Zählers Z

$$\chi^3(b_{11}a_{11} - b_{11}a_{11}) + \chi^2(2b_{11}a_{12} + b_{12}a_{11} - 2a_{11}a_{12} + a_{12}b_{11}) + \chi(b_{11}a_{22} + 2a_{12}b_{12} - a_{11}b_{22} - 2a_{12}b_{12}) + (b_{12}a_{22} - a_{12}b_{22}) = 0,$$

beziehungsweise

$$\chi^2(b_{12}a_{11} + a_{12}b_{11}) + \chi(b_{11}a_{22} - a_{11}b_{22}) + (b_{12}a_{22} - a_{12}b_{22}) = 0. \quad (4.71)$$

Das ist eine quadratische Gleichung für die beiden Schnittrichtungen  $b_{210}$ .

Extremwertstellen  $\chi_i$  der beiden Extrema  $\bar{L}/R_1$  und  $\bar{L}/R_2$

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \frac{-(b_{11}a_{22} - a_{11}b_{22}) \pm \sqrt{(b_{11}a_{22} - a_{11}b_{22})^2 - 4(b_{12}a_{11} - a_{12}b_{11})(b_{12}a_{22} - a_{12}b_{22})}}{2(b_{12}a_{22} - a_{12}b_{22})}. \quad (4.72)$$

Wie hier nicht bewiesen werden soll, stehen beide Richtungen aufeinander senkrecht. Wir wollen dieses wenigstens für den sehr häufigen Spezialfall des orthogonalen Koordinatennetzes aufzeigen. Es gilt dort

$$a_{12} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = |\alpha_1| |\alpha_2| \cos \varphi = \sqrt{a_{11} a_{22}} \cos \varphi = 0$$

beziehungsweise der Winkel zwischen den Koordinatenlinien ist  $\varphi = 90^\circ$ . Wenn auch noch  $b_{12} = 0$ , so ist aus (4.71) als erste Lösung  $\chi_1 = 0$  ablesbar. Eine zweite Lösung erhält man für  $\chi \neq 0$ , wenn man durch  $\chi^2$  dividiert

$$0 + \frac{1}{\chi}(b_{11}a_{22} - a_{11}b_{22}) + \frac{1}{\chi^2} \cdot 0 = 0.$$

Sie lautet  $\chi_2 = 0$ . Die orthogonalen Koordinaten sind also gleichzeitig Krümmungslinien, wenn bei ihnen  $b_{12} = 0$ . Das ist z.B. bei der Rotationsschale der Fall, sofern Längenzirkel und Breitenkreise als  $\Theta^\alpha$  herangezogen werden.

Aus (4.70) war ersichtlich, daß zu jedem gewählten  $\bar{L}/R$  (Sonderfall Kugel ausgeschlossen) zwei Richtungen angebar sind (Bild 4.8). Das Ordnen der Beziehungen (4.70) nach  $\chi(\bar{L}/R)$  liefert die quadratische Gleichung

$$\chi^2 \left( \frac{\bar{L}}{R} a_{11} - b_{11} \right) + 2\chi \left( \frac{\bar{L}}{R} a_{12} - b_{12} \right) + \left( \frac{\bar{L}}{R} a_{22} - b_{22} \right) = 0 \quad (4.73)$$

und die Wurzeln

$$\frac{\bar{\chi}_1}{\bar{\chi}_2} = \frac{2 \left( \frac{\bar{L}}{R} a_{12} - b_{12} \right) \pm \sqrt{4 \left( \frac{\bar{L}}{R} a_{12} - b_{12} \right)^2 - 4 \left( \frac{\bar{L}}{R} a_{11} - b_{11} \right) \left( \frac{\bar{L}}{R} a_{22} - b_{22} \right)}}{2 \left( \frac{\bar{L}}{R} a_{11} - b_{11} \right)}. \quad (4.74)$$

Für die Extremwerte  $\bar{L}/R_1$  bzw.  $\bar{L}/R_2$  ist  $\bar{\chi}_{1,1} = \bar{\chi}_{1,2}$  bzw.  $\bar{\chi}_{2,1} = \bar{\chi}_{2,2}$ , so daß die Wurzel in (4.74) verschwinden muß. Das ergibt eine quadratische Gleichung für die Hauptkrümmungen

$$\frac{\bar{L}^2}{R^2} - \frac{\bar{L}}{R} 2H + K = 0 \quad (4.75a)$$

mit den schon zuvor verwendeten Krümmungen (vgl. Glg. (4.65))

$$H = \frac{1}{2} \frac{b_{11}a_{22} - 2b_{12}a_{12} + b_{22}a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{1}{2} \frac{b_{11}a_{22} - 2b_{12}a_{12} + b_{22}a_{11}}{a} \quad (4.76a)$$

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{b}{a} .$$

Nach dem Vietaschen Satz sind aus Gleichung (4.75 a) zwei Beziehungen für die Hauptkrümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$  direkt ablesbar

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{L}}{R_1} + \frac{\bar{L}}{R_2} \right) , \quad K = \frac{\bar{L}}{R_1} \cdot \frac{\bar{L}}{R_2} \quad (4.76b)$$

bzw. 
$$\frac{\bar{L}}{R_{\min, \max}} = |H| \pm \left| \sqrt{H^2 - K} \right| . \quad (4.75b)$$

Die übliche Art des Einsetzens der Extremstellen  $\chi_1, \chi_2$  in die Funktion (4.73) zur Erlangung der Extremwerte  $\bar{L}/R_1$  und  $\bar{L}/R_2$  dürfte sehr viel unständlicher sein als der zuvor beschriebene Weg.

Sind die Parameterlinien  $\Theta^\alpha = \text{const.}$  gleich den (Haupt-)Krümmungslinien (Kegel, Zylinder), so gilt vereinfacht entsprechend (4.69)

$$\frac{\bar{L}}{R_1} = \frac{b_{11}}{a_{11}} , \quad \frac{\bar{L}}{R_2} = \frac{b_{22}}{a_{22}} .$$

Da nicht nur die Grundformen der Flächentheorie von Wichtigkeit sind, sondern auch die Größe des Flächenelementes für den Werkstoffverbrauch, so soll ihre Berechnungsformel ebenfalls angegeben werden. Eingeschlossen durch die infinitesimalen Längen  $d\Theta^1$  und  $d\Theta^2$  ist die Fläche des entstehenden Parallelogramms auf der Mittelfläche

$$\begin{aligned} dF &= |d\bar{u} \times d\bar{u}| = \bar{L}^2 |d\bar{u} \times d\bar{u}| \\ &= \bar{L}^2 \left| \frac{d\bar{u}}{d\Theta^1} d\Theta^1 \times \frac{d\bar{u}}{d\Theta^2} d\Theta^2 \right| = \bar{L}^2 |\alpha_1 \times \alpha_2| d\Theta^1 d\Theta^2 \\ &= \bar{L}^2 \sqrt{a_{11}a_{22}} \sin \varphi d\Theta^1 d\Theta^2 . \end{aligned}$$

Nun ist aber  $\cos \varphi = a_{12} / \sqrt{a_{11}a_{22}}$  und gemäß goniometrischer Umrechnung

$$\sin^2 \varphi = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}a_{22}} = \frac{a}{a_{11}a_{22}} .$$

Damit wird schließlich

$$dF = \bar{L}^2 \sqrt{a} d\Theta^1 d\Theta^2 \stackrel{!}{=} \bar{L}^2 \epsilon_{12} d\Theta^1 d\Theta^2 . \quad (4.77)$$

### 4.3.3 Verzerrungstensor unter Berücksichtigung verschiedener Schalentheorien

Nachdem die Geometrie der Schale bekannt ist, muß der Verzerrungstensor in Abhängigkeit von der Flächenmetrik aufgeschrieben werden. Beim dreidimensionalen Körper lautete der Verzerrungstensor (Glg.(4.18) und (4.22))

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} (\vartheta_{ij} \cdot \ddot{u}_{,i} + \vartheta_{ji} \cdot \ddot{u}_{,j}) = \frac{1}{2} (u_{i|j} + u_{j|i}) . \quad (4.78)$$

Bei der Schale gehen die Gleichungen unter Verwendung von  $\mu_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} - \lambda \theta b_{\alpha}^{\beta}$  und  $\vartheta_{\alpha} = \bar{L} \mu_{\alpha}^{\beta} \alpha_{\beta}$ , in

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= \frac{\bar{L}^2}{2} (\mu_{\alpha}^{\gamma} \alpha_{\gamma} \cdot \ddot{u}_{, \beta} + \mu_{\beta}^{\gamma} \alpha_{\gamma} \cdot \ddot{u}_{, \alpha}) = \frac{\bar{L}^2}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) \\ \tau_{\alpha 3} &= \frac{\bar{L}^2}{2} (\mu_{\alpha}^{\gamma} \alpha_{\gamma} \cdot \ddot{u}_{, 3} + \lambda \alpha_{\beta} \cdot \ddot{u}_{, \alpha}) \\ \tau_{33} &= \frac{\bar{L}^2}{2} (2\lambda \alpha_{\beta} \cdot \ddot{u}_{, 3}) . \end{aligned} \quad (4.79)$$

über.

Das Aussehen dieses Verzerrungstensors (4.79) hängt davon ab, welcher Art der Verschiebungsvektor ist. Zerna benutzt bei der Herleitung der Theorie elastischer Schalen (unter Verwendung des Approximationssatzes von Weierstraß) eine Potenzreihenentwicklung (nach der ausgezeichneten Koordinate  $\Theta$ ) all der Tensorkomponenten, die Funktionen von  $\Theta$  sind. Damit wird die Allgemeinheit der möglichen Lösungen des Elastizitätsproblems noch nicht eingeschränkt. Erst beim Übergang zur sogenannten Ersten Approximation werden unter Annahme der Kirchhoffschen Normalenhypothese sämtliche Reihendarstellungen der Verzerrungs- und später auch der Spannungsgrößen bezüglich der Schendicke nach dem linearen Glied abgebrochen. Außerdem werden Produkte des die Schalenschlankheit charakterisierenden Parameters  $\lambda$  mit Verschiebungsgliedern als Größen kleiner Ordnung angesehen.

Die Potenzreihenentwicklung der Verschiebungen lautet für verschiedene Theorien (zur Erklärung die Bilder 4.9 und 4.10)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{L}} \ddot{u} &= \varpi(\Theta^{\alpha}) + \lambda \Theta \varpi(\Theta^{\alpha}) + \varpi(\Theta^{\alpha}, \Theta) \\ &= (\nu^{\alpha} \alpha_{\alpha} + \omega^3 \alpha_3) + (\lambda \Theta \omega^{\alpha} \alpha_{\alpha}) + (\varpi) \end{aligned} \quad (4.80)$$

mit  $\varpi = [(\lambda \Theta) \hat{W}^{\alpha} + (\lambda \Theta)^2 \hat{W}^{\alpha} + \dots] \alpha_{\alpha} + [(\lambda \Theta) \hat{W}^3 + (\lambda \Theta)^2 \hat{W}^3 + \dots] \alpha_3$  Reihenentwicklung ZERNA (4.81)

$$= \lambda \Theta \hat{W}^{\alpha} \alpha_{\alpha} + \lambda \Theta \hat{W}^3 \alpha_3 = W^{\alpha} \alpha_{\alpha} + W^3 \alpha_3 \quad \dots \dots \dots 1. \text{ Approximation ZERNA}$$

$$= 0 \quad \dots \dots \dots \text{ Technische Schalentheorie}$$

In (4.80) stellt  $\bar{L}\varpi$  den Verschiebungsvektor eines Punktes P der Mittelfläche dar. Weiter bezeichnet in der vorstehenden Gleichung  $\varpi$  die

Änderung des Normaleneinheitsvektors  $\alpha_3$  infolge der Verformung. Da  $\alpha_3$  seine Länge beibehält und seine Richtungsänderung als sehr klein angesehen werden kann, steht  $\omega$  bis auf Größen 2. Ordnung senkrecht zu  $\alpha_3$  und ist deshalb nur von den  $\Theta^{\alpha}$  abhängig. Der Vektor  $\bar{L}\omega$  gibt an, welchen neuen Abstand zur Schalenmitte ein Punkt A der Schalenfläche nach der Verformung hat.

In den Gleichungen (4.79) sind die Ableitungen des Gesamtverschiebungsvektors einzusetzen. Es sind dies im einzelnen

$$\frac{1}{L} \tilde{w}_{,\alpha} = \omega_{,\alpha} + \lambda \Theta \omega_{,\alpha} + \eta_{,\alpha} \quad (4.82)$$

$$\frac{1}{L} \tilde{w}_{,3} = \omega_{,3} + \lambda \omega + \lambda \Theta \omega_{,3} + \eta_{,3} = \lambda \omega + \eta_{,3} ,$$

da nur die Größe  $\eta$  von  $\Theta$  abhängt.

Statt Gleichung (4.79) wird meistens eine Form verwendet, die nach Einsetzen von  $\mu_{\alpha}^{\beta}$  und  $\tilde{w}$  entsteht (Zerna)

$$T_{\alpha\beta} = \bar{L}^2 \left( \alpha_{\alpha\beta} + \lambda \Theta \underbrace{\omega_{\alpha\beta}}_{T.S.} + \lambda^2 \Theta^2 \underbrace{\beta_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta}}_{1. \text{ Appr.}} \right) , \quad (4.83a)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \alpha_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} ( \alpha_{\alpha} \cdot \omega_{,\beta} + \alpha_{\beta} \cdot \omega_{,\alpha} ) \\ \omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} ( \alpha_{\alpha} \cdot \omega_{,\beta} + \alpha_{\beta} \cdot \omega_{,\alpha} - b_{\alpha}^{\gamma} \alpha_{\gamma} \cdot \omega_{,\beta} - b_{\beta}^{\gamma} \alpha_{\gamma} \cdot \omega_{,\alpha} ) \\ \beta_{\alpha\beta} &= \frac{-1}{2} ( b_{\alpha}^{\gamma} \alpha_{\gamma} \cdot \omega_{,\beta} + b_{\beta}^{\gamma} \alpha_{\gamma} \cdot \omega_{,\alpha} ) \\ \eta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} ( \alpha_{\alpha} \cdot \eta_{,\beta} + \alpha_{\beta} \cdot \eta_{,\alpha} - \lambda \Theta [ b_{\alpha}^{\gamma} \alpha_{\gamma} \cdot \eta_{,\beta} + b_{\beta}^{\gamma} \alpha_{\gamma} \cdot \eta_{,\alpha} ] ) . \end{aligned} \quad (4.84)$$

In (4.82) sind die Ableitungen  $\omega_{,\beta}$ ,  $\omega_{,\beta}$ ,  $\eta_{,\beta}$  und  $\omega_{,3}$  unbekannt. Sie sollen im Rahmen der 1. Approximation kurz hergeleitet werden.

Entsprechend den Ableitungsgleichungen von Weingarten, wenn außerdem  $\omega = \sqrt{r} \alpha_r + w^3 \alpha_3$ , (4.17) und (4.61) verwendet und Indizes ausgetauscht werden, ergeben sich als Ableitungen

$$\begin{aligned} \omega_{,\beta} &= v^{\alpha}_{,\beta} \alpha_{\alpha} + v^{\alpha} \alpha_{\alpha,\beta} + w^3_{,\beta} \alpha_3 + w^3 \alpha_{3,\beta} \\ &= v^{\alpha}_{,\beta} \alpha_{\alpha} + v^r ( \Gamma^{\alpha}_{r\beta} \alpha_{\alpha} + b_{r\beta} \alpha_3 ) + w^3_{,\beta} \alpha_3 - w^3 b_{\beta}^{\alpha} \alpha_{\alpha} \\ &= ( v^{\alpha}_{,\beta} - w^3 b_{\beta}^{\alpha} ) \alpha_{\alpha} + ( v^r b_{r\beta} + w^3_{,\beta} ) \alpha_3 \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\omega_{,\beta} = w^{\alpha}_{,\beta} \alpha_{\alpha} + w^r b_{r\beta} \alpha_3$$

$$\eta_{,\beta} = ( W^{\alpha}_{,\beta} - W^3 b_{\beta}^{\alpha} ) \alpha_{\alpha} + ( W^r b_{r\beta} + W^3_{,\beta} ) \alpha_3$$

$$\eta_{,3} = W^{\alpha}_{,3} \alpha_{\alpha} + W^3_{,3} \alpha_3 .$$

Bis hierher ist der Verzerrungstensor unter Verwendung von (4.85) exakt im Sinne der klassischen Elastizitätstheorie, der Theorie



infinitesimaler Verformungen, darstellbar. Eine Beschränkung auf lineare Glieder in den  $\lambda\Theta$  der Glg. (4.81) führt zur 1. Approximation von Zerna und einem einfachen Ausdruck  $\eta_{\alpha\beta}$ . Dieser Term stellt dasjenige Glied dar, das den Einfluß der Schubverzerrung und anderer Verzerrungen in Richtung der Schalennormalen berücksichtigt. Die Beschränkung auf die Verschiebungsgrößen  $v^\alpha, w^3$  und  $w^\alpha$  führt zur Technischen Biegetheorie der Schalen.

In letzterem Fall kann das nach dem quadratischen Glied  $(\lambda\Theta)^2$  stehende  $\beta_{\alpha\beta}$  vernachlässigt werden, während  $\eta_{\alpha\beta}$  verschwindet. Nach Ausführung des skalaren Produktes in (4.84) und Senken von hochgestellten Indizes verbleiben so

$$\begin{aligned}
 2 \alpha_{\alpha\beta} &= (v^\sigma|_\beta - w^3 b_\beta^\sigma) a_{\alpha\sigma} + (v^\sigma|_\alpha - w^3 b_\alpha^\sigma) a_{\beta\sigma} \\
 &= v_\alpha|_\beta + v_\beta|_\alpha - 2 w^3 b_{\alpha\beta} \quad \begin{array}{l} \text{Lovesche Näherung in} \\ \text{Reißnerscher Fassung} \\ \text{T.S.} \end{array} \quad (4.86) \\
 2 \omega_{\alpha\beta} &= w_\alpha|_\beta + w_\beta|_\alpha - b_\alpha^3 (v^\sigma|_\beta - w^3 b_\beta^\sigma) - b_\beta^3 (v^\sigma|_\alpha - w^3 b_\alpha^\sigma) a_{\sigma\beta} \\
 &= w_\alpha|_\beta + w_\beta|_\alpha - b_\alpha^3 v_\sigma|_\beta - b_\beta^3 v_\sigma|_\alpha + 2 b_\alpha^3 b_{\beta\sigma} w^3 \\
 &\quad \text{T.S.} \\
 2 \beta_{\alpha\beta} &= - (b_\alpha^3 w_\sigma|_\beta + b_\beta^3 w_\sigma|_\alpha)
 \end{aligned}$$

mit

$$w_3 = w^3 a_{33} = w^3.$$

Die Annahme der Normalenhypothese ermöglicht es, die Verschiebungsableitungen  $w_{,\alpha}^3$  mit den Verschiebungen  $v^\alpha, w^3$  zu verbinden. Eine anschauliche Herleitung des Zusammenhanges sieht wie folgt aus: Man führt eine Addition der Einheitsvektoren mit den entsprechenden Verschiebungsvektoren bzw. Verschiebungsvektoränderungen durch und bildet das Skalarprodukt, welches natürlich verschwinden muß, weil die Größen aufeinander senkrecht stehen

$$(a_3 + w\theta) \cdot (a_\alpha + w_{,\alpha}) = a_3 \cdot a_\alpha + a_3 \cdot w_{,\alpha} + w\theta \cdot a_\alpha + w\theta \cdot w_{,\alpha} = 0$$

Da ferner

$$\begin{aligned}
 w\theta \cdot a_\alpha &= w^\beta a_\beta \cdot a_\alpha = w^\beta a_{\beta\alpha} = w_\alpha \\
 &= - a_3 \cdot w_{,\alpha} = a_3 \cdot (v^\beta b_{\beta\alpha} + w^3_{,\alpha}) a_3 \\
 &= - (v^\beta b_{\beta\alpha} + w^3_{,\alpha}) a_{33} = - (v^\beta b_{\beta\alpha} + w^3_{,\alpha})
 \end{aligned}$$

gilt schließlich als Verträglichkeitsbedingung

$$w_\alpha = - (w^3_{,\alpha} + b_{\beta\alpha} v^\beta) = - (w_{3,\alpha} + b_\alpha^\beta v_\beta) \quad (4.87)$$

mit dem physikalischen Inhalt, daß die Normale auch nach der Verformung eine Normale bleibt.

Nun sind nur noch die unbekanntenen Verzerrungen  $\gamma_{\alpha 3}$  und  $\gamma_{33}$  herzuleiten.

Sie ergeben sich bei linearer Theorie nach Ausführen des Skalarproduktes und Einsetzen der Ableitungsgleichungen zu

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha 3} &= \frac{\bar{L}^2}{2} [\mu_{\alpha}^3 \alpha_3 \cdot (\lambda w_0 + \mathcal{M}_{1,3}) + \lambda \alpha_3 \cdot (w_{1,\alpha} + \lambda \Theta w_{0,\alpha} + \mathcal{M}_{1,\alpha})] \\ &= \frac{\bar{L}^2}{2} [\mu_{\alpha}^3 \alpha_3 \cdot \mathcal{M}_{1,3} + \lambda \alpha_3 \cdot \mathcal{M}_{1,\alpha} + \lambda (w_{\alpha} - \lambda \Theta b_{\alpha}^{\beta} w_{\beta} + w_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\beta} v_{\beta})] \\ &= \frac{\bar{L}^2}{2} [\mu_{\alpha}^3 W_{3,3} + \lambda W^T b_{T\alpha} + W_{3,\alpha}] \end{aligned} \quad (4.83b)$$

1. Approximation  
von Zerna

$$\tau_{33} = \frac{\bar{L}^2}{2} [2 \alpha_3 \cdot (\lambda w_0 + \mathcal{M}_{1,3})] = \frac{\bar{L}^2}{2} 2 W_{3,3} \lambda. \quad (4.83c)$$

Damit sind die Beziehungen der 1. Approximation von Zerna gefunden. Ein Verschwinden der  $\tau_{\alpha 3}$ ,  $\tau_{33}$  hängt entsprechend der Definition von  $\mathcal{M}$  nur von  $w_0$  ab. Da im weiteren Teil des Buches nur noch die Technische Schalentheorie,  $w_0 = 0$  beschrieben werden soll, werden ab jetzt  $\tau_{\alpha 3}$  und  $\tau_{33}$  Null gesetzt.

#### 4.3.4 Gleichgewichtsbedingungen in den Spannungen

Entsprechend den Gleichungen (4.28 und 4.31) heißt das Gleichgewicht an einem herausgeschnittenem Volumenelement für die bezogenen Schnittkräfte bzw. Spannungsvektoren

$$\underline{q}^i_{,i} + p \sqrt{q} = \underline{q}^{\alpha}_{, \alpha} + \underline{q}^3_{, 3} + p \sqrt{q} = 0 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (4.88)$$

Für die bezogenen Schnittkräfte gilt entsprechend (4.27) außerdem

$$\begin{aligned} \frac{\underline{q}^i}{\sqrt{q}} &= q^i \sqrt{q^{ii}} = \tau^{ii} q_i = \tau^{i\alpha} q_{\alpha} + \tau^{i3} q_3 \\ &= \bar{L} (\mu_{\alpha}^i \tau^{i\alpha} \alpha_3 + \lambda \tau^{i3} \alpha_3) \end{aligned} \quad ,$$

$$\underline{q}^{\alpha} = \sqrt{q} \bar{L} (\mu_{\alpha}^{\beta} \tau^{\alpha\beta} \alpha_3 + \lambda \tau^{\alpha 3} \alpha_3) \quad (4.89)$$

$$\underline{q}^3 = \sqrt{q} \bar{L} (\mu_{\alpha}^3 \tau^{3\alpha} \alpha_3 + \lambda \tau^{33} \alpha_3) \quad .$$

Damit liegen die partiellen Ableitungen in (4.88) fest, wenn  $\sqrt{q} = h \sqrt{a}$  gesetzt wird, als

$$\begin{aligned} \underline{q}^{\alpha}_{, \alpha} &= \bar{L} \left\{ (\sqrt{a})_{, \alpha} [h \mu_{\alpha}^{\beta} \tau^{\alpha\beta} \alpha_3 + h \lambda \tau^{\alpha 3} \alpha_3] + \sqrt{a} [(h \mu_{\alpha}^{\beta} \tau^{\alpha\beta})_{, \alpha} \alpha_3 + (h \lambda \tau^{\alpha 3})_{, \alpha} \alpha_3] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{a} [(h \mu_{\alpha}^{\beta} \tau^{\alpha\beta}) \alpha_{3, \alpha} + (h \lambda \tau^{\alpha 3}) \alpha_{3, \alpha}] \right\} \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \underline{q}^3_{, 3} &= \bar{L} \left\{ (\sqrt{a})_{, 3} [h \mu_{\alpha}^3 \tau^{3\alpha} \alpha_3 + h \lambda \tau^{33} \alpha_3] + \sqrt{a} [(h \mu_{\alpha}^3 \tau^{3\alpha})_{, 3} \alpha_3 + (h \lambda \tau^{33})_{, 3} \alpha_3] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{a} [(h \mu_{\alpha}^3 \tau^{3\alpha}) \alpha_{3, 3} + (h \lambda \tau^{33}) \alpha_{3, 3}] \right\} \quad . \end{aligned}$$

In diese Gleichungen können die folgenden Vereinfachungen eingebracht werden

$$(\sqrt{a})_{,\alpha} = \sqrt{a} \Gamma_{i\alpha}^i = \sqrt{a} \Gamma_{\alpha}^{\alpha} \quad , \quad (\sqrt{a})_{,3} = 0 \quad ,$$

$$\alpha_{\rho,3} = \alpha_{3,3} = 0 \quad , \quad \alpha_{\rho,\alpha} = \Gamma_{\rho\alpha}^{\epsilon} \alpha_{\epsilon} + b_{\rho\alpha} \alpha_3 \quad .$$

Nach dem Einsetzen dieser Größen in (4.90) und Austauschen von Summationsindizes liefern die Gleichgewichtsbedingungen (4.88) zwei Komponentengleichungen der Form

$$\alpha_{\rho} \left[ \bar{L} \sqrt{a} \left\{ \Gamma_{\rho\alpha}^{\alpha} (\hbar \mu_{\rho}^{\alpha} \tau^{\alpha\beta}) + (\hbar \mu_{\rho}^{\alpha} \tau^{\alpha\beta})_{,\alpha} + \Gamma_{\epsilon\alpha}^{\alpha} (\hbar \mu_{\rho}^{\epsilon} \tau^{\alpha\beta}) - \hbar \lambda \tau^{\alpha 3} b_{\alpha}^{\epsilon} + (\hbar \mu_{\rho}^{\alpha} \tau^{\alpha\beta})_{,3} + p^{\rho} \hbar \sqrt{a} \right\} = 0 \right.$$

$$\left. \alpha_3 \left[ \bar{L} \sqrt{a} \left\{ \Gamma_{\rho\alpha}^{\alpha} (\hbar \lambda \tau^{\alpha 3}) + (\hbar \lambda \tau^{\alpha 3})_{,\alpha} + b_{\epsilon\alpha} \hbar \mu_{\rho}^{\epsilon} \tau^{\alpha\beta} + (\hbar \lambda \tau^{\alpha 3})_{,3} + p^{\rho} \hbar \sqrt{a} \right\} = 0 \right. \right.$$

Das liefert aber unter Verwendung der kovarianten Ableitungen für die Komponentendarstellung (Zerna, 1967) in Glg. (4.30 a)

$$\bar{L} \cdot \left\{ (\hbar \mu_{\rho}^{\alpha} \tau^{\alpha\beta})_{,\alpha} - (\hbar \lambda \tau^{\alpha 3})_{,3} + (\hbar \mu_{\rho}^{\alpha} \tau^{\alpha\beta})_{,3} \right\} + p^{\rho} \hbar = 0 \quad (4.91)$$

$$\bar{L} \cdot \left\{ (\hbar \lambda \tau^{\alpha 3})_{,\alpha} + (\hbar \mu_{\rho}^{\epsilon} \tau^{\alpha\beta})_{,\epsilon} + (\hbar \lambda \tau^{\alpha 3})_{,3} \right\} + p^{\rho} \hbar = 0 \quad .$$

#### 4.3.5 Gleichgewichtsbedingungen in den Schnittgrößen unter Berücksichtigung verschiedener Schalentheorien

Das Besondere einer Schalentheorie ist, daß man durch Integration der Spannungen über der Schalendicke ein dreidimensionales Problem auf ein zweidimensionales reduziert. Dabei können entweder -wie in der Balkentheorie- die Schnittgrößen als selbständige Größen für sich positiv definiert werden (Green - Zerna) oder -mathematisch konsequenter- über die schon definierten, positiven Spannungen festgelegt werden. Im letzteren Fall stimmen die Vorzeichen der physikalischen und der tensoriellen Schnittgrößenkomponenten überein. Bei der Indizierung erhalten alle Schnittkräfte und Schnittmomente denselben Index wie die Spannungen. Bei den Querkräften verschwindet der der Integration zugehörige Index 3.

Es lassen sich folgende Beziehungen zwischen den Komponenten des Spannungstensors  $\tau^{ik}$  und den tensoriellen Komponenten der Schnittgrößen anschreiben (vgl. Zerna und Bild 4.11)

$$n^{\alpha\rho} = \int_{-1/2}^{1/2} (\hbar \mu_{\rho}^{\alpha} \tau^{\alpha\beta}) d\Theta^3 \quad , \quad q^{\alpha} = \lambda \int_{-1/2}^{1/2} (\hbar \tau^{\alpha 3}) d\Theta^3 \quad ,$$

$$m^{\alpha\rho} = \lambda \int_{-1/2}^{1/2} (\hbar \mu_{\rho}^{\alpha} \tau^{\alpha\beta}) \Theta^3 d\Theta^3 \quad (4.92)$$

Darin sind die  $n^{11}, n^{22}$  Normalkräfte, die  $n^{12}$  und  $n^{21}$  Schubkräfte und die  $q^1, q^2$  Querschnittskräfte der Schale. Die  $m^{11}$  und  $m^{22}$  sind Biegemomente, während die  $m^{12}$  und  $m^{21}$  Torsionsmomente darstellen. Bei der Integration ist darauf zu achten, daß die  $\lambda, b_{\rho}^i, b_{\rho\rho}$  in den  $\mu_{\rho}^i$  unabhängig von  $\Theta^3$  (der Einfachheit halber im allgemeinen  $\Theta$  genannt) sind.

Den Zusammenhang zwischen den auf die Schalenmittelfläche bezogenen Lastgrößen und den Belastungen der Schalenlaibungen stellen

$$\underline{p}^i = [\mu_{\rho}^i \tau^{3\rho}]_{\Theta=-1/2}^{\Theta=1/2}, \quad \underline{p}^3 = \lambda [\mu \tau^{33}]_{\Theta=-1/2}^{\Theta=1/2}, \quad c^i = \lambda [\mu \mu_{\rho}^i \tau^{3\rho}]_{\Theta=-1/2}^{\Theta=1/2} \quad (4.93)$$

dar.

Außerdem werden nach Zerna als Abkürzungen ein Vektor  $l$  und ein Skalar  $T$  in dieser bisher noch exakten Theorie elastischer Schalen (Glg. 4.91) benutzt. Die erste der beiden Größen hängt mit der Verteilung der Schubspannungen über dem Querschnitt zusammen. Beide Größen treten in der technischen Schalentheorie nicht auf. Ihre Definition lautet

$$l^{\alpha} = \lambda^2 \int_{-1/2}^{1/2} \mu \tau^{\alpha 3} \Theta d\Theta, \quad T = \lambda^2 \int_{-1/2}^{1/2} \mu \tau^{33} d\Theta. \quad (4.94)$$

Bei der partiellen Integration der Gleichgewichtsbedingungen wird auch die Größe

$$\bar{p} = \lambda^2 [\mu \tau^{33}]_{\Theta=-1/2}^{\Theta=1/2} \quad (4.95)$$

auftreten. Sie stellt eine weitere Randbedingung dar und hängt mit den äußeren Lasten auf den Schalenlaibungen zusammen; sie kann mit (4.93) auf  $\underline{p}^3$  bezogen werden

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \lambda^2 \left( \frac{1}{2} [\mu \tau^{33}]_{\Theta=1/2} - \frac{1}{2} [\mu \tau^{33}]_{\Theta=-1/2} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2} \left( \lambda [\mu \tau^{33}]_{\Theta=1/2} - \lambda [\mu \tau^{33}]_{\Theta=-1/2} \right) = \frac{\lambda}{2} \underline{p}^3. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Das bedeutet im Rahmen der vorliegenden Theorie, daß es unerheblich ist, wie sich die Belastung auf die Schalenlaibungen verteilt. Unter Verwendung der vorgenannten Schnittgrößen und Belastungsgrößen führt die Integration über

$$\begin{aligned} \bar{L} \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ (\mu_{\rho}^i \mu \tau^{\alpha\rho})|_{\alpha} - \lambda \mu \tau^{\alpha 3} b_{\alpha}^i + (\mu_{\rho}^i \mu \tau^{\alpha\rho})_{,3} \right\} d\Theta + \int_{-1/2}^{1/2} \mu p^i d\Theta &= 0 \\ \bar{L} \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ (\lambda \mu \tau^{\alpha 3})|_{\alpha} + \mu_{\rho}^i \mu \tau^{\alpha\rho} b_{\alpha}^i + (\lambda \mu \tau^{\alpha 3})_{,3} \right\} d\Theta + \int_{-1/2}^{1/2} \mu p^3 d\Theta &= 0 \end{aligned}$$

zu

$$\bar{L} \left\{ n^{\alpha\alpha} |_{\alpha} - b_{\alpha}^{\alpha} q^{\alpha} + \underline{p}^{\alpha} \right\} + \int_{-1/2}^{1/2} h p^{\alpha} d\Theta = 0 \quad (4.97a)$$

$$\bar{L} \left\{ q^{\alpha} |_{\alpha} + n^{\alpha\alpha} b_{\alpha\alpha} + \underline{p}^{\alpha} \right\} + \int_{-1/2}^{1/2} h p^{\alpha} d\Theta = 0 .$$

Wenn die beiden Gleichgewichtsgleichungen (4.86) vorher mit  $\lambda \Theta$  multipliziert und dann über die Wanddicke integriert wird, so ergibt sich noch ein zweiter Satz von Schnittgrößengleichungen

$$\bar{L} \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ (\mu_{\alpha}^{\alpha} h \tau^{\alpha\alpha}) |_{\alpha} - \lambda h \tau^{\alpha\alpha} b_{\alpha}^{\alpha} + \mu_{\alpha}^{\alpha} h \tau^{\alpha\alpha} \right\} \lambda \Theta d\Theta + \int_{-1/2}^{1/2} p^{\alpha} h \lambda \Theta d\Theta = 0$$

$$\bar{L} \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ (\lambda h \tau^{\alpha\alpha}) |_{\alpha} + \mu_{\alpha}^{\alpha} h \tau^{\alpha\alpha} b_{\alpha\alpha} + \lambda h \tau^{\alpha\alpha} \right\} \lambda \Theta d\Theta + \int_{-1/2}^{1/2} p^{\alpha} h \lambda \Theta d\Theta = 0$$

bzw. (Zerna), S. 58)

$$\bar{L} \left\{ m^{\alpha\alpha} |_{\alpha} - q^{\alpha} + c^{\alpha} \right\} + \lambda \int_{-1/2}^{1/2} p^{\alpha} h \Theta d\Theta = 0 \quad (4.97b)$$

$$\bar{L} \left\{ l^{\alpha} |_{\alpha} + m^{\alpha\alpha} b_{\alpha\alpha} + \bar{p} - T \right\} + \lambda \int_{-1/2}^{1/2} p^{\alpha} h \Theta d\Theta = 0 ,$$

wenn als partielle Integration über  $\Theta$ , verbunden mit den Beziehungen  $\tau^{\alpha\alpha} = \tau^{\alpha\alpha}$  und  $\mu_{\alpha}^{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\alpha} - \lambda \Theta b_{\alpha}^{\alpha}$

$$\begin{aligned} \lambda \int_{-1/2}^{1/2} (h \mu_{\alpha}^{\alpha} \tau^{\alpha\alpha})_{,3} \Theta d\Theta &= \lambda [h \Theta \mu_{\alpha}^{\alpha} \tau^{\alpha\alpha}]_{-1/2}^{1/2} - \lambda \int_{-1/2}^{1/2} \mu_{\alpha}^{\alpha} h \tau^{\alpha\alpha} d\Theta \\ &= c^{\alpha} - \lambda \int_{-1/2}^{1/2} h \tau^{\alpha\alpha} d\Theta \\ &= c^{\alpha} - q^{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 \int_{-1/2}^{1/2} (h \tau^{\alpha\alpha})_{,3} \Theta d\Theta &= \lambda^2 [h \Theta \tau^{\alpha\alpha}]_{-1/2}^{1/2} - \lambda^2 \int_{-1/2}^{1/2} h \tau^{\alpha\alpha} d\Theta \\ &= \bar{p} - T = \frac{\lambda}{2} \underline{p}^{\alpha} - T . \end{aligned}$$

verwendet werden.

Durch Integration sind die Gleichungen (4.91) zweidimensional geworden, also nur noch von  $\Theta^1$  und  $\Theta^2$  abhängig. Dabei stellen die ersten drei Gleichungen in (4.97) die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben des Schalenelementes dar. Die vierte Gleichung ist rein formal durch den Integrationsprozess dazugekommen. Sie besitzt keine anschauliche Deutung und stellt nur die Definitionsgleichung für die neuen Schnittgrößen  $l^{\alpha}$  und  $T$  dar. Die in der üblichen Schalentheorie häufig abgeleitete Gleichgewichtsbedingung gegen Verdrehen um die Schalennormale, die nur die Symmetrie des Spannungstensors ausdrückt und keinerlei neue Aussage liefert, tritt also nicht auf.

Nach [Zerna, 1967] sind alle vorgenannten Schnittgrößengleichungen exakt im Sinne der klassischen Elastizitätstheorie. Allerdings werden sich Schwierigkeiten in Abschnitt 5 ergeben, weil in einer der Spannungs- Verzerrungs- Bedingungen einige Größen  $\lambda \Theta$  und  $(\lambda \Theta)^2$  verbleiben

werden, obwohl sonst die Koordinate  $\Theta$  eliminiert ist. Die selbe Beziehung deutet aber auch an, daß Näherungsansätze für die Spannungsgrößen  $\tau^{ik}$  mit Potenzreihen möglich sind, und zwar derart, daß die Spannungen nur Funktionen von  $\Theta^\alpha$  nicht aber von  $\Theta$  sind. Mit der abkürzenden Bezeichnung  $\sigma$  sehen die Potenzreihen wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 h \mu_\alpha^\alpha \tau^{9\beta} &= \sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{(0)\alpha\beta} + (\lambda\Theta) \sigma^{(1)\alpha\beta} + \dots + (\lambda\Theta)^n \sigma^{(n)\alpha\beta} \\
 h \tau^{\alpha 3} &= \sigma^{\alpha 3} = \sigma^{(0)\alpha 3} + (\lambda\Theta) \sigma^{(1)\alpha 3} + \dots + (\lambda\Theta)^n \sigma^{(n)\alpha 3} \\
 h \mu_\alpha^\beta \tau^{3\alpha} &= \sigma^{3\beta} = \sigma^{(0)3\beta} + (\lambda\Theta) \sigma^{(1)3\beta} + \dots + (\lambda\Theta)^n \sigma^{(n)3\beta} \\
 h \tau^{33} &= \sigma^{33} = \sigma^{(0)33} + (\lambda\Theta) \sigma^{(1)33} + \dots + (\lambda\Theta)^n \sigma^{(n)33}
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

Für hinreichend dünne Schalen ( $\lambda \ll 1$ ) sind diese Potenzreihen konvergent. Allgemein wird durch sie die Spannungsverteilung über der Schalendicke dargestellt. Die Anzahl der beibehaltenen Glieder bestimmt die Approximationsstufe der Verteilung.

Die Approximationsrechnungen werden wie folgt durchgeführt: Man benutzt für die Gleichgewichtsbedingungen ohne Volumenkräfte die Differentialoperatoren

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \sigma^{\alpha\beta} |_\alpha - \lambda \sigma^{\alpha 3} b_\alpha^\beta + \sigma^{3\beta}{}_{,3} = 0 \\
 D_2 &= \lambda \sigma^{\alpha 3} |_\alpha + \sigma^{\varepsilon\alpha} b_{\varepsilon\alpha} + \lambda \sigma^{33}{}_{,3} = 0.
 \end{aligned}$$

Da die Potenzreihenapproximationen die Gleichgewichtsbedingungen nicht exakt erfüllen, müssen die Fehlerquadrate der Näherungsoperatoren  $\tilde{D}$  über der Schalendicke zum Minimum gemacht werden

$$J_1 = \int_{-1/2}^{1/2} (\tilde{D}_1)^2 d\Theta = \text{Min.}, \quad J_2 = \int_{-1/2}^{1/2} (\tilde{D}_2)^2 d\Theta = \text{Min.}$$

Die notwendigen Bedingungen zum Erreichen dieses Minimums sind

$$\frac{\partial J_1}{\partial \sigma^{(n)ik}} = 0, \quad \frac{\partial J_2}{\partial \sigma^{(n)ik}} = 0.$$

Sie stellen Rekursivgleichungen für die n'ten Reihenglieder dar. Bei Beschränkung auf lineare Glieder ergeben sich die vollständigen Gleichungen der 1. Approximation von Zerna, wobei im Rahmen dieser Approximation die zweite Gleichung von (4.97 b) vernachlässigt wird. Die drei Gleichgewichtsbedingungen in den Schnittgrößen-ohne die Volumenkräfte-lauten somit

$n^{9\alpha}  _\alpha - b_\alpha^9 q^\alpha + \frac{(0)}{p} \dots - b_\alpha^9 \frac{(1)}{p}^\alpha = 0$	Allgemeine Schalen- gleichungen	(4.99 a,b,c)
$q^\alpha  _\alpha + n^{\varepsilon\alpha} b_{\varepsilon\alpha} + \frac{(0)}{p}{}^3 \dots = 0$		
$m^{\alpha 9}  _\alpha - q^9 + \frac{(1)}{p}{}^9 \dots - b_\alpha^9 \frac{(2)}{p}^\alpha = 0$		

worin häufig  $c^q = \underline{p}^q - b_\alpha^q \underline{p}^\alpha$  als Abkürzung verwendet wird.

Zu diesen Gleichungen kann man natürlich auch über die virtuellen Arbeiten kommen. Das bedeutet: Integration der Gleichgewichtsbedingungen über die virtuelle Verschiebung  $\delta \underline{u}$ , die in Potenzreihen über  $\lambda \Theta$  angesetzt wird.

Es ist notwendig an dieser Stelle auch die Schwäche des Potenzreihenansatzes zu erwähnen. Bei Betrachtung der Potenzreihen der Spannungskomponenten  $\sigma^{\alpha\beta}$  und  $\sigma^{33}$ , eingesetzt in die Gleichgewichtsbedingungen und unter Berücksichtigung der -üblicherweise als Schalenbelastung aufgefaßten- Laibungsspannungen sind die Reihenglieder  $\overset{(0)}{\sigma}^{\alpha\beta}$ ,  $\overset{(1)}{\sigma}^{\alpha\beta}$  und  $\overset{(0)}{\sigma}^{33}$ ,  $\overset{(1)}{\sigma}^{33}$  bereits durch die äußere Belastung festgelegt. Werden weiterhin Spannungs- Dehnungs- Beziehungen für die höheren Glieder formuliert, so existieren auch solche für die nullten und ersten Glieder, was aber gegen das Gleichgewicht an der Schalenlaibung verstößt. Die Schwäche des Potenzreihenansatzes ist dann beseitigt, wenn man ihn für die  $\sigma^{\alpha\beta}$  beibehält, für die ja immer Spannungsdehnungsbeziehungen vorliegen, und bei den  $\sigma^{\alpha\beta}$ ,  $\sigma^{33}$  auf ihn verzichtet.

Bei Vorhandensein von Volumenkräften (z.B. Fliehkräften) müßten gemäß (4.97) die  $p^q, p^3$  mitgenommen werden. Sind jedoch die  $p^q, p^3$  über der Schalendicke konstant, so werden sie direkt von den  $\underline{p}, \underline{p}^3$  mit abgedeckt. Im allgemeinen ist es üblich, die Laibungsspannungen als Schalenbelastung aufzufassen und dafür auf die  $p^q, p^3$  zu verzichten.

#### 4.3.6 Sonderfälle von Gleichgewichtsbedingungen (T.S.)

##### Biegetheorie

Annahmen

$$\sigma^{\alpha\beta} = \overset{(0)}{\sigma}^{\alpha\beta} + \lambda \Theta \overset{(1)}{\sigma}^{\alpha\beta} + \dots \neq 0 \quad (\text{im ganzen})$$

$$n^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (n^{\alpha\beta} + n^{\beta\alpha}) = n^{(\alpha\beta)} \quad (\text{symm. Tensor})$$

$$\frac{\bar{L}^2}{R^2} \ll 1, \quad b_{\beta|\gamma}^\alpha \ll b_{\beta}^\alpha \quad (\text{geringe Änderung des Krümmungstensors})$$

$$m^{\alpha\beta} = m^{\beta\alpha},$$

$$n^{\alpha\beta}|_\alpha \approx 0, \quad (\text{da nur geringe Änderung bei flachem Winkel}).$$

} Für  
flache Schalen  
weiterhin

Die Biegetheorie umfaßt mithin die flachen Schalen und das Randstörungsproblem. Wenn  $c^q = 0$  gesetzt wird, bleiben die Gleichgewichtsbedingungen (Index Null weggelassen)

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + q^\alpha |_\alpha + p^3 &= 0 \\ m^{\alpha\beta} |_\alpha - q^\beta &= 0 \end{aligned} \quad (4.100)$$

übrig.

### Membrantheorie

Annahme  $\sigma^{\alpha\beta} = \overset{(0)}{\sigma}{}^{\alpha\beta} + \lambda \Theta \overset{(1)}{\sigma}{}^{\alpha\beta} \neq 0$  (im allgemeinen)

Damit werden für diesen Belastungsfall

$$n^{\alpha\beta} = \int_{-1/2}^{1/2} \overset{(0)}{\sigma}{}^{\alpha\beta} d\Theta, \quad m^{\alpha\beta} = 0$$

Da die  $q^\alpha$  ohnehin Null sind, verbleiben als Gleichgewichtsbedingungen (Index Null weggelassen)

$$\begin{aligned} n^{9\alpha} |_\alpha + p^9 &= 0 \\ n^{r\alpha} b_{r\alpha} + p^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.101)$$

Zur Ermittlung der Membrankräfte bzw. Membranspannungen ist die Glg.(4.99 c) nicht notwendig und auch nicht vorhanden.

### 4.3.7 Physikalische Größen

#### Schnittgrößen:

Eine physikalische Bedeutung haben Spannungs- und Momentenspannungserresultierende, die sich z.B. im Falle von  $\underline{\mathfrak{T}}^1$  an einem Schalenchnitt  $\Theta^1 = \text{const.}$  (s. Bild 4.3) mit den begrenzenden Normalen  $\Theta^2$  und  $\Theta^2 + d\Theta^2$  über den Spannungsvektor  $\underline{\mathfrak{T}}^\alpha$  finden lassen [Lehmann u.a., 1968]. Dabei wird von den folgenden Integralen ausgegangen

$$\int_{-1/2}^{1/2} \underline{\mathfrak{T}}^1 d\Theta^2 d\Theta^2 \quad \text{und} \quad \bar{L} \lambda \int_{-1/2}^{1/2} (\underline{a}_3 \times \underline{\mathfrak{T}}^1) \Theta^3 d\Theta^2 d\Theta^2. \quad (4.102)$$

Wenn diese beiden Größen auf die Längeneinheit  $ds$  der Koordinatenlinien  $\Theta^1 = \text{const.}$  der Schalenmittelfläche bezogen werden, so läßt sich über  $ds = \bar{L} \sqrt{a_{\alpha\beta}} d\Theta^\alpha d\Theta^\beta$ , analog Glg. (4.9 a) und mit

$$a_{22} = a \cdot a^{11}$$

angeben, daß für den  $\Theta^1 = \text{const.}$ -Schnitt

$$ds = \bar{L} \sqrt{a a^{(11)}} = \bar{L} \sqrt{a_{22}} d\Theta^2 = \bar{L} \sqrt{a a^{11}} d\Theta^2.$$

gilt.

Für die Schnitte  $\Theta^\alpha = \text{const.}$  werden damit über (4.102) und



$$n^\alpha = \frac{1}{ds} \int_{-1/2}^{1/2} \bar{t}^\alpha d\theta^3 d\theta^6 = \frac{1}{L \sqrt{a^{(\alpha\alpha)}}} \int_{-1/2}^{1/2} \bar{t}^\alpha d\theta^3$$

$$m^\alpha = \frac{\lambda \bar{L}}{ds} \int_{-1/2}^{1/2} (\alpha_3 \times \bar{t}^\alpha) \theta^3 d\theta^3 d\theta^6 = \frac{\lambda \bar{L}}{L \sqrt{a^{(\alpha\alpha)}}} \int_{-1/2}^{1/2} (\alpha_3 \times \bar{t}^\alpha) \theta^3 d\theta^3$$

In diese beiden Beziehungen wird  $\bar{t}^\alpha$  entsprechend (4.89) eingeführt

$$n^\alpha \sqrt{a^{(\alpha\alpha)}} = \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{q} (\mu_s^\alpha \tau^{\alpha s} \alpha_s + \lambda \tau^{\alpha 3} \alpha_3) d\theta^3$$

$$m^\alpha \sqrt{a^{(\alpha\alpha)}} = \lambda \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{q} \alpha_3 \times (\mu_s^\alpha \tau^{\alpha s} \alpha_s + \lambda \tau^{\alpha 3} \alpha_3) \theta^3 d\theta^3 .$$

Das liefert nach Einsetzen von (4.92) unter Verwendung von (4.2 a)

$$n^\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^{(\alpha\alpha)}}} (n^{\alpha s} \alpha_s + q^\alpha \alpha_3) \quad (4.103a)$$

$$m^\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^{(\alpha\alpha)}}} (m^{\alpha s} (\alpha_3 \times \alpha_s) + \theta) = \frac{1}{\sqrt{a^{(\alpha\alpha)}}} (m^{\alpha 1} \alpha^2 - m^{\alpha 2} \alpha^1)$$

Die physikalischen Komponenten  $\check{n}^{\alpha s}, \check{m}^{\alpha s}, \check{q}^\alpha$  ergeben sich schließlich, wenn die physikalischen Spannungs- und Momentenspannungsergebnissen  $n^\alpha$  und  $m^\alpha$  noch auf Einheitsvektoren in Richtung von  $\alpha_s, \alpha^s$  und  $\alpha_3$  bezogen werden (vgl. Bild 4.10)

$$\check{n}^{\alpha s} = \check{n}^{\alpha s} \frac{\alpha_s}{\sqrt{a^{(ss)}}} + \check{q}^\alpha \alpha_3$$

$$\check{m}^{\alpha 1} = \check{m}^{\alpha 1} \frac{\alpha^2}{\sqrt{a^{22}}} - \check{m}^{\alpha 2} \frac{\alpha^1}{\sqrt{a^{11}}} \quad (4.103b)$$

Zerna

Den Zusammenhang zwischen den tensoriellen Komponenten und den physikalischen Komponenten liefert der Koeffizientenvergleich zwischen den Gleichungen (4.103 a) und (4.103 b)

$$\check{n}^{\alpha s} = \sqrt{\frac{a^{(ss)}}{a^{(\alpha\alpha)}}} n^{\alpha s} \quad , \quad \check{q}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^{(\alpha\alpha)}}} q^\alpha$$

$$\check{m}^{\alpha 1} = \sqrt{\frac{a^{22}}{a^{11}}} \bar{L} m^{\alpha 1} = \sqrt{\frac{a^{11}}{a^{22}}} \bar{L} \dot{m}^{\alpha 1}$$

$$(\check{m}^{\alpha 2} = \sqrt{a} m^{\alpha 2}) \quad (4.104a)$$

$$\check{m}^{\alpha 3} = \sqrt{a} m^{\alpha 3}$$

$$(\check{m}^{\alpha 22} = -\sqrt{\frac{a^{11}}{a^{22}}} \bar{L} m^{\alpha 22} = -\sqrt{\frac{a^{22}}{a^{11}}} \bar{L} \dot{m}^{\alpha 22}) .$$

Wenn die physikalischen Komponenten auf die positiv gerichteten Einheitsvektoren bezogen werden, so wie es Green/Zerna macht, dann erhalten wir bei den  $\check{m}^{\alpha 2}$  negative Vorzeichen.

Hier soll, wie es allgemein üblich ist, dem Wunsch nach gleichen Vorzeichen der physikalischen und der tensoriellen Komponenten Folge

geleistet werden. Damit sind in den Glg. (4.104 a) die Vorzeichen bei den  $\overset{*}{m}^{\alpha 2}$  zu wechseln

$$\begin{aligned} \overset{*}{m}^{12} &= + \sqrt{a} m^{12} \\ \overset{*}{m}^{22} &= + \sqrt{\frac{a_{22}}{a^{22}}} \bar{L} m^{22}, \end{aligned} \quad (4.104 b)$$

Die Wirkungsrichtungen der physikalischen Komponenten sind nun gleich denen der tensoriellen Komponenten, die in Bild 4.11 eingezeichnet sind.

Die physikalischen Momente sind dabei die Momente der Spannungen um die kontravarianten Basisvektoren der Schalenmittelebene. Im übrigen haben physikalische Komponenten keine Tensoreigenschaften mehr!

### Belastung:

Auch die Oberflächenkräfte werden durch resultierende Größen ersetzt, die in der Mittelfläche wirken. Als invariante Größen analog zu  $\underline{f}^\alpha$  liegen hier der Kraftvektor  $\bar{L}\underline{\kappa}$  und der Momentenvektor  $\bar{L}^2\underline{\tau}$  um den im Bild 4.11 betrachteten Punkt der Mittelfläche vor. Die tensorielle Zerlegung in Komponenten ergibt

$$\begin{aligned} \underline{\kappa} &= \frac{1}{L} (\underline{p}^\alpha \alpha_\alpha + \underline{p}^3 \alpha_3) \\ \underline{\tau} &= \frac{1}{L^2} (c^\alpha \alpha_3 \times \alpha_\alpha) = \frac{\sqrt{a}}{L^2} (c^1 \alpha^2 - c^2 \alpha^1) \end{aligned}$$

Für die physikalischen Komponenten läßt sich ansetzen

$$\begin{aligned} \underline{\kappa} &= \overset{*}{p}^\alpha \frac{\alpha_\alpha}{\sqrt{a_{(\alpha\alpha)}}} + \overset{*}{p}^3 \alpha_3 \\ \underline{\tau} &= \overset{*}{c}^1 \frac{\alpha^2}{\sqrt{a^{22}}} - \overset{*}{c}^2 \frac{\alpha^1}{\sqrt{a^{11}}} \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} \overset{*}{p}^1 &= \frac{\sqrt{a_{11}}}{L} p^1, \quad \overset{*}{p}^2 = \frac{\sqrt{a_{22}}}{L} p^2, \quad \overset{*}{p}^3 = \frac{1}{L} p^3, \\ \overset{*}{c}^1 &= \frac{\sqrt{a a^{22}}}{L^2} c^1, \quad (\overset{*}{c}^2 = \frac{\sqrt{a a^{11}}}{L^2} c^2 \hat{=} \frac{-\sqrt{a_{22}}}{L^2} c^2) \end{aligned} \quad (4.105 a)$$

Auch hier ist die Komponente  $\overset{*}{c}^2$

$$\overset{*}{c}^2 = \frac{\sqrt{a_{22}}}{L^2} c^2. \quad (4.105 b)$$

### Verformungen und Verzerrungen:

Bei den Verformungs- und Verzerrungsgrößen geschieht die Überführung auf physikalische Größen folgendermaßen

$$W = v_\alpha \alpha^\alpha + w_\beta \alpha^\beta = \overset{*}{v}_\alpha \frac{\alpha^\alpha}{\sqrt{a^{(\alpha\alpha)}}} + \overset{*}{w}_\beta \alpha^\beta$$

$$W = w_\alpha \alpha^\alpha = \overset{*}{W}_\alpha \frac{\alpha^\alpha}{\sqrt{a^{(\alpha\alpha)}}} \quad (4.106)$$

$$W = W_\alpha \alpha^\alpha + W_\alpha \alpha^\alpha = \overset{*}{W}_\alpha \frac{\alpha^\alpha}{\sqrt{a^{(\alpha\alpha)}}} + \overset{*}{W}_\alpha \alpha^\alpha \quad (1. \text{Approx.})$$

Bei den Verzerrungen gilt gemäß  $\overset{*}{\gamma}_{ij} = \sqrt{g^{(ii)}g^{(jj)}} \gamma_{ij}$  (orthogonales KOS)

$$\left. \begin{aligned} \overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta} &= \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}g^{(\beta\beta)}} \gamma_{\alpha\beta} \approx \frac{1}{L^2} \sqrt{a^{(\alpha\alpha)}a^{(\beta\beta)}} \gamma_{\alpha\beta} \\ \overset{*}{\gamma}_{\alpha 3} &= \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}g^{(33)}} \gamma_{\alpha 3} \approx \frac{1}{L^2 \lambda} \sqrt{a^{(\alpha\alpha)}} \gamma_{\alpha 3} \\ \overset{*}{\gamma}_{33} &= g^{(33)} \gamma_{33} = \frac{1}{(L\lambda)^2} \gamma_{33} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{wegen} \\ \lambda \ll 1 \end{array} \quad (4.107)$$

#### 4.4 Spezielle gekrümmte Flächenträger

##### 4.4.1 Allgemeine Rotationsschale

Für die Rotationsschale des Bildes 4.12 werden als Gaußsche Flächenparameter die Meridianbogenlänge  $\vartheta$  und der Breitenkreiswinkel  $\vartheta$  gewählt. Diese Parameter- bzw. Koordinatenlinien stellen ein orthogonales Netz dar.

Der Ortsvektor der allgemeinen Rotationsschale lautet entsprechend [Klingbeil], S. 110, und Glg. (4.54 a)

$$\begin{aligned} \bar{r}(\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3) &= \bar{L} \bar{x}(\vartheta^1, \vartheta^2) + \vartheta^3 \alpha_3(\vartheta^1, \vartheta^2) = \bar{L} (\bar{x} + \lambda \vartheta^3 \alpha_3) \\ \bar{L} \bar{x} &= n_1 x^1 + n_2 x^2 + n_3 x^3 \quad (4.108) \\ &= n_1 r(\vartheta) \cos \vartheta + n_2 r(\vartheta) \sin \vartheta + n_3 \underline{z}(\vartheta) \end{aligned}$$

Er besitzt die krummlinigen Koordinaten

$$\vartheta^1 = \frac{\vartheta}{L^1}, \quad \vartheta^2 = \frac{\vartheta}{L^2}, \quad (\vartheta^3 = \frac{\vartheta^3}{t});$$

wobei  $\vartheta$  die erzeugende Mantellinie ist. Da  $\vartheta$  einen Winkel darstellt, kann  $L^2 = 1$  gesetzt werden. Für  $L^1$  kann  $\bar{L}$  angenommen werden, so daß als kovariante Basis über  $\alpha_\alpha = \bar{r}_{,\alpha}$  gefunden wird

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial \vartheta^1} = (n_1 r' \cos \vartheta + n_2 r' \sin \vartheta + n_3 \underline{z}') \\ \alpha_2 &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial \vartheta^2} = \frac{1}{L} (-n_1 r \sin \vartheta + n_2 r \cos \vartheta) \end{aligned}$$

Hierin können die Ableitungen von  $\underline{z}$  nach  $\vartheta$  durch solche von  $r$  nach  $\vartheta$  ausgedrückt werden, denn es ist nach Bild 4.12

$$\begin{aligned} dr^2 + d\underline{z}^2 &= d\vartheta^2 \rightarrow r'^2 + \underline{z}'^2 = 1 \\ \underline{z}' &= \sqrt{1 - r'^2} \quad \text{und} \quad \underline{z}'' = \frac{-r' r''}{\sqrt{1 - r'^2}} \end{aligned} \quad (4.109)$$

Nach Definition und Glg. (4.18) ist

$$\alpha_3 = \alpha^3 = \frac{\alpha_1 \times \alpha_2}{|\alpha_1 \times \alpha_2|} = \frac{\frac{1}{L} \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ r' \cos \vartheta & r' \sin \vartheta & \bar{z}' \\ -r \sin \vartheta & r \cos \vartheta & 0 \end{vmatrix}}{\frac{r}{L} \frac{1}{r} \sqrt{r'^2 + \bar{z}'^2}}$$

$$= (-n_1 \bar{z}' \cos \vartheta - n_2 \bar{z}' \sin \vartheta + n_3 r') \cdot$$

Die Metrikensorkomponenten lauten gemäß  $\alpha_{\alpha\beta} = \alpha_\alpha \cdot \alpha_\beta$

$$\begin{aligned} a_{11} &= r'^2 \cos^2 \vartheta + r'^2 \sin^2 \vartheta + \bar{z}'^2 = r'^2 + \bar{z}'^2 = 1 \\ \bar{L} a_{12} &= -r r' \sin \vartheta \cos \vartheta + r r' \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \\ (\bar{L})^2 a_{22} &= r^2 \sin^2 \vartheta + r^2 \cos^2 \vartheta = r^2 \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{r^2}{\bar{L}^2} \quad (4.110a)$$

und

$$(a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{\bar{L}^2} \end{pmatrix}, \quad a_{33} = 1 \quad (4.110b)$$

Die kontravarianten Basisvektoren ergeben sich mit Gleichung (4.60 b) über den kontravarianten Maßtensor

$$(a^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{L}^2}{r^2} \end{pmatrix}, \quad a^{33} = 1 \quad (4.110c)$$

zu

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= 1 (n_1 r' \cos \vartheta + n_2 r' \sin \vartheta + n_3 \bar{z}') = a^{11} \alpha_1 \\ \alpha^2 &= \frac{\bar{L}^2}{r^2} (-n_1 \frac{r}{L} \sin \vartheta + n_2 \frac{r}{L} \cos \vartheta) = a^{22} \alpha_2 \end{aligned} \quad (4.111)$$

Nun fehlt noch der Krümmungstensor  $b_{\alpha\beta}$ , den wir über die Ableitungen der Basisvektoren finden. Zum Beispiel ist

$$\alpha_{1,1} = (n_1 r'' \cos \vartheta + n_2 r'' \sin \vartheta + n_3 \bar{z}'') \bar{L}$$

und damit

$$\begin{aligned} b_{11} &= + \alpha_3 \cdot \alpha_{1,1} \\ &= (-n_1 \bar{z}' \cos \vartheta - n_2 \bar{z}' \sin \vartheta + n_3 r') \cdot (n_1 r'' \cos \vartheta + n_2 r'' \sin \vartheta + n_3 \bar{z}'') \bar{L} \\ &= \bar{L} \left[ -\bar{z}' r'' (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) + r' \bar{z}'' \right] = \bar{L} \left[ -\sqrt{1-r'^2} r'' + r' \frac{-r' r''}{\sqrt{1-r'^2}} \right] \\ &= -\frac{\bar{L} r''}{\sqrt{1-r'^2}} \end{aligned}$$

Die ganze Matrix lautet ([Klingbeil], S. 112)

$$(b_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{-r'' \bar{L}}{\sqrt{1-r'^2}} & 0 \\ 0 & \frac{r}{L} \sqrt{1-r'^2} \end{pmatrix} \quad (4.112a)$$

Die kontragredienten Krümmungstensorcomponenten erhält man analog

$$b_{\beta}^{\alpha} = b_{\beta\alpha} a^{\alpha\gamma} ,$$

$$(b_{\beta}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} \frac{-r''\bar{L}}{\sqrt{1-r'^2}} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{L}\sqrt{1-r'^2}}{r} \end{pmatrix} . \quad (4.112b)$$

Da  $b_{12} = a_{12} = 0$  , ist bewiesen, daß die Meridiane und Breitenkreise auf Rotationsflächen Krümmungslinien sind.

Die mittlere und die Gaußsche Krümmung lassen sich mit Glg. (4.65) Glg. (4.76) zu

$$H = \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\alpha} = \frac{1-r'^2-rr''}{2r\sqrt{1-r'^2}} \bar{L} , \quad K = \det(b_{\beta}^{\alpha}) = \frac{-r''}{r} \bar{L}^2 . \quad (4.113)$$

ermitteln.

Für die spätere Ermittlung der Wickelkontur ist die Bereitstellung der Krümmungsradien entsprechend Glg. (4.75 b) notwendig. Allerdings muß die Ableitung  $r' = dr/ds$  durch Ableitungen  $\overset{*}{r}' = dr/d\overset{*}{z}$  ( $\overset{*}{z}$  wird hier wie Bild 4.12 gebraucht) ersetzt werden, wie es in der Wickeltheorie üblich ist. Es gilt dann mit

$$d\overset{*}{s}^2 = dr^2 + d\overset{*}{z}^2 , \quad \frac{d\overset{*}{s}}{d\overset{*}{z}} = \sqrt{1+\overset{*}{r}'^2}$$

die Beziehung

$$r' = \frac{dr}{d\overset{*}{z}} \frac{d\overset{*}{z}}{d\overset{*}{s}} = \overset{*}{r}' \frac{d\overset{*}{z}}{d\overset{*}{s}} = \frac{\overset{*}{r}'}{\sqrt{1+\overset{*}{r}'^2}}$$

Aus der zweiten Ableitung wird

$$\begin{aligned} r'' &= \frac{d(r')}{d\overset{*}{s}} = \frac{d(r')}{d\overset{*}{z}} \frac{d\overset{*}{z}}{d\overset{*}{s}} \\ &= \frac{\overset{*}{r}'' \sqrt{1+\overset{*}{r}'^2} - \overset{*}{r}'^2 \frac{\overset{*}{r}'}{\sqrt{1+\overset{*}{r}'^2}}}{1+\overset{*}{r}'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\overset{*}{r}'^2}} \\ &= \frac{\overset{*}{r}''}{(1+\overset{*}{r}'^2)^{3/2}} = \frac{\overset{*}{r}''}{(1+\overset{*}{r}'^2)^2} . \end{aligned}$$

Damit liegt die mittlere Krümmung

$$\begin{aligned} \frac{H}{\bar{L}} &= \frac{1-r'^2-rr''}{2r\sqrt{1-r'^2}} \\ &= \frac{1-\frac{\overset{*}{r}'^2}{1+\overset{*}{r}'^2}-r\frac{\overset{*}{r}''}{(1+\overset{*}{r}'^2)^{3/2}}}{2r\sqrt{1-\frac{\overset{*}{r}'^2}{1+\overset{*}{r}'^2}}} \end{aligned} \quad (4.113b)$$

und die Gaußsche Krümmung

$$\frac{K}{\bar{L}^2} = \frac{-r''}{r} = \frac{-\overset{*}{r}''}{r(1+\overset{*}{r}'^2)^{3/2}} .$$

fest.

Hieraus ergeben sich die Krümmung  $1/R_1$  der Meridiankurve (Index 0 oder 1) und die Normalkrümmung  $1/R_2$  des Breitenkreises zu

$$\frac{1}{R_1} = \frac{-r''}{\sqrt{1-r'^2}} \triangleq \frac{-r''}{(1+r'^2)^{3/2}} = \frac{b_1'}{L} \quad (4.114)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\sqrt{1-r'^2}}{r} \triangleq \frac{1}{r\sqrt{1+r'^2}} = \frac{b_2'}{L} .$$

Für die Ermittlung der geodätischen Linien müssen die Christoffel-Symbole bekannt sein. Bei orthogonalen Koordinaten ( $a_{12} = 0$ ) vereinfacht sich die Formel zu ihrer Berechnung auf

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} a^{(\alpha\alpha)} (a_{\alpha\beta,\gamma} + a_{\alpha\gamma,\beta} - a_{\beta\gamma,\alpha}) .$$

Im einzelnen sind von Null verschieden

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} a^{11} (a_{12,2} + a_{21,2} - a_{22,1})$$

$$= -\frac{1}{2} a^{11} a_{22,1} = -\frac{1}{2} \frac{d(r^2)}{L^2 d\theta^1} = -\frac{r r'}{L} \quad (4.115)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} a^{22} a_{22,1} = \frac{1}{2} \frac{\bar{L}^2}{r^2} \frac{d(r^2)}{L^2 d\theta^1} \bar{L} = \frac{r'}{r} \bar{L} .$$

Bei Verwendung der Bogenlänge  $s$  als Krüvenparameter  $t$  kann man das Differentialgleichungssystem der geodätischen Linien (4.68) noch weiter umformen, weil jetzt  $\int ds = \text{Min}, F = \bar{L}$ . Nach [Klingbeil, S. 118] ist dann

$$\ddot{\theta}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \dot{\theta}^{\alpha} \dot{\theta}^{\beta} = 0 \quad (4.116)$$

Zur Erläuterung, wie wichtig diese DGLn sind, sei gesagt: Nur die Faserablage auf geodätischen Linien führt zu den sogenannten Isotensoiden, also Wickelkörpern, bei denen die Fasern überall die gleiche Beanspruchung erfahren.

Das Ausführen der Vorschrift (4.116) liefert die Bedingungen für geodätische Linien auf Rotationskörpern

$$\ddot{\theta}^1 + \Gamma_{22}^1 (\dot{\theta}^2)^2 = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{\theta}^2 + 2 \Gamma_{12}^2 \dot{\theta}^1 \dot{\theta}^2 = 0 \quad (4.117)$$

bzw.

$$\frac{\ddot{s}}{\bar{L}} - \frac{r r'}{\bar{L}} (\dot{\eta})^2 = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{\eta} + 2 \frac{r'}{r} \bar{L} \frac{\dot{s}}{\bar{L}} \dot{\eta} = 0 .$$

Wenn nach Bild 4.12 eine beliebige Bogenlänge  $s$  angenommen wird, so lassen sich folgende Beziehungen einführen ( $\alpha =$  Faserablenkwinkel)

$$\dot{s} = \frac{ds}{ds} = \cos \alpha(s), \quad \dot{\eta} = \frac{d\eta}{ds} = \frac{\sin \alpha(s)}{r(s)}$$

Aus den DGLn (4.112) ergeben sich nach Einsetzen der Beziehungen

$$r' = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{d\vartheta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\vartheta}}$$

die Gleichungen

$$\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} - r\dot{r}\dot{\vartheta}^2 = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{\vartheta} + 2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\vartheta} = 0.$$

Diese DGLn können noch vereinfacht dargestellt werden. Als erstes läßt sich die zweite Gleichung schreiben als

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{ds}(r^2\dot{\vartheta}) = 0.$$

Das liefert die Clairautsche Bedingung für geodätische Linien auf Rotationskörpern, die mit der Randbedingung  $\alpha = 90^\circ$ ,  $r = e$

$$r^2\dot{\vartheta} = r^2 \frac{\sin\alpha}{r} = r \sin\alpha = \text{const.} = e \quad (4.118)$$

lautet. Diese Lösung ist die einzige Lösung des gekoppelten DGL-Systems, falls die andere DGL auf eine Identität führt. Da

$$\frac{1}{2} \frac{d(\dot{\vartheta}^2)}{ds} = \dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} \quad , \quad \frac{1}{2} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{\dot{r}}{r^3} \quad \text{und} \quad r^2\dot{\vartheta} = e$$

vereinfacht sich die erste Gleichung zu

$$\frac{1}{2} \frac{d(\dot{\vartheta}^2)}{ds} - r\dot{r} \frac{e^2}{r^4} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds}\left(\dot{\vartheta}^2 + \frac{e^2}{r^2}\right) = 0,$$

so daß sie für  $\alpha = 90^\circ$ ,  $r = e$

$$\dot{\vartheta}^2 + \frac{e^2}{r^2} = \cos^2\alpha + \frac{e^2}{r^2}$$

schließlich mit dem Einsetzen von Glg. (4.118) identisch erfüllt ist, weil

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Wie sich weiter zeigen ließe, erscheinen die geodätischen Linien abwickelbarer Flächen (Zylinder, Kegel) in der ebenen Abwicklung als Gerade.

Weiter ist die Bogenlängen von großem Interesse. Sie läßt sich über die Beziehung finden

$$L = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{a_{\alpha\beta} \dot{\vartheta}^\alpha \dot{\vartheta}^\beta} ds. \quad (4.119)$$

Für den Werkstoffverbrauch ist zusätzlich eine Formel zur Berechnung der Konturfläche notwendig. Sie lautet

$$F = \int_{s_0}^{s_1} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} r(s) d\vartheta ds. \quad (4.120)$$

Mit bekannten  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  sind die Gleichgewichtsbedingungen für das Schalenelement anschreibbar [Klingbeil]

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta}|_\alpha - b_\alpha^\beta q^\alpha + \underline{p}^\beta &= 0 \\ q^\alpha|_\alpha + n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + \underline{p}^3 &= 0 \\ m^{\alpha\beta}|_\alpha - q^\beta &= 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Allgemeine Schale} \\ \text{(Techn. Schalentheorie)} \end{array} \quad (4.121)$$

Um den Anwendungsbereich der obigen Schalengleichungen deutlich zu machen, sollen hier die Voraussetzungen der Technischen Schalentheorie zusammengestellt werden ([Wunderlich] und [Bercha/Glockner])

- Dünne Schale: Die Schalenstärke  $t$  ist gegenüber den übrigen Abmessungen klein ( $\lambda \ll 1$ ).
- Lineare Theorie: Die Verformungen und ihre Ableitungen sind infinitesimale Größen erster Ordnung. Die Verformungen sind klein gegenüber der Schalenstärke und haben keinen Einfluß auf die Gleichgewichtsbedingungen.
- Normalenhypothese: Die Normalen zur Mittelfläche sind auch nach der Verformung unverzerrt und normal zur Mittelfläche ( $\tau_{\alpha 3} = \tau_{3\alpha} = 0$ ).
- Die Spannungen normal zur Mittelfläche sind vernachlässigbar ( $\tau^{33} = 0$ ).
- Die Schalenstärke ist näherungsweise konstant ( $\lambda_{,\alpha} = 0$ ).
- Bezüglich der elastischen Eigenschaften siehe Kapitel 5.

Die Gleichungen (4.121) ergeben in ausgeschriebener Form unter Berücksichtigung von  $b_2^1 = b_1^2 = b_{12} = b_{21} = 0$ , also Ausnutzung der geometrischen Rotationssymmetrie, bei der Wahl der Parameterlinien

$$\begin{aligned} n^{11}|_1 + n^{21}|_2 - b_1^1 q^1 + \underline{p}^1 &= 0 \\ n^{12}|_1 + n^{22}|_2 + b_2^2 q^2 + \underline{p}^2 &= 0 \\ q^1|_1 + q^2|_2 + n^{11} b_{11} + n^{22} b_{22} + \underline{p}^3 &= 0 \\ m^{11}|_1 + m^{21}|_2 - q^1 &= 0 \\ m^{12}|_1 + m^{22}|_2 - q^2 &= 0 \end{aligned}$$

In diesen Gleichgewichtsbedingungen stehen zehn unbekannte Schnittgrößen fünf Gleichungen gegenüber. Um später ein lösbares Gleichungssystem für die Gesamtzahl der unbekanntenen Schnittgrößen, Verschiebungen und Verdrehungen zu erhalten, muß der Momententensor  $m^{\alpha\beta}$  auf



auf seinen symmetrischen Anteil beschränkt werden

$$m^{\alpha\beta} = m^{(\alpha\beta)} + m^{[\alpha\beta]} = m^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} (r r^{\alpha\beta} + m^{\beta\alpha}) = \lambda \int_{-1/2}^{1/2} \epsilon^{-(\alpha\beta)} \Theta d\Theta$$

Das bedeutet  $m^{12} \neq m^{21}$ , aber  $m_{neu}^{12} = m^{(12)} = m^{(21)}$ . Mehr leistet die Theorie nicht. Es stehen dann insgesamt vierzehn Unbekannten (neun Schnittgrößen, drei Verschiebungen, zwei Verdrehungen) zunächst nur fünf Gleichgewichtsbedingungen und zwei Verträglichkeitsbedingungen gegenüber. Dazu kommen in Kapitel 5 vier konstitutive Gleichungen (Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen) für die nicht-symmetrischen Normalkrafttensorkomponenten und drei Beziehungen für die Momententensorkomponenten  $m^{(\alpha\beta)}$ , bei denen die Klammer ab jetzt wieder weggelassen werden soll. Zur Verdeutlichung werden nun beispielhaft die nichtsymmetrischen  $n^{12}$  und  $n^{21}$  verglichen und zusätzlich die  $n^{12}$  Komponente in ihre physikalische Form überführt. Es sind

$$\begin{aligned} n^{12} &= \int_{-1/2}^{1/2} h \mu_{\beta}^2 \tau^{1\beta} d\Theta = \int_{-1/2}^{1/2} h (\mu_1^2 \tau^{11} + \mu_2^2 \tau^{12}) d\Theta \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} h [-\lambda \Theta b_1^2 \tau^{11} + (1 - \lambda \Theta b_2^2) \tau^{12}] d\Theta \\ n^{21} &= \int_{-1/2}^{1/2} h \mu_{\beta}^1 \tau^{2\beta} d\Theta = \int_{-1/2}^{1/2} h [(1 - \lambda \Theta b_1^1) \tau^{21} - \lambda \Theta b_2^1 \tau^{22}] d\Theta . \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Krümmungslinien als Koordinaten ( $b_1^2 = b_2^1 = 0$ ), sowie  $\tau^{12} = \tau^{21}$  und  $h \approx \lambda \bar{L}^3 (1 - \lambda \Theta (b_1^1 + b_2^2))$  werden bei Vernachlässigung der quadratischen Glieder in Glg. (4.64 b)-

$$\begin{aligned} n^{12} &= \lambda \bar{L}^3 \int_{-1/2}^{1/2} (1 - 2\lambda \Theta [b_1^1 + b_2^2]) (1 - \lambda \Theta b_2^2) \tau^{12} d\Theta \\ n^{21} &= \lambda \bar{L}^3 \int_{-1/2}^{1/2} (1 - 2\lambda \Theta [b_1^1 + b_2^2]) (1 - \lambda \Theta b_1^1) \tau^{12} d\Theta . \end{aligned}$$

erhalten.

Trotz der Gleichheit der Schubspannungen  $\tau^{12} = \tau^{21}$ , Glg. (4.33), sind somit die Schubkräfte wie auch die Drillmomente i.a. nicht gleich. Lediglich bei der Kugelschale sind  $n^{12} = n^{21}$ , da  $b_1^1 = b_2^2$ .

Wenn nun zu den physikalischen Größen übergegangen wird, so ergibt sich bei orthogonalen Koordinaten ( $a_{\alpha\epsilon} b_{\beta}^{\epsilon} = b_{\alpha\beta}$ )

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}^{12} &= \sqrt{g_{(11)} g_{(22)}} \tau^{12} \\ &= \bar{L}^2 \sqrt{(a_{11} - 2\lambda \Theta b_{11})(a_{22} - 2\lambda \Theta b_{22})} \tau^{12} \\ &= \bar{L}^2 \sqrt{a_{11} a_{22}} \sqrt{(1 - 2\lambda \Theta b_1^1)(1 - 2\lambda \Theta b_2^2)} \tau^{12} . \end{aligned}$$

Da die  $\lambda\Theta$  -Größen klein sind, können die Wurzeln in Potenzreihen entwickelt werden

$$\frac{\tilde{\xi}^{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}\sqrt{(1-2\lambda\Theta b_1^2)(1-2\lambda\Theta b_2^2)}} \approx \tilde{\xi}^{12} \frac{\bar{L}}{r} (1+2\lambda\Theta b_1^2)(1+2\lambda\Theta b_2^2) = \tilde{\xi}^{12} \bar{L}^2.$$

Diese Beziehung, eingesetzt in  $n^{12}$ , ergibt nach Vernachlässigung von Potenzen höherer Ordnung in  $\lambda\Theta$

$$n^{12} = \lambda \bar{L} \int_{-1/2}^{1/2} (1-2\lambda\Theta [b_1^2+b_2^2])(1-2\lambda\Theta b_2^2)(1+2\lambda\Theta b_1^2)(1+2\lambda\Theta b_2^2) \frac{\bar{L}}{r} \tilde{\xi}^{12} d\Theta$$

und mit (4.104)

$$\frac{\bar{L}}{r} \tilde{n}^{12} = \lambda \bar{L} \int_{-1/2}^{1/2} (1-2\lambda\Theta [b_1^2+b_2^2])(1+2\lambda\Theta b_1^2) \frac{\bar{L}}{r} \tilde{\xi}^{12} d\Theta.$$

Da  $b_2^2 = +1/R_2$ ,  $\lambda \bar{L} = t$ ,  $\lambda\Theta = \gamma^3/\bar{L}$  und  $d\Theta = dy^3/t$  wird daraus (als Parameterlinien waren die Krümmungslinien gewählt)

$$\tilde{n}^{12} = \lambda \bar{L} \int_{-1/2}^{1/2} (1-2\lambda\Theta b_2^2) \tilde{\xi}^{12} d\Theta = \int_{-t/2}^{t/2} \left(1 - \frac{\gamma^3}{R_2}\right) \tilde{\xi}^{12} dy^3. \quad (4.122)$$

Nach dem Einsetzen der kovarianten Ableitungen in (4.121) gemäß [Klingbeil], S.90,

$$\begin{aligned} A^s|_{,\alpha} &= A^s_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\epsilon}^s A^\epsilon, \\ A^{\alpha\beta}|_{,\alpha} &= A^{\alpha\beta}_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\epsilon}^{\alpha\beta} A^{\epsilon\delta} + \Gamma_{\alpha\epsilon}^s A^{\alpha\epsilon} \end{aligned} \quad (4.123)$$

erhalten wir bei Anschreibung nur der nichtverschwindenden Christoffel-Symbole

$$\begin{aligned} n^{11}_{,1} + n^{21}_{,2} + \Gamma_{21}^2 n^{11} + \Gamma_{22}^1 n^{22} - b_1^1 q^1 + \underline{p}^1 &= 0 \\ n^{12}_{,1} + \Gamma_{12}^2 n^{12} + n^{22}_{,2} + \Gamma_{21}^2 n^{12} + \Gamma_{21}^2 n^{21} - b_2^2 q^2 + \underline{p}^2 &= 0 \\ q^1_{,1} + q^2_{,2} + \Gamma_{21}^2 q^1 + n^{11} b_{11} + n^{22} b_{22} + \underline{p}^3 &= 0 \\ m^{11}_{,1} + m^{21}_{,2} + \Gamma_{21}^2 m^{11} + \Gamma_{22}^1 m^{22} - q^1 &= 0 \\ m^{12}_{,1} + \Gamma_{12}^2 m^{12} + m^{22}_{,2} + \Gamma_{21}^2 m^{12} + \Gamma_{21}^2 m^{21} - q^2 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Rot schale} \\ \text{unter} \\ \text{allgemeiner} \\ \text{Belastung} \end{array} \quad (4.124)$$

Bei Beschränkung auf rotationssymmetrische Belastung verschwinden die partiellen Ableitungen in Umfangsrichtung. Werden außerdem die Querkraft  $q^2$  und die Drillmomente  $m^{12}$ ,  $m^{21}$  zu Null, dann verbleiben

$$n^{11}_{,1} + \frac{r\bar{L}}{r} n^{11} - \frac{r r'}{\bar{L}} n^{22} - b_1^1 q^1 + \underline{p}^1 = 0$$

$$n^{12}_{,1} + \frac{r'}{\bar{L}} (2n^{12} + n^{21}) + \underline{p}^2 = 0$$

$$q^1_{,1} + \frac{r'}{\bar{L}} q^1 - \frac{r''}{\sqrt{1-r'^2}} \bar{L} n^{11} + r\sqrt{1-r'^2} \frac{n^{22}}{b} + \underline{p}^3 = 0$$

$$m^{11}_{,1} + \frac{r'}{\bar{L}} m^{11} - \frac{r r'}{b} m^{22} - q^1 = 0$$

Statt der Ableitungskennzeichnung  $(\cdot)_{,1}$  kann darin noch  $\bar{L}(\cdot)'$  geschrieben werden.

Die Verzerrungstensorsorkomponenten der technischen Schalentheorie sind nach (4.86)

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \bar{L}^2 (\alpha_{\alpha\beta} + \lambda \Theta \omega_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{\bar{L}^2}{2} (v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha} - 2b_{\alpha\beta} w_3 + \lambda \Theta (w_{\alpha|\beta} + w_{\beta|\alpha})) \end{aligned}$$

$$\gamma_{w3} = \gamma_{33} = 0$$

Hierin die einzelnen Ausdrücke eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{\bar{L}^2}{2} [v_{\alpha|\beta} - 2v_{\beta|\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} + v_{\beta|\alpha} - 2b_{\alpha\beta} w_3 + \\ &\quad + \lambda \Theta (w_{\alpha|\beta} - 2w_{\beta|\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} + w_{\beta|\alpha})] \end{aligned} \quad (4.125a)$$

Als Verträglichkeitsbedingung liegt (4.87) vor in der Form

$$w_{\alpha} = -(w_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\beta} v_{\beta}) \quad (4.125b)$$

Das Überführen auf physikalische Komponenten gemäß (4.104) und weiter auf technische Größen ergibt, wenn  $M_{\alpha} = \overset{*}{m}^{11}$  gesetzt wird und  $ds = \bar{L} d\Theta^1$ ,

$$\begin{aligned} N_{\alpha} &= \overset{*}{n}^{11} = n^{11}, N_{\beta\beta} = \overset{*}{n}^{22} = \sqrt{\frac{r^2/\bar{L}^2}{\bar{L}^2/r^2}} n^{22} = \frac{r^2}{\bar{L}^2} n^{22}, N_{\alpha\beta} = \overset{*}{n}^{12} = \frac{r}{\bar{L}} n^{12} \\ M_{\alpha} &= \overset{*}{m}^{11} = \sqrt{\frac{1}{r}} \bar{L} m^{11} = \bar{L} m^{11}, M_{\beta\beta} = \overset{*}{m}^{22} = \frac{r^2}{\bar{L}} m^{22}, N_{\beta\alpha} = \overset{*}{n}^{21} = \frac{r}{\bar{L}} n^{21} \\ Q &= \overset{*}{q}^1 = \sqrt{r} q^1, p_{\alpha} = \overset{*}{p}^1 = \frac{\sqrt{r}}{\bar{L}} p^1, p = \overset{*}{p}^3 = \frac{1}{\bar{L}} p^3, \bar{L} p_{\alpha\alpha} = \overset{*}{p}^2 = \frac{r}{\bar{L}} \bar{p}^2. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Damit lautet das Gleichungssystem für das Gleichgewicht (vgl. [Worch, 1968, S. 330] und beachte,  $p$  wirkt in  $n^3$ -Richtung bzw. für Innendruck ist  $p = -p$ ; anzusetzen)

$$\begin{array}{l}
\text{Längs} \quad \frac{dN_s}{ds} + \frac{r'}{r} N_s - \frac{r'}{r} N_{\mathcal{D}} + \frac{r''}{\sqrt{1-r'^2}} Q + p_s = 0 \\
\text{normal} \quad \frac{dQ}{ds} + \frac{r'}{r} Q - \frac{r''}{\sqrt{1-r'^2}} N_s + \frac{\sqrt{1-r'^2}}{r} N_{\mathcal{D}} + p = 0 \\
\frac{dM_s}{ds} + \frac{r'}{r} M_s - \frac{r'}{r} M_{\mathcal{D}} - Q = 0 \\
\text{Torsion} \quad \frac{dN_{s\mathcal{D}}}{ds} + \frac{r'}{r} (N_{s\mathcal{D}} + N_{\mathcal{D}s}) + \tau_{s\mathcal{D}} = 0,
\end{array}
\quad \begin{array}{l}
\text{Rot. Schale} \\
\text{unter} \\
\text{rot. symm. Bel.}
\end{array}
\quad (4.127)$$

wobei noch gesetzt werden kann gemäß Bild 4.13 und Glg. (4.114)

$$R_2 = \frac{r}{\sin \varphi}, ds = R_1 d\varphi, r' = \frac{dr}{ds} = \cos \varphi, \frac{1}{R_1} = \frac{-r''}{\sqrt{1-r'^2}}, \frac{1}{R_2} = \frac{\sqrt{1-r'^2}}{r} \quad (4.128)$$

In Glg. (4.127) ist  $p$  laut Definition (Bild 4.12) nach innen positiv gerichtet.

Mit den technischen Bezeichnungen lautet der Zusammenhang zwischen Spannungen und Kräften bzw. Momenten in den Beziehungen (4.92), wenn als Identitäten

$$1 \rightarrow s, 2 \rightarrow \mathcal{D} \quad \text{und} \quad \tilde{\tau}^{11} \rightarrow \sigma_s, \tilde{\tau}^{12} \rightarrow \tau_{s\mathcal{D}}$$

gesetzt werden und die Glgn. (4.104) berücksichtigt werden

$$\begin{array}{l}
N_s = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_s \left(1 - \frac{y^3}{R_2}\right) dy^3, \quad N_{\mathcal{D}} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\mathcal{D}} \left(1 - \frac{y^3}{R_1}\right) dy^3 \\
N_{s\mathcal{D}} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{s\mathcal{D}} \left(1 - \frac{y^3}{R_2}\right) dy^3, \quad N_{\mathcal{D}s} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\mathcal{D}s} \left(1 - \frac{y^3}{R_1}\right) dy^3 \\
M_s = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_s \left(1 - \frac{y^3}{R_2}\right) y^3 dy^3, \quad M_{\mathcal{D}} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\mathcal{D}} \left(1 - \frac{y^3}{R_1}\right) y^2 dy^3 \\
Q_s = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{s\mathcal{D}} \left(1 - \frac{y^3}{R_2}\right) dy^3.
\end{array}
\quad (4.129a)$$

An dieser Stelle wäre noch anzumerken, daß bei dem rechtshändigen KOS von Bild 4.14 der Vektor der physikalischen Schnittgröße  $M_s$  in Richtung der  $2 = \mathcal{D}$ -Achse zeigt, der Vektor  $M_{\mathcal{D}}$  entgegengesetzt zur  $1 = s$ -Achse weist. Beim linkshändigen KOS ist es gerade umgekehrt.

Es werden in der Schalentheorie auch häufig linkshändige Koordinatensysteme verwendet, wobei bei den Momenten manchmal eine zusätzliche, nicht notwendige Vorzeichendefinition eingeführt wird, z.B. wie in Bild 4.14, daß das Moment dann positiv genannt wird, wenn es an der Innenseite der Schale Zugspannungen hervorruft. Diese Momente haben dann natürlich andere Richtungen als die zum gewählten KOS zugehörigen tensoriellen bzw. physikalischen Schnittmomente.

Das in [Worch, 1968] vorzufindende Beispiel entspricht dem Vorge-  
nannten. Bei ihm lauten die Spannungs-Schnittgrößen-Beziehungen

$$\begin{aligned}
 N_{1z} &= \int_{+t/2}^{-t/2} \sigma_{zz} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) (-dz) & , & & N_{2z} &= \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{zz} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz \\
 N_{1\varphi} &= \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{z\varphi} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz & , & & N_{2\varphi} &= \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{z\varphi} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz \\
 M_{1z} &= (-) \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{zz} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) z dz & , & & M_{2z} &= (-) \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{zz} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) z dz \\
 Q_{1z} &= (-) \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{z\varphi} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz
 \end{aligned} \tag{4.122b}$$

wenn  $-y^3 \rightarrow z$  und  $+t/2$  in (4.129 a) an der  
Schaleninnenseite war und nun außen ist (zweiter Vorzeichenwechsel).  
Das positive Vorzeichen vor dem Krümmungsterm kann ebenso ermittelt  
werden wie in Glg. (4.122). Ohne die spezielle Vorzeichendefinition  
wären die eingeklammerten Minuszeichen nicht vorhanden.

Zur Verdeutlichung der Schnittgrößen-Spannungs-Zusammenhänge soll  
hier am Beispiel von  $M_{1z}$  auf die vertraute Gleichung der Festigkeits-  
lehre übergeleitet werden. Unter Annahme einer linearen Spannungs-  
verteilung über der Schalendicke

$$\sigma_{zz}(z) = \frac{\sigma_{Rand}}{t/2} z ,$$

erhalten wir bei Vernachlässigung des Krümmungsgliedes und Verwendung  
des Widerstandsmomentes  $W$  als Abkürzung

$$M_{1z} = (-) \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{Rand} \frac{z^2}{t/2} dz = - \sigma_{Rand} \frac{t^2}{6} = - \sigma_{Rand} W .$$

Umgekehrt schreiben wir

$$\sigma_{Rand} = - \frac{M_{1z}}{W} ,$$

was bedeutet, daß bei einem positiven Moment eine negative Rand-  
spannung an der Oberseite der Schale vorliegt.

Für die Verschiebungen und Verzerrungen sind nach (4.106) angebar

$$\begin{aligned}
 \frac{u}{L} &= \overset{*}{v}_1 = v_1 & , & & \frac{v}{L} &= \overset{*}{v}_2 = \sqrt{\alpha^{2z}} v_2 = \frac{\bar{L}}{r} v_2 & , & & w &= \overset{*}{w}_3 = w_3 \\
 \overset{*}{w}_1 &= w_1 & , & & \overset{*}{w}_2 &= \frac{\bar{L}}{r} w_2 & & & & \\
 \epsilon_{\varphi\theta} &= \overset{*}{\gamma}_{11} = \frac{\gamma_{11}}{L^2} & , & & \frac{1}{2} \gamma_{\varphi\varphi_0} &= \overset{*}{\gamma}_{12} = \frac{1}{L^2} \frac{\bar{L}}{r} \gamma_{12} & & & & \epsilon_{\varphi_0} &= \overset{*}{\gamma}_{22} = \frac{1}{L^2} \frac{\bar{L}^2}{r^2} \gamma_{22} .
 \end{aligned} \tag{4.130}$$

Die Ausführung der Summation in Glg. (4.124) liefert

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= \frac{\bar{L}^2}{2} [2v_{1,1} - 2b_{11}w_3 + \lambda \Theta 2w_{1,1}] \\ \gamma_{12} &= \frac{\bar{L}^2}{2} [v_{1,2} - 2v_2 \Gamma_{12}^2 + v_{2,1} + \lambda \Theta (w_{1,2} - 2w_2 \Gamma_{12}^2 + w_{2,1})] \\ \gamma_{22} &= \frac{\bar{L}^2}{2} [2v_{2,2} - 2v_1 \Gamma_{22}^1 - 2b_{22}w_3 + \lambda \Theta (2w_{2,2} - 2w_1 \Gamma_{22}^1)] .\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der physikalischen Größen in die Verzerrungsgleichungen findet man somit

$$\begin{aligned}\bar{L}^2 \check{\gamma}_{11} &= \bar{L}^2 [\check{v}_{1,1} - b_{11} \check{w}_3 + \lambda \Theta \check{w}_{1,1}] \\ r \bar{L} \check{\gamma}_{12} &= \frac{\bar{L}^2}{2} [\check{v}_{1,2} - 2 \frac{r'}{r} \bar{L} \frac{r}{L} \check{v}_2 + (\frac{r}{L} \check{v}_2)_{,1} + \lambda \Theta (\check{w}_{1,2} - 2 \frac{r'}{r} \bar{L} \frac{r}{L} \check{w}_2 + (\frac{r}{L} \check{w}_2)_{,1})] \\ r^2 \check{\gamma}_{22} &= \bar{L}^2 [(\frac{r}{L} \check{v}_2)_{,2} + \frac{r r'}{L} \check{v}_1 - b_{22} \check{w}_3 + \lambda \Theta ((\frac{r}{L} \check{w}_2)_{,2} + \frac{r r'}{L} \check{w}_1)]\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}\check{\gamma}_{11} &= [\bar{L} \frac{\partial \check{v}_1}{\partial s} + \frac{\bar{L} r''}{\sqrt{1-r'^2}} \check{w}_3 + \lambda \Theta \bar{L} \frac{\partial \check{w}_1}{\partial s}] \\ 2 \check{\gamma}_{12} &= \frac{\bar{L}}{r} [\frac{\partial \check{v}_1}{\partial s} - 2r' \check{v}_2 + \check{v}_2 \frac{\partial r}{\partial s} + r \frac{\partial \check{v}_2}{\partial s} + \lambda \Theta (\frac{\partial \check{w}_1}{\partial s} - 2r' \check{w}_2 + \check{w}_2 \frac{\partial r}{\partial s} + r \frac{\partial \check{w}_2}{\partial s})] \\ \check{\gamma}_{22} &= \frac{\bar{L}^2}{r^2} [\frac{r}{L} \frac{\partial \check{v}_2}{\partial s} + \frac{r r'}{L} \check{v}_1 - \frac{r}{L} \sqrt{1-r'^2} \check{w}_3 + \lambda \Theta (\frac{r}{L} \frac{\partial \check{w}_2}{\partial s} + \frac{r r'}{L} \check{w}_1)] .\end{aligned}$$

Bevor hier die technischen Größen eingeführt werden, müssen wegen der Elimination der  $w_\alpha$  die Verträglichkeitsbedingungen bereitgestellt werden (4.87)

$$\begin{aligned}\check{w}_1 &= -(\bar{L} \frac{\partial \check{w}_3}{\partial s} + b_1^1 \check{v}_1) = -\bar{L} (\frac{\partial \check{w}_3}{\partial s} - \frac{r''}{\sqrt{1-r'^2}} \check{v}_1) \\ \frac{r}{L} \check{w}_2 &= -(\frac{\partial \check{w}_3}{\partial s} + b_2^2 \frac{r}{L} \check{v}_2) = -(\frac{\partial \check{w}_3}{\partial s} + \sqrt{1-r'^2} \check{v}_2)\end{aligned}$$

Das bedeutet eine Reduktion auf drei Unbekannte in den Formänderungsbeziehungen

$$\begin{aligned}\check{\gamma}_{11} &= \bar{L} [\frac{\partial \check{v}_1}{\partial s} + \frac{r''}{\sqrt{1-r'^2}} \check{w}_3 - \lambda \Theta (\frac{\partial^2 \check{w}_3}{\partial s^2} - \check{v}_1 \frac{\partial}{\partial s} (\frac{r''}{\sqrt{1-r'^2}}) - \frac{r''}{\sqrt{1-r'^2}} \frac{\partial \check{v}_1}{\partial s}) \bar{L}] \\ 2 \check{\gamma}_{12} &= \frac{\bar{L}}{r} [\frac{\partial \check{v}_1}{\partial s} - r' \check{v}_2 + r \frac{\partial \check{v}_2}{\partial s} + \lambda \Theta (\frac{\partial \check{w}_1}{\partial s} + r' \frac{\bar{L}}{r} (\frac{\partial \check{w}_3}{\partial s} + \sqrt{1-r'^2} \check{v}_1) - r \frac{\partial}{\partial s} \frac{\bar{L}}{r} (\frac{\partial \check{w}_2}{\partial s} + \sqrt{1-r'^2} \check{v}_1))] \\ \check{\gamma}_{22} &= \frac{\bar{L}}{r} [\frac{\partial \check{v}_2}{\partial s} + r' \check{v}_1 - \sqrt{1-r'^2} \check{w}_3 - \lambda \Theta (\frac{\bar{L}}{r} (\frac{\partial^2 \check{w}_3}{\partial s^2} - \sqrt{1-r'^2} \frac{\partial \check{v}_2}{\partial s} + r' (\frac{\partial \check{w}_3}{\partial s} - \frac{r''}{\sqrt{1-r'^2}} \check{v}_1))] .\end{aligned}$$

Bei rotationssymmetrischer Belastung verbleiben schließlich ( $\partial/\partial\varphi = 0$ ,  $r \Theta \bar{L} = y^2$ ) und bei Vernachlässigung höherer Ordnungen [Murakami/Suzuki]

$$\begin{aligned} \epsilon_{1\varphi} &= \gamma_{11}^* = \left( \frac{du}{R_1 d\varphi} - \frac{w}{R_1} \right) - y^3 \frac{d}{R_1 d\varphi} \left( \frac{u}{R_1} + \frac{dw}{R_1 d\varphi} \right) \equiv \epsilon_{1\varphi} \\ \epsilon_{2\varphi} &= \gamma_{22}^* = \left( -\frac{w}{R_2} + u \frac{\cotan\varphi}{R_2} \right) - y^3 \frac{\cotan\varphi}{R_2} \left( \frac{u}{R_1} + \frac{dw}{R_1 d\varphi} \right) \\ \gamma_{3\varphi} &= 2\gamma_{12}^* = \left( \frac{-\cos\varphi}{r} v + \frac{dv}{R_1 d\varphi} \right) + y^3 \left( \frac{\cos\varphi}{R_2} v - r \frac{d}{R_1 d\varphi} \left( \frac{v}{R} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.131a)$$

Sind keine Scherkräfte da, so wird noch  $v = \gamma_{3\varphi} = 0$

Gehen wir auch hier auf das KOS  $1=\varphi, 2=\vartheta, 3=z-y^2$  über, so erhalten wir analog wie in [Worch], S. 363, und Bild 4.14 bzw. [Flügge], S. 71

$$\begin{aligned} \epsilon_{\varphi 2} &= \left( \frac{du}{R_1 d\varphi} + \frac{w}{R_1} \right) + z \frac{d}{R_1 d\varphi} \left( \frac{u}{R_1} - \frac{dw}{R_1 d\varphi} \right) = \epsilon_{\varphi} + z(-\chi_{\varphi}) \\ \epsilon_{\vartheta 2} &= \left( \frac{w}{R_2} + u \frac{\cotan\varphi}{R_2} \right) + z \frac{\cotan\varphi}{R_2} \left( \frac{u}{R_1} - \frac{dw}{R_1 d\varphi} \right) = \epsilon_{\vartheta} + z(-\chi_{\vartheta}) \\ \gamma_{\varphi\vartheta 2} &= \left( \frac{-\cos\varphi}{r} v + \frac{dv}{R_1 d\varphi} \right) + z \left( r \frac{d}{R_1 d\varphi} \left( \frac{v}{R_2} \right) - v \frac{\cos\varphi}{R_2} \right) = \gamma_{\varphi\vartheta} + z(-\chi_{\varphi\vartheta}) \end{aligned} \quad (4.131b)$$

mit  $-\chi_{\varphi} = \frac{d\chi}{R_1 d\varphi}$  und  $-\chi_{\vartheta} = \frac{\cotan\varphi}{R_2} \chi$  nach Bild 4.14.

#### 4.4.2 Zylinderschale

Bei der Zylinderschale liegt als Ortsvektor vor (vgl. (4.108))

$$\begin{aligned} \bar{L} \bar{r}(\vartheta, \vartheta) &= \pi_1 x^1 + \pi_2 x^2 + \pi_3 x^3 \\ &= \pi_1 R_1 \cos\vartheta + \pi_2 R_2 \sin\vartheta + \pi_3 z \end{aligned} \quad (4.132)$$

mit den krummlinigen Koordinaten

$$\Theta^1 = \frac{z}{L^1}, \quad \Theta^2 = \vartheta, \quad \left( \Theta^3 = \frac{y^3}{L^3} \right)$$

wobei die  $\bar{L} = L^1 = R_2$  gesetzt werden können.

Vereinfacht gegenüber der allgemeinen Rotationsschale ergeben sich

$$\alpha_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \Theta^1} = \pi_3, \quad \alpha_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \Theta^2} = (-\pi_1 \sin\vartheta + \pi_2 \cos\vartheta) \frac{R_2}{L^1}$$

und

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1 \times \alpha_2}{|\alpha_1 \times \alpha_2|} = \frac{\begin{vmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \end{vmatrix}}{|\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta|} = -\pi_1 \cos\vartheta - \pi_2 \sin\vartheta \quad (4.133)$$

Als Metriktensoren finden wir mit  $\sqrt{a} \triangleq |\alpha_1 \times \alpha_2| = 1$

$$(a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Krümmungstensoren werden aus den Ableitungen der Basisvektoren ermittelt zu (mit  $b_{12} = \alpha_3 \cdot \alpha_{2,2}$  und  $b_2^2 = b_{12} a^{11}$ )

$$(b_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b_{\beta}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie man an  $a_{12} = b_{12} = 0$  erkennt, stellen die krummlinigen Koordinaten  $\frac{\Delta}{R_2}, \mathcal{N}$  Krümmungslinien dar.

Die mittlere und die Gaußsche Krümmung betragen

$$2H = b_{\alpha}^{\alpha} = 1, \quad K = \det(b_{\beta}^{\alpha}) = 0 \quad (\hat{=} \text{parabol. Krümmung}),$$

und infolge Glgn. (4.114) die Hauptkrümmungen

$$R_1 = \frac{\bar{L}_1}{b_1^1} = \infty, \quad R_2 = \frac{\bar{L}_2}{b_2^2} = R_2.$$

Es läßt sich weiter nachweisen, daß alle Christoffelsymbole gleich Null sind.

Auch hier ist für die gewickelte Verbundschale von Interesse, welche Linien auf der Zylinderoberfläche geodätisch sind. Da die  $\ddot{\mathcal{N}}^{\mu} = 0$  verbleiben die Differentialgleichungen

$$\frac{\ddot{\mathcal{N}}}{R_2} = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{\mathcal{N}} = 0.$$

Wenn man ein Bogenelement  $s$  auf der Erzeugenden  $\Delta$  betrachtet, so ist dort  $\mathcal{N} = \text{const.}$ , also  $\ddot{\mathcal{N}} = 0$  erfüllt. Für die Ebene  $\Delta = \text{const.}$  ist die erste Gleichung erfüllt. Wird nun aber ein Bogenelement in beliebiger Schraubenwicklungsrichtung betrachtet, so ist

$$ds = \frac{d\mathcal{N}}{\cos\alpha} = R_2 \frac{d\mathcal{N}}{\sin\alpha}.$$

Eingesetzt in die obigen Differentialgleichungen ergibt das

$$\frac{1}{R_2} \frac{d}{ds} \left( \frac{d\mathcal{N}}{ds} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{d}{ds} (\cos\alpha) = 0, \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{d\mathcal{N}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{\sin\alpha}{R_2} \right) = 0.$$

Daraus folgt, wenn längs der Bogenlänge  $s$  gilt

$$\cos\alpha = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \sin\alpha = \text{const.}, \quad (4.134)$$

daß der Faden unter einem beliebigen, aber über der Zylinderlänge konstanten Wickelwinkel und auf geodätischen Linien abgelegt ist.



Infolge des Verschwindens der Christoffelsymbole vereinfachen sich die Gleichgewichtsbedingungen der allgemeinen Rotationsschale zu

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta}_{,\alpha} - b_{\alpha}^{\beta} q^{\alpha} + \underline{p}^{\beta} &= 0 \\ q^{\alpha}_{,\alpha} + n^{22} b_{22} + \underline{p}^3 &= 0 \\ m^{\alpha\beta}_{,\alpha} - q^{\beta} &= 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Zylinder unter} \\ \text{allg. Belastung} \\ \text{(T.S.)} \end{array} \quad (4.135a)$$

und es verbleiben dann als einzelne Gleichungen

$$\begin{aligned} n^{11}_{,1} + n^{21}_{,2} + \underline{p}^1 &= 0 \\ n^{12}_{,1} + n^{22}_{,2} + \underline{p}^2 &= 0 \\ q^1_{,1} + q^2_{,2} + n^{22} b_{22} + \underline{p}^3 &= 0 \\ m^{11}_{,1} + m^{21}_{,2} - q^1 &= 0 \\ m^{12}_{,1} + m^{22}_{,2} - q^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.135b)$$

Hierin verschwinden bei Beschränkung auf rotationssymmetrische Belastung die partiellen Ableitungen in 2-Richtung. Wenn weiterhin  $q^2$  entfällt, so verbleiben (auch für Torsion)

$$\begin{aligned} n^{11}_{,1} + \underline{p}^1 &= 0 \\ n^{12}_{,1} + \underline{p}^2 &= 0 \\ q^1_{,1} + n^{22} + \underline{p}^3 &= 0 \\ m^{11}_{,1} - q^1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.136)$$

Die technischen Gleichungen für die Zylinderschale ergeben sich direkt aus den Beziehungen (4.127) und (4.131), wenn  $r^1 = r'' = 0$  gesetzt wird, zu

$$\begin{aligned} \frac{dN_s}{ds} + p_s &= 0 \\ \frac{dQ}{ds} + \frac{1}{R_z} N_s + p &= 0 \\ \frac{dM_s}{ds} - Q &= 0 \\ \frac{dN_{s\theta}}{ds} + p_{s\theta} &= 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Zylinder unter} \\ \text{rotationssymm.} \\ \text{Belastung inkl.} \\ \text{Torsion} \end{array} \quad (4.137)$$

und (vgl. [Worch], S. 289; [Whitney, 1971]; [Hsu/Wang] und [Flügge], S. 139 für beide KOS.

$$\begin{aligned} \epsilon_{s\theta} &= \frac{du}{ds} - y^3 \frac{d}{ds} \left( \frac{dw}{ds} \right) \equiv \left( \frac{du}{ds} + z \left( -\frac{d^2 w}{ds^2} \right) \right) \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{-w}{R_z} \\ \gamma_{s\theta} &= \frac{dv}{ds} + y^3 \left( \frac{-dv}{ds} \right) \equiv \left( \frac{dv}{ds} + z \left( \frac{dv}{ds} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.138)$$

Wird der Zusammenhang zwischen Spannungen und Schnittgrößen verlangt, so braucht in Glg. (4.129) nur  $R_1 = \infty$  und  $R_2 = R_z$  eingesetzt werden. Bei Vernachlässigung der Krümmungsglieder sind die Beziehungen bei der Zylinderschale mit denen der allgemeinen Rotationsschale identisch. Im übrigen wird  $N_{\alpha\beta}$  dann gleich  $N_{\beta\alpha}$ .

#### 4.5 Ebene Flächenträger

##### 4.5.1 Gekoppeltes Platten- Scheibenproblem

Eine weitere Vereinfachung in der zweidimensionalen Theorie stellt der Übergang zum ebenen Flächenträger dar. Vereinfacht gegenüber Gleichung (4.108) kann jetzt angesetzt werden ( $\bar{L} = 1$ )

$$\kappa(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \bar{\kappa}(\Theta^1, \Theta^2) + \Theta^3 \alpha_3, \quad (4.139)$$

wobei  $\alpha_3$  einen konstanten Einheitsvektor darstellt. Wie zuvor wird gewählt

$$\Theta^3 = \Theta = \frac{y^3}{t}, \quad \lambda = \frac{t}{L} = t.$$

Die Basisvektoren des Schalenraumes sind mit  $\alpha_\alpha = \bar{\alpha}_{,\alpha}$

$$\alpha_{1,1} = \alpha_1, \quad \alpha_{2,2} = \alpha_2, \quad \alpha_{3,3} = \alpha_3 = \alpha^3.$$

Als Metrikkomponenten liegen vor

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha 3} = 0, \quad g_{33} = 1$$

$$g^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha 3} = 0, \quad g^{33} = 1$$

und

$$\sqrt{g} = \sqrt{a}.$$

Von Null verschieden sind die Christoffel-Symbole zur Bestimmung von  $\alpha_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \alpha_\lambda$  bzw.  $\alpha^{\alpha,\beta} = -\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha \alpha^\lambda$ , also bezüglich der Mittel-ebene

$$\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha = \frac{1}{2} a^{\alpha\lambda} (a_{\lambda\mu,\beta} + a_{\lambda\mu,\beta} - a_{\beta\mu,\lambda}).$$

Da keine Krümmung vorhanden ist, sind ( $R_1 = R_2 = \infty$ )

$$b_{\alpha\gamma} = H = K = 0 \quad (4.140)$$

Nach Streichung der Krümmungsglieder in (4.99) kommen wir zu den Gleichgewichtsbedingungen des allgemeinen Platten-Scheibenproblems

$$\begin{aligned} n^{\alpha s}|_\alpha + \underline{p}^s &= 0 \\ q^\alpha|_\alpha + \underline{p}^3 &= 0 \\ m^{\alpha\beta}|_\alpha - q^3 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Allgemeines} \\ \text{Platten-Scheibenproblem} \end{array} \quad (4.141)$$

Die Verzerrungstensorskomponenten lauten nach Gleichung (4.125)

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha} + \lambda \Theta (w_{\alpha|\beta} + w_{\beta|\alpha})) , \\ &= \frac{1}{2} (v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha} - 2v_{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} + \lambda \Theta (w_{\alpha,\beta} + w_{\beta,\alpha} - 2w_{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma})) \quad (4.142) \\ \gamma_{\alpha 3} &= \gamma_{33} = 0 . \end{aligned}$$

Als Verträglichkeitsbedingung verbleibt

$$w_{\alpha} = -w_{3,\alpha} \quad (4.143)$$

### Fall 1: Schiefe Koordinaten

Hier lautet der Ortsvektor zur Mittelfläche

$$\begin{aligned} \bar{w}(\Theta^1, \Theta^2) &= n_1 x^1 + n_2 x^2 \\ &= n_1 (x + y \cos \omega) + n_2 y \sin \omega . \end{aligned} \quad (4.144)$$

mit den geradlinigen, hier nicht normierten Koordinaten

$$\Theta^1 = x , \quad \Theta^2 = y , \quad (\Theta^3 = y^3/t) .$$

Die kovariante Basis ist

$$u_1 = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = n_1 , \quad u_2 = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = n_1 \cos \omega + n_2 \sin \omega , \quad (u_3 = n_3) .$$

Als Metriktensoren liegen vor

$$(a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & \cos \omega \\ \cos \omega & 1 \end{pmatrix} , \quad a = \sin^2 \omega , \quad (a^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2 \omega} & \frac{-\cos \omega}{\sin^2 \omega} \\ \frac{-\cos \omega}{\sin^2 \omega} & \frac{1}{\sin^2 \omega} \end{pmatrix} .$$

Die kontravariante Basis heißt

$$u^1 = n_1 - n_2 \cotan \omega , \quad u^2 = n_2 / \sin \omega .$$

Alle Christoffel-Symbole sind Null, da die Ableitungen des Metriktensors verschwinden.

Beim Übergang auf physikalische Komponenten gilt

$$N_x = \check{n}^{11} = \sqrt{\frac{1}{1/\sin^2 \omega}} n^{11} , \quad N_{xy} = \check{n}^{12} = \sqrt{\frac{1}{1/\sin^2 \omega}} n^{12} , \quad N_y = \check{n}^{22} = \sqrt{\frac{1}{1/\sin^2 \omega}} n^{22}$$

$$M_x = \check{m}^{11} = \sqrt{\frac{1}{1/\sin^2 \omega}} m^{11} , \quad M_{xy} = \check{m}^{12} = \sqrt{\frac{1}{1/\sin^2 \omega}} m^{12} , \quad M_y = \check{m}^{22} = \sqrt{\frac{1}{1/\sin^2 \omega}} m^{22}$$

$$Q_x = \check{q}^1 = \sqrt{\frac{1}{1/\sin^2 \omega}} q^1 , \quad Q_y = \check{q}^2 = \frac{1}{\sqrt{1/\sin^2 \omega}} q^2$$

$$P_x = \check{p}^1 = \sqrt{1} \underline{p}^1 , \quad P_y = \check{p}^2 = \sqrt{1} \underline{p}^2 , \quad P_z = \check{p}^3 = \underline{p}^3 ,$$

und

$$u = \overset{*}{v}_1 = \sqrt{1/\sin^2 \omega} v_1, \quad v = \overset{*}{v}_2 = \sqrt{1/\sin^2 \omega} v_2, \quad w = \overset{*}{w}_3 = w_3$$

$$\overset{*}{w}_1 = \sqrt{1/\sin^2 \omega} w_1, \quad \overset{*}{w}_2 = \sqrt{1/\sin^2 \omega} w_2$$

$$\overset{*}{\tau}_{11} = \frac{1}{\sin^2 \omega} \tau_{11}, \quad \overset{*}{\tau}_{12} = \frac{1}{\sin^2 \omega} \tau_{12}, \quad \overset{*}{\tau}_{22} = \frac{1}{\sin^2 \omega} \tau_{22}.$$

Damit wird aus Glg. (4.141) (vgl. [Worch], S. 256) unter Beachtung der Vorzeichen nach Bild 4.15

$$\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + p_x = 0$$

$$\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y = 0$$

Ebenen, schiefer  
Flächenträger

$$\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0$$

(4.145)

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0.$$

Wir können diese DGLn noch weiter vereinfachen, da  $\tau^{ik} = \tau^{ki}$  und  $R_1 = R_2 = \infty$  sind, so daß  $N_{xy} = N_{yx}$  und  $M_{xy} = M_{yx}$  werden. Die Formänderungsbeziehungen sind, wenn  $\lambda \theta = \gamma^3$

$$\overset{*}{\tau}_{11} = \epsilon_{x\theta} = \frac{1}{\sin \omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma^3 \frac{\partial \overset{*}{w}_1}{\partial x} \right) = \epsilon_x - \frac{\gamma^3}{\sin \omega} \frac{\partial \overset{*}{w}_1}{\partial x}$$

$$\overset{*}{\tau}_{22} = \epsilon_{y\theta} = \frac{1}{\sin \omega} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \gamma^3 \frac{\partial \overset{*}{w}_2}{\partial y} \right) = \epsilon_y - \frac{\gamma^3}{\sin \omega} \frac{\partial \overset{*}{w}_2}{\partial y} \quad (4.146a)$$

$$\overset{*}{\tau}_{12} = \tau_{xy\theta} = \frac{1}{\sin \omega} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma^3 \left[ \frac{\partial \overset{*}{w}_1}{\partial y} + \frac{\partial \overset{*}{w}_2}{\partial x} \right] \right).$$

und aus der Verträglichkeitsbedingung folgt

$$\overset{*}{w}_1 = \frac{-1}{\sin \omega} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \overset{*}{w}_2 = \frac{-1}{\sin \omega} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (4.146b)$$

### Fall 2: Kartesische Koordinaten

In diesem Fall ist in den vorgenannten Gleichungen nur  $\sin \omega = 1$  zu setzen, und es vereinfachen sich die Spannungs-Schnittgrößen-Beziehungen zu (bei ebenen Schalen wird allgemein die Koordinate  $z$  wie  $\gamma^2$  gerichtet angenommen,  $z \equiv \gamma^2$ )

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x d\gamma^3, \quad N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} d\gamma^3, \quad N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y d\gamma^3$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x y^2 dy^3, \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} y^2 dy^3, \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y y^2 dy^3 \quad (4.147)$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{x0} dy^3, \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{y0} dy^3.$$

### Fall 3: Zylinderkoordinaten

Der Ortsvektor heißt hier

$$\bar{r} = n_1 x^1 + n_2 x^2 = n_1 r \cos \vartheta + n_2 r \sin \vartheta. \quad (4.148)$$

Als krummlinige Koordinaten werden verwendet (Bild 4.15)

$$\Theta^1 = r, \quad \Theta^2 = \vartheta.$$

Das liefert die kovariante Basis

$$a_{\alpha 1} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} = n_1 \cos \vartheta + n_2 \sin \vartheta, \quad a_{\alpha 2} = -n_1 r \sin \vartheta + n_2 r \cos \vartheta$$

und die Metriktensoren

$$(a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (a^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix}.$$

Weil in den Metriktensoren nur  $r$  vorkommt, können auch nur Ableitungen nach  $r$  vorkommen. Das bedeutet, daß nur drei Christoffel-Symbole zu berechnen sind

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} a^{11} (-a_{22,1}) = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2r = -r,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} a^{22} (a_{22,1}) = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2r = \frac{1}{r}.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen heißen

$$\begin{aligned} n^{11}_{,1} + n^{21}_{,2} + \Gamma_{21}^2 n^{11} + \Gamma_{22}^1 n^{22} + \underline{p}^1 &= 0 \\ n^{12}_{,1} + \Gamma_{12}^2 n^{12} + n^{22}_{,2} + 2\Gamma_{21}^2 n^{12} + \underline{p}^2 &= 0 \\ q^1_{,1} + q^2_{,2} + \Gamma_{21}^2 q^1 + \underline{p}^3 &= 0 \\ m^{11}_{,1} + m^{21}_{,2} + \Gamma_{21}^2 m^{11} + \Gamma_{22}^1 m^{22} - q^1 &= 0 \\ m^{12}_{,1} + \Gamma_{12}^2 m^{12} + m^{22}_{,2} + \Gamma_{21}^2 m^{12} + \Gamma_{21}^2 m^{21} - q^2 &= 0. \end{aligned}$$

Bei Beschränkung auf rotationssymmetrische Belastung

$$\begin{aligned}
 n^{11},1 + 1/r n^{11} - r n^{22} + \underline{p}^1 &= 0 \\
 q^{1},1 + 1/r q^1 + \underline{p}^3 &= 0 \\
 m^{11},1 + 1/r m^{11} - r m^{22} - q^1 &= 0 \\
 n^{12},1 + \frac{3}{r} n^{12} &= 0 .
 \end{aligned}
 \tag{4.149}$$

Der Übergang auf technische Größen führt zu

$$\begin{aligned}
 \overset{*}{n}^{11} &= \sqrt{\frac{1}{r}} n^{11} = N_r , & \overset{*}{n}^{22} &= \sqrt{\frac{r^2}{1/r^2}} n^{22} = N_{\vartheta} , & \overset{*}{n}^{12} &= \sqrt{\frac{1}{1/r^2}} n^{12} = N_{r\vartheta} \\
 \overset{*}{m}^{11} &= r \cdot m^{11} = M_r , & \overset{*}{m}^{22} &= r^2 m^{22} = M_{\vartheta} \\
 \overset{*}{q}^1 &= \frac{1}{\sqrt{r}} q^1 = Q_r , & & & & \\
 \overset{*}{p}^1 &= \sqrt{r} \underline{p}^1 = p_r , & \overset{*}{p}^3 &= p^3 = p \\
 \overset{*}{v}_1 &= \sqrt{r} v_1 = u , & \overset{*}{v}_2 &= \sqrt{1/r^2} v_2 = v , & \overset{*}{w}_3 &= w_3 = w \\
 \overset{*}{w}_1 &= \sqrt{r} w_1 , & \overset{*}{w}_2 &= \sqrt{1/r^2} w_2 \\
 \overset{*}{\gamma}_{r1} &= \sqrt{1 \cdot 1} \gamma_{r1} = \epsilon_{r0} , & \overset{*}{\gamma}_{12} &= \sqrt{1 \cdot \frac{1}{r^2}} \gamma_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{r\vartheta} , & \overset{*}{\gamma}_{22} &= \frac{1}{r^2} \gamma_{22} = \epsilon_{\vartheta 0} ,
 \end{aligned}$$

und weiter zu den Gleichgewichtsbedingungen ([Worch], S. 207, dort aber linkshändiges KOS)

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r} N_r - r \frac{1}{r^2} N_{\vartheta} + p_r &= 0 \\
 \frac{dQ_r}{dr} + \frac{1}{r} Q_r + p &= 0 \\
 \frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r} M_r - \frac{1}{r} M_{\vartheta} - Q_r &= 0 \\
 \frac{dN_{r\vartheta}}{dr} + \frac{2}{r} N_{r\vartheta} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.150}$$

und den Verzerrungs- und Verträglichkeitsbeziehungen

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{r0} &= \frac{du}{dr} + y^3 \frac{d\overset{*}{w}_1}{dr} = \epsilon_r + y^3 \frac{d\overset{*}{w}_1}{dr} \\
 \epsilon_{\vartheta 0} &= \frac{u}{r} + y^3 \frac{\overset{*}{w}_1}{r} = \epsilon_{\vartheta} + y^3 \frac{\overset{*}{w}_1}{r} \\
 \gamma_{r\vartheta 0} &= \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} + y^3 \left( \frac{d\overset{*}{w}_2}{dr} - \frac{\overset{*}{w}_2}{r} \right) \quad \text{Falls Torsion vorhanden.} \\
 \overset{*}{w}_1 &= -\frac{dw}{dr} , \quad \left( \overset{*}{w}_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} = 0 \right) .
 \end{aligned}
 \tag{4.151}$$

Die Beziehungen zwischen den Spannungen und den Schnittgrößen sind

$$\begin{aligned}
 N_r &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_r dy^3, & N_{r\alpha} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{r\alpha} dy^3 = N_{\alpha r}, & N_\alpha &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\alpha dy^3 \\
 M_r &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_r y^3 dy^3, & M_\alpha &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\alpha y^3 dy^3, & Q_r &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{r\alpha} dy^3
 \end{aligned}
 \tag{4.152}$$

#### 4.5.2 Scheibe

Für geradlinig und kreisförmig begrenzte Scheiben sollen die Formeln direkt aus den vorstehenden Gleichungen (4.139), (4.144) etc. abgeleitet werden. Die Entkopplung von Belastungen in der Ebene und normal zur Ebene liefert für die Schiefe Scheibe (vgl. [Worch, 1964], S. 324 und [Worch, 1967])

$$\frac{1}{\sin\omega} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{\sin\omega} \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + p_x = 0
 \tag{4.153}$$

$$\frac{1}{\sin\omega} \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\sin\omega} \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y = 0$$

$$\epsilon_{x\ominus} = \epsilon_x = \frac{1}{\sin\omega} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{y\ominus} = \epsilon_y = \frac{1}{\sin\omega} \frac{\partial v}{\partial y}
 \tag{4.154}$$

$$\gamma_{xy\ominus} = \gamma_{xy} = \frac{1}{\sin\omega} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

und die Kreisscheibe 
$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r} (N_r - N_\alpha) + p_r = 0
 \tag{4.155}$$

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_\alpha = \frac{u}{r}
 \tag{4.156}$$

$$\tau_{r\alpha} = 0$$

#### 4.5.3 Platte

Bei Belastungen normal zur Ebene verbleiben, Schiefe Platte,

$$\frac{1}{\sin\omega} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{\sin\omega} \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_y = 0
 \tag{4.157}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_x = 0$$

und

$$\begin{aligned} \epsilon_{x\theta} &= -\frac{y^3}{\sin^2\omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \epsilon_{y\theta} &= -\frac{y^3}{\sin^2\omega} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy\theta} &= -\frac{y^3}{\sin^2\omega} 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.158)$$

Der Sonderfall der rechteckigen Platte wird mit  $\sin\omega = 1$  erhalten.

#### Kreisplatte

$$\frac{dQ_r}{dr} + \frac{1}{r} Q_r + p = 0 \quad (4.159)$$

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r} (M_r - M_{\theta}) - Q_r = 0$$

und

$$\begin{aligned} \epsilon_{r\theta} &= -y^3 \frac{d^2 w}{dr^2}, & \epsilon_{\theta\theta} &= -\frac{y^3}{r} \frac{dw}{dr} \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.160)$$

### 4.6 Mehrschichtige Flächenträger

#### 4.6.1 Allgemeines

Zur Ermittlung der Spannungen und Verformung<sup>en</sup> in den Schichten von Verbundkörpern wird die sogenannte "Kontinuumstheorie" herangezogen. Sie berücksichtigt im Gegensatz zur später beschriebenen "Netztheorie" das Mittragen des Harzes. Eine ausführliche Darstellung dieser Theorie findet man bei Puck, 1967, und Wiedemann.

Die Grundlagen der "Kontinuumstheorie" der Faserverbundtheoretiker sind natürlich dieselben wie in der Kontinuumstheorie des Elastizitätstheoretikers. Das Wort Kontinuumstheorie wird jedoch von Verbundtheoretikern einschränkend für zweidimensionale, mehrschichtige Kontinua verwendet, wie dünnwandige Schalen, Scheiben und Platten.

Die "Kontinuumstheorie" wird bei der Berechnung von "Mehrschichtenverbunden" zur Ermittlung von Spannungen und Verformungen unterhalb der Reißbildungsgrenze herangezogen. Als Gedankenmodell für das wirkliche Laminat benutzt man dabei einen Verbund aus einzelnen, homogen gedachten Schichten, die entweder quasiisotrop bzw. isotrop (Matten, reine Harzschichten) oder orthotrop (Roving, Gelege, Gewebe) sind. Fasern in gleicher Richtung werden für die Berechnung zu einer gesonderten, unidirektionalen (UD-)Schicht zusammengefaßt. Wie die Spannungen in einer dreidimensionalen UD-Schicht bezeichnet werden, zeigt Bild 4.16.



Bevor die Gleichgewichtsbedingungen und die Verzerrungsbeziehungen für verschiedene mehrschichtige Tragkonstruktionen angeschrieben werden, müssen noch einige spezifische Größen des Faserverbundes definiert werden. Das kann vereinfacht am Beispiel des ebenen Mehrschichtenverbundes geschehen.

Wie aus Bild 4.17 ersichtlich ist, setzt sich die ebene Beanspruchung einer UD-Schicht im allgemeinen aus drei auf die natürlichen Achsen bezogenen Schicht-Mittelspannungen zusammen. Es sind das die zur Faserrichtung parallele Längsbeanspruchung  $\sigma_{||}$ , die zur Faserrichtung senkrecht wirkende Querbeanspruchung  $\sigma_{\perp}$  und die Schubspannung  $\tau_{\#}$ . Sie sind mittlere Spannungen der heterogenen Einzelschichten und somit auf die Gesamtwandstärke der Schicht bezogen. Es können deshalb mikroskopisch gesehen von Ort zu Ort andere Werte vorliegen. Da die UD-Schicht<sup>en</sup> beliebig ausgerichtet sind, müssen ihre Spannungen auf das Hauptachsensystem des Bauteils transformiert werden (Bild 4.18).

Um nun den Spannungsvektor im Hauptachsensystem zu erhalten

$$\{\sigma\}_k = (\sigma_{||}, \sigma_{\perp}, \tau_{\#})_k^T \quad (4.161)$$

muß er gemäß

$$\{\sigma\}_k = [T_{\sigma}]_k \{\sigma_{ub}\}_k \quad (4.162)$$

über die Transformationsmatrix

$$[T_{\sigma}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4.163)$$

aus dem Spannungsvektor der UD-Schicht ermittelt werden

$$\{\sigma_{ub}\}_k = (\sigma_{||}, \sigma_{\perp}, \tau_{\#})_k^T \quad (4.164)$$

Für die Dehnungen gelten analog

$$\{\epsilon\}_k = [T_{\epsilon}] \{\epsilon_{ub}\}_k \quad (4.165)$$

$$[T_{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \sin 2\alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4.166)$$

$$\{\epsilon_{ub}\}_k = (\epsilon_{||}, \epsilon_{\perp}, \gamma_{\#})_k^T \quad (4.167)$$

Die Zusammenhänge zwischen den Transformationsmatrizen werden dabei durch

$$[T_{\sigma}]^{-1} = [T_{\varepsilon}]^T \quad \text{und} \quad [T_{\varepsilon}]^{-1} = [T_{\sigma}]^T \quad (4.162)$$

dargestellt.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen sei hier noch einmal wiederholt: Die Kontinuumstheorie ist überall dort anzuwenden, wo ohne Mitwirkung der Matrix ein Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften nicht möglich oder eine Dimensionierung auf Reißbildung notwendig ist.

#### 4.6.2 Rotationsschale unter rotationssymmetrischer Belastung

Für die Gesamtschale gelten bei Mehrschichtenverbunden wieder die Gleichgewichtsbedingungen (4.127), nur daß üblicherweise von der Koordinate  $s$  auf  $\varphi$  übergegangen wird ( $Q = Q_{\varphi}$ , [Rabich], S. 1027 und 1041. Achtgeben auf die andere Definition der Momente) Bild 4.19

$$\begin{aligned} \text{(längs)} \quad & \frac{dN_{\varphi}}{R_1 d\varphi} + \frac{\cos\varphi}{r} (N_{\varphi} - N_s) - \frac{Q}{R_1} + p_{\varphi} = 0 \\ \text{(normal)} \quad & \frac{dQ}{R_1 d\varphi} + \frac{\cos\varphi}{r} Q + \frac{N_{\varphi}}{R_1} + \frac{N_s}{R_2} + p = 0 \\ & \frac{dM_{\varphi}}{R_1 d\varphi} + \frac{\cos\varphi}{r} (M_{\varphi} - M_s) - Q = 0 \\ \text{(Torsion)} \quad & \frac{dN_{\varphi s}}{R_1 d\varphi} + \frac{\cos\varphi}{r} (N_{\varphi s} + N_{s\varphi}) + p_s = 0. \end{aligned} \quad (4.169)$$

In den vorstehenden Gleichungen verschwinden bei reinem Innendruck ( $p$  ist dann  $-p_i$ ) die Größen  $p_{\varphi}$  und  $p_s$ , während bei Fliehkraft nur  $p_s$  herausfällt und  $p_{\varphi}$  nebst  $p_s$  die Fliehkraftkomponenten beinhalten. Es gilt weiter, daß mit  $p_s = 0$  die Torsions-Gleichung für jede Einzelschicht ihre Funktion behält, wohingegen sie bei homogenen Schalen direkt weggelassen werden kann.

Ohne Vernachlässigung der Krümmungsanteile  $z/R_1$  und  $z/R_2$  setzen sich die Schnittgrößen folgendermaßen aus den Schichtanteilen zusammen (gegenüber Glg. (4.129 b) sind nun die Momente durch das rechts-händige KOS und ohne sonstige Definitionen festgelegt)

$$\begin{aligned} N_{\varphi} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\varphi} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz, & N_s &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_s \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz \\ N_{\varphi s} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\varphi s} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz, & N_{s\varphi} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{s\varphi} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz. \end{aligned} \quad (4.170a)$$

$\tau_{\varphi s} = \tau_{s\varphi}$

$$M_y = \int \sigma_y \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) z dz \quad , \quad M_x = \int \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) z dz \quad , \quad (4.170a)$$

$$Q_y = \int \tau_{yz} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz .$$

Die vorstehenden Gleichungen beinhalten Spannungen, die in den einzelnen Schichten auftreten. Außerdem sind darin Krümmungsterme  $z/R_1, z/R_2$  einer Bezugsfläche zu finden, für die im allgemeinen die Mittelfläche gewählt wird. Die Schubkräfte  $N_{yx}, N_{xy}$  verschwinden bei Rotationssymmetrie und falls  $p_x = 0$  über dem Laminat, während zwischen den einzelnen UD-Schichten ein Eigenspannungszustand zwischen den Schicht-Anteilen besteht.

Aus Herstellungsgründen sollten Faserverbundschaalen relativ dünn sein. Es entfallen dann die Krümmungsterme und infolgedessen wird  $N_{yx} = N_{xy}$ .

Mit den Annahmen:

1. Die Faserverbundschaale ist schwach gekrümmt  $\left(\frac{z}{R_1}, \frac{z}{R_2} \lesssim \frac{1}{15}\right)$
2. Die Faserverbundschaale ist dünn  $\left(\frac{z}{R_1}, \frac{z}{R_2} \text{ werden kleiner}\right)$
3. Die Faserverbundschaale besteht aus vielen sehr dünnen Schichten (kein Sandwich)

ergibt sich:

- Alle Spannungen dürfen als konstant über der Schichtdicke angenommen werden;
- es kann das Integral in (4.170 a) gezogen werden;
- die Schnittgrößen setzen sich aus den Schichtanteilen zusammen.

Es lassen sich dann die obigen Gleichungen vereinfacht schreiben (bzgl.  $h_k$  s. Bild 4.14)

$$(N_i, M_i) = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_i(1, z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{i,k}(1, z) dz \quad (4.170b)$$

(i, k = 1, 2, n)

Infolge  $\sigma_k = \text{const.}$  bzw. für dünne Schichten kann man direkt integrieren und die Schichtstärken  $t_k$  einführen.

Somit werden für n Schichten (entsprechend Bild 4.17)

$$\begin{aligned}
N_{\varphi} &= \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_{\varphi k} t_k & N_{\mathcal{N}} &= \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_{\mathcal{N} k} t_k \\
N_{\varphi \mathcal{N}} &= \sum_{k=1}^n \tau_{\varphi \mathcal{N} k} t_k = N_{\mathcal{N} \varphi} & Q_{\varphi} &= \sum_{k=1}^n \tau_{\varphi \mathcal{N} k} t_k \\
M_{\varphi} &= \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_{\varphi k} \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) & M_{\mathcal{N}} &= \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_{\mathcal{N} k} \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2)
\end{aligned} \tag{4.170c}$$

wobei  $t_k$  die Einzelschichtdicken und  $t$  die Gesamtdicke des Verbundes darstellen. Die Gleichungen (4.170 c) gelten natürlich nach Wegfallen der Krümmungen auch für den ebenen, mehrschichtigen Flächenträger. Für die Verzerrungen sind die Glgn. (4.131) maßgebend. Ist außerdem keine Torsion vorhanden, so werden  $N_{\varphi \mathcal{N}} = 0$  und  $v = 0$ . Die Scherkräfte  $N_{\varphi \mathcal{N} k}$  verschwinden dadurch jedoch nicht, da sie immer noch einen Eigenspannungszustand bilden können (s. auch [Reuter]). Es gilt somit, wenn  $w/R_1$  und  $u/R_1$  vergleichsweise klein sind analog (4.131 a)

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon_z\} &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{du}{ds} \\ \frac{u \cotan \varphi + w}{R_z} \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{c} -\frac{d}{ds} \left( +\frac{dw}{ds} \right) \\ \frac{\cotan \varphi}{R_z} \left( \frac{dw}{ds} \right) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{\varphi} \\ \varepsilon_{\mathcal{N}} \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{c} -\chi_{\varphi} \\ -\chi_{\mathcal{N}} \end{array} \right\} \\
&= \{\varepsilon\} + z \{-\chi\}
\end{aligned} \tag{4.171a}$$

bzw. in Laminatbeschreibungsweise

$$\{\varepsilon_z\} = \{\hat{\varepsilon}\} + \frac{h_k + h_{k-1}}{2} \{-\hat{\chi}\} \quad (\text{Bernoulli}). \tag{4.171b}$$

In der Theorie von Mehrschichtenverbunden ist die Matrizen-Schreibweise besonders angebracht, weil im allgemeinen numerische Rechenverfahren bei Lösung der Verbund-Probleme herangezogen werden müssen. Bei der Anwendung dieser Verfahren werden Matrizenmultiplikation- und Inversionsprogramme benutzt, die praktisch überall vorliegen.

### 4.6.3 Zylinderschale

Wenn auch hier angenommen wird, daß die Krümmungsglieder klein gegen 1 sind, dann können statt der Glg. (4.170 a) mit  $R_1 = \infty$  die Glg. (4.170 c) verwendet werden.

Bezüglich der Gleichgewichtsbedingungen und Formänderungsbeziehungen siehe Abschnitt 4.4.2, die Glg. (4.137) und (4.138).

#### 4.6.4 Gekoppeltes Platten-Scheibenproblem der rechteckigen Platte

Die Gleichgewichtsbedingungen sind bei dieser Struktur mit sin in den Glgn. (4.145) enthalten.

Als Spannungs-Schnittgrößenbezeichnungen liegen ( $h_k$  in Richtung  $y^3$  positiv gemessen) wie zuvor als

$$N_x = \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_{xk} t_k, \quad N_y = \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_{yk} t_k, \quad N_{xy} = \sum_{k=1}^n \tau_{xyk} t_k,$$

$$Q_x = \sum_{k=1}^n \tau_{xz_k} t_k, \quad Q_y = \sum_{k=1}^n \tau_{yz_k} t_k,$$

$$M_x = \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_{xk} \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad M_y = \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_{yk} \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

vor.

Als Formänderungsbeziehungen verbleiben entsprechend (4.146) und Bild 4.19 und  $y^3 = \lambda \Theta$

$$\left\{ \varepsilon_{\Theta} \right\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x\Theta} \\ \varepsilon_{y\Theta} \\ \gamma_{xy\Theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - y^3 \left( \frac{-\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial y} - y^3 \left( \frac{-\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - y^3 \left( -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - y^3 \begin{Bmatrix} -\chi_x \\ -\chi_y \\ -\chi_{xy} \end{Bmatrix}.$$

Falls innere Schichten aus einem Material mit äußerst kleinem Schubmodul bestehen, gilt die Kirchhoffsche Plattentheorie nicht mehr. Ihre Gültigkeit war auf relativ dünne Verbundplatten beschränkt. Der sogenannte Freie-Rand-Effekt [Whitney, 1972] kann mit ihr <sup>ebenfalls</sup> nicht erfaßt werden [Pipes/Pagano, 1970].

Um eine genaue Berechnung durchführen zu können, muß man deshalb von den Beziehungen der dicken Platte ( $\bar{\sigma}_z = 0$ ) ausgehen. Wir benötigen hier nur die Formänderungsbeziehungen, mit denen wir in Kapitel 5 den Schubeinfluß erfassen werden (s. auch [Mawenya/Davies]):

$$\left\{ \varepsilon_{\Theta} \right\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x\Theta} \\ \varepsilon_{y\Theta} \\ \gamma_{xy\Theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \end{Bmatrix} - y^3 \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \\ -\frac{\partial \gamma_y}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.173)$$

#### 4.6.5 Scheibe

Bei der symmetrisch aufgebauten Scheibe entfallen die Beziehungen für Querkraft und Biegemomente in den Glgn. (4.170 c). In allen Formeln können außerdem die Krümmungsglieder, da  $z/R_1 = z/R_2 \ll 1$  vernachlässigt werden.

Im allgemeinen wird bei der Scheibe auf die üblicherweise durch ein Dach gekennzeichneten Laminat-Mittelspannungen übergegangen, wobei es zweckmäßig ist, die Matrixschreibweise zu benutzen.

$$\{\hat{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\tau} \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} N_x/t \\ N_y/t \\ N_{xy}/t \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\tau} \end{Bmatrix}_k = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} \{\sigma\}_k \quad (4.174)$$

Der Spannungsvektor  $\{\hat{\sigma}\}$  setzt sich aus den Schichtanteilen multipliziert mit den Schichtdickenverhältnissen  $t_k/t$  zusammen.

Die vorstehende Darstellungsart ergibt sich ebenso für die Schalen, wenn nur die Membrankräfte übrig bleiben und ein symmetrischer Laminataufbau vorliegt. Ein unsymmetrischer Aufbau führt, wie noch gezeigt werden wird, auch bei reiner Membranbeanspruchung zur Verbiegung der Schale!

Als Gleichgewichtsbedingungen und Formänderungsbeziehungen gelten die entsprechenden Beziehungen in Abschnitt 4.5 bzw. für die gekrümmte Membranschale diejenigen in Abschnitt 4.4.

#### 4.6.6 Sandwichplatte

Zur Erzielung hoher Steifigkeiten in einem Bauteil bietet sich nicht nur die Erhöhung des Elastizitätsmoduls an, sondern auch eine Verstärkung durch konstruktive Maßnahmen, ohne daß dabei ein großer Gewichtszuwachs in Kauf genommen werden muß. Da die Plattendicke mit der dritten Potenz in das Flächenträgheitsmoment eingeht, kommt ihrer Vergrößerung maßgebliche Bedeutung zu.

Maßnahmen zu einer Steifigkeitsvergrößerung stellen bei Kunststofftragteilen die mit einigen Herstellungsverfahren unschwierig herzustellenden Sicken dar und die Sandwichtechnik. Bei dieser Technik wird eine Struktur im einfachsten Fall in der Art gebildet (s. [Oehler/Weber], S. 136), daß zwei dünne äußere Schichten mit einer dicken Zwischenschicht verbunden sind. Die Deckschichten übernehmen die aus

\* Für die numerische Aufbereitung ist die Zahlenindizierung besser.

Biege- bzw. Knickbeanspruchung resultierenden Zug- und Druckspannungen während die Stützschrift das Ausbeulen der Deckschrift verhindert und Scherkräfte übernehmen muß. Die Stützschrift darf deshalb aus einem festigkeits- und steifigkeitsmäßig weicheren Werkstoff bestehen. Als Deckschriften werden u.a. faserverstärkte Polyester- und Epoxidharze eingesetzt.

Als Gleichgewichtsbedingungen sind, wie in Abschnitt 4.54, diejenigen von Glg. (4.145) gültig

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + p_x &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p &= 0 \quad (4.175) \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0. \end{aligned}$$

Die Formänderungsbeziehungen sehen bei Annahme des Ebenbleibens des Querschnittes wie die Glgn. (4.172) aus. Natürlich könnten hier auch andere Annahmen getroffen werden.

Bei den Spannungs-Schnittgrößenbeziehungen kann aber nicht mehr wie bei Annahme dünner Schichten (vgl. Glgn. (4.170 b)) von den Integralen auf Summen übergegangen werden, da die Spannungen im Kern veränderlich sind. Natürlich kann man bei vorhandenem Rechenprogramm für MSV auch eine Sandwichplatte rechnen, wenn man die Stützschrift in viele Einzelschichten zerlegt. Die besonderen Versagensformen bei Sandwichplatten, wie z.B. Knittern der Deckschriften, müssen getrennt untersucht werden

Eine ausführliche Darstellung der Theorie der Sandwichplatte liefert das Buch von Stamm/Witte. Zur Ergänzung sei noch auf die Literaturstellen [Wurtinger], [Puppo/Evenson], [Pagano, 1970], [Sierakowsky/Ebcioğlu], [Monforton/Ibrahim], [Reher] und [Großkopf/Winkler] verwiesen.

#### 4.6.7 Bemerkungen zu den interlaminaren Schubspannungen

Bei geschichteten Körpern ist es von großer Wichtigkeit, eine Aussage über die interlaminaren Schubspannungen zu erhalten, also über Schubspannungen, die nicht in den Schichten sondern zwischen den Schichten wirken.

Die allgemein benutzte Kirchhoffsche Schalentheorie setzt in den konstitutiven Gleichungen die Spannungen  $\tau_{23} = \tau_{13} = 0$ . Es fehlen somit in den Ergebnissen diese Spannungen und damit die, -aufgrund der Zuordnung der Zugspannungen- äquivalenten interlaminaren Schubspannungen  $\tau_{32}$  und  $\tau_{31}$ .

Die Aufstellung der Berechnungsformeln zur Abschätzung dieser Schubspannungen geschieht analog wie bei der einfachen Balkentheorie. Als Beispiel dient die Ermittlung der Formeln bei einer Rotationsschale. Für Platten und andere Tragwerke werden sie auf gleiche Art gefunden. [Worch 1964, S. 317].

Nach Ermittlung aller Schichtspannungen im Laminat können zunächst die Spannungen  $\tau_{32}$  und  $\tau_{31}$  errechnet werden. Dann wird aus einem Schichtkörper ein Element herausgeschnitten, und es werden die an diesem Element wirkenden Kräfte angebracht. In Bild 4.20 sind diese Kräfte nur am negativen Schnittufer (das pos. Schnittufer hat die Spannungszuwächse) und auch nur für eine Richtung angesetzt.

Analog zur Herleitung der Schubspannungen am isotropen Balken läßt sich für die k'te Schicht in beiden Richtungen schreiben

$$\text{und} \quad (\tau_{32k} - \tau_{32k-1}) r d\vartheta ds = - \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_s}{r \partial s} r d\vartheta ds dz - \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \tau_{12}}{\partial s} ds r d\vartheta dz \quad (4.176)$$

$$(\tau_{31k} - \tau_{31k-1}) r d\vartheta ds = - \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} ds r d\vartheta dz - \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \tau_{21}}{r \partial \vartheta} r d\vartheta ds dz .$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich bei Rotationssymmetrie ( $\partial/\partial \vartheta = 0$ ) und dünnen Schichten  $\int dz = t_k$  zu

$$\tau_{32k} = - \left[ \tau_{32k-1} + d\tau_{12} \frac{t_k}{ds} \right]$$

$$\tau_{31k} = - \left[ \tau_{31k-1} + d\sigma_s \frac{t_k}{ds} \right] \quad (\text{in der Schicht, global Null}).$$

Für endliche Längen  $ds$  (z.B. eines finiten Schalenelementes) wird



daraus

$$\begin{aligned} \tau_{32k} &\approx - \left[ \tau_{32k-1} + \Delta \tau_{12} \frac{t_k}{\Delta s} \right] \\ \tau_{31k} &\approx - \left[ \tau_{31k-1} + \Delta \sigma_s \frac{t_k}{\Delta s} \right] . \end{aligned} \quad (4.177)$$

Mit Glg. (4.177) kann festgestellt werden, ob gegenüber der interlamina-  
ren Schubfestigkeit  $ILSS \triangleq \tau_{1,2}$  noch ein genügender Sicherheitsab-  
stand vorhanden ist bzw. ob Delaminationsgefahr besteht.

Die Auswertung kann bei Verwendung von Rechenprogrammen direkt im  
Programm, nachträglich aber auch mit der Hand erfolgen.

Sind an der Oberfläche des Schalenelementes noch zusätzliche Schub-  
kräfte vorhanden, so müssen diese in das Gleichgewicht miteinbezogen  
werden.

In Anwendung des Satzes von der paarweisen Zuordnung  $\tau_{ik} = \tau_{ki}$  der  
Schubspannungen kann zum Schluß die Kontrolle gemäß Glg. (4.170 a)  
erfolgen

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_{k=1}^n \tau_{32k} t_k = 0 , \\ Q_y &= \sum_{k=1}^n \tau_{31k} t_k . \end{aligned} \quad (4.178)$$

Eine spezielle Behandlung der Schubverformungseinflüsse, und damit  
verbunden auch wieder der Schubspannungen, wird im nächsten Kapitel  
an einer dicken Platte gezeigt.

## 4.7 Mehrschichtige Fasernetze

### 4.7.1 Allgemeines

Eine relativ einfache Methode zur Berechnung von zweiachsig bean-  
spruchten Faserverbundkonstruktionen ist die "Netztheorie". Sie hat  
jedoch nur Gültigkeit im Bereich zwischen fortgeschrittener Rißbildung  
und Bruch, weil sonst die Voraussetzungen der Netztheorie nicht ge-  
geben sind. Diese Voraussetzungen sind:

- Das Harz beteiligt sich nicht an der Kraftaufnahme
- Die Normalspannung  $\sigma_1 = 0$
- Die Schubspannung  $\tau_{\#} = 0$  .

Es ist weiter zu bemerken, daß bei der Netztheorie -im Gegensatz zur Kontinuumstheorie- bis zu einer Anzahl von drei Schichten die Kompatibilitätbedingungen an den Schichtübergängen nicht herangezogen zu werden brauchen. Das ist darin begründet, daß bei Vernachlässigung des Harzes und Auslegung auf überall gleiche Faserspannung alle Fasern gleiche Dehnungen erfahren und der Körper eine Ähnlichkeitsverformung erfährt. In der Netztheorie kann keine Biegung berücksichtigt werden. Die Netztheorie behandelt nur Membran-Tragwerke.

#### 4.7.2 Rotationsschale unter rotationssymm. Belastung

Die Gleichgewichtsbeziehungen der Membranschale lauten hier (Bild 4.21)

$$\begin{array}{l} \text{längs} \quad \frac{dN_{\varphi}}{R_1 d\varphi} + \frac{\cos\varphi}{r} (N_{\varphi} - N_{\vartheta}) + p_{\varphi} = 0 \\ \text{normal} \quad \frac{N_{\varphi}}{R_1} + \frac{N_{\vartheta}}{R_2} + p = 0 \end{array} \quad (4.179)$$

Die vorstehenden Gleichungen gelten sowohl für die Gesamtschale als auch für die UD-Schicht. Allerdings muß bei der einzelnen UD-Schicht noch beachtet werden, daß die Schubkräfte nicht verschwinden. In der bidirektionalen (BD-)Schicht gleichen sich die Schubkraftanteile aus den  $\pm\alpha$  - UD-Schichten wieder aus. Bei der UD-Schicht allein ist somit noch die Gleichung (Index  $\vartheta \rightarrow \varphi$ )

$$\frac{dN_{\varphi\vartheta}}{R_1 d\varphi} + \frac{\cos\varphi}{r} (N_{\varphi\vartheta} + N_{\vartheta\varphi}) + p_{\vartheta} = 0. \quad (4.180)$$

zu erfüllen. Die Erfüllung dieser Gleichung könnte trivialer Natur sein, wird aber, wie sich aus dem Gleichgewicht an einem UD-Flächenelement herausstellt, auf eine zusätzliche Bedingung mit der Fadenspannung führen. Der Nachweis, unter welchen Bedingungen Gleichgewicht erzielt wird, soll hier nach [Zimmermann] -allerdings nur für Innendruck- vorgenommen werden. Bild 4.22 liefert als Bedingungen des Kräftegleichgewichts an einem aus einer UD-Schicht herausgeschnittenen Element

$$\begin{aligned} N_{\varphi\vartheta}^{ud} \frac{L}{\cos\alpha} &= - N_F^{ud} L \sin\alpha \\ N_{\varphi}^{ud} \frac{L}{\cos\alpha} &= + N_F^{ud} L \cos\alpha \rightarrow N_{\varphi}^{ud} = N_F^{ud} \cos^2\alpha \\ N_{\vartheta}^{ud} \frac{L}{\sin\alpha} &= - N_{\varphi\vartheta}^{ud} \frac{L}{\cos\alpha} \rightarrow N_{\vartheta}^{ud} = N_F^{ud} \sin^2\alpha \end{aligned} \quad (4.181)$$

Zusammengefaßt ergibt das für die Schubkraft, die für die Harzbeanspruchung maßgeblich ist,

$$N_{\varphi, \psi}^{ud} = - \sqrt{N_{\varphi}^{ud} N_{\psi}^{ud}} = - N_F^{uz} \sin \alpha \cos \alpha .$$

Hieraus ist direkt ersichtlich, daß die Schubkräfte für die  $+\alpha$ -Schicht ebenso groß wie für die  $-\alpha$ -Schicht sind und für eine BD-Schicht sich aufheben

$$N_{\varphi, \psi}^{3D} = N_F^{ud} \cos \alpha (\sin \alpha + \sin(-\alpha)) = 0 .$$

Mit  $\rho_s = 0$  führt die Schubkraftgleichung, wenn noch  $N_{\varphi, \psi} \approx N_{\psi, \varphi}$  (für  $z/R_1, z/R_2 \ll 1$ )

und  $ds = R_1 d\varphi = dr / \cos \varphi$  bzw.  $\cos \varphi = dr / (R_1 d\varphi)$

auf 
$$\frac{d N_{\varphi, \psi}^{ud}}{dr} + \frac{2}{r} N_{\varphi, \psi}^{ud} = 0 .$$

Das Einsetzen der obigen Netztheorie-Beziehung liefert unter der Bedingung  $\sigma_F = \text{const.}$  der Netztheorie, wenn man den Dickenaufbau am Boden betrachtet zu (Bild 3.6)

$$N_F^{ud} = \sigma_F \cdot t(r) = \sigma_F \tan \alpha_z R_z \cos \alpha_z \frac{1}{r \cos \alpha}$$

$$- \sigma_F \tan \alpha_z R_z \cos \alpha_z \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r \cos \alpha} \right) + \frac{2}{r} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r \cos \alpha} \right] = 0 ,$$

wobei die eckige Klammer verschwinden muß

$$\frac{r}{2} \frac{d}{dr} \left( \frac{\sin \alpha}{r} \right) + \frac{\sin \alpha}{r} = 0 .$$

Das ist nur möglich, wenn

$$\sin \alpha = \frac{\text{const}}{r} = \frac{e}{r} .$$

Die vorstehende Gleichung stellt also wieder die geodätische Wickelbedingung dar.

Bei geodätischer Fadenablage ist somit die Netzwerkschale im Gleichgewicht. Beim planaren Wickeln gilt das nicht mehr. Zwar versuchen die Fäden um die z-Achse in Richtung der geodätischen Linien des planaren Bodens zu rutschen; Wickeleinstellung und Reibung lassen das Rutschen aber nur eingeschränkt zu. Es ist deshalb günstig mit kleineren Winkeln  $\alpha_z$  beim planaren Wickeln zu arbeiten, da dann die Abweichung zum geodätischen Wickeln bzw. Isotensoidwickeln gering ist.

Der Zusammenhang der Kräfte mit den Spannungen in den Schichten des Laminates lautet wie in Abschnitt 4.6

$$\begin{aligned}
N_{\varphi} &= \hat{\sigma}_{\varphi} t_v = \sum t_k \sigma_{\varphi k} \\
N_{\rho} &= \hat{\sigma}_{\rho} t_v = \sum t_k \hat{\sigma}_{\rho k} \\
N_{\varphi\rho} &= \hat{\tau}_{\varphi\rho} t_v = \sum t_k \hat{\tau}_{\varphi\rho k}
\end{aligned}
\tag{4.182}$$

nur daß jetzt nach Ausführung der Transformation der Spannungen (4.162)

$$\{\hat{\sigma}\}_k = \begin{Bmatrix} \sigma_{\varphi} \\ \sigma_{\rho} \\ \tau_{\varphi\rho} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \cos^2 \alpha \\ \sigma_{11} \sin^2 \alpha \\ -\sigma_{11} \frac{\sin 2\alpha}{2} \end{Bmatrix}
\tag{4.183}$$

verbleibt.

Die Auslegung erfolgt so, daß bei bekannten  $\varphi, \rho, \gamma$  mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen die  $N_{\varphi}, N_{\rho}, N_{\varphi\rho}$  bestimmt werden. Aus den unten angeführten beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
t_1 \sigma_{11} \cos^2 \alpha_1 + t_2 \sigma_{11} \cos^2 \alpha_2 + t_3 \sigma_{11} \cos^2 \alpha_3 + \dots &= N_{\rho}(\varphi) \\
t_1 \sigma_{11} \sin^2 \alpha_1 + t_2 \sigma_{11} \sin^2 \alpha_2 + t_3 \sigma_{11} \sin^2 \alpha_3 + \dots &= N_{\varphi}(\varphi)
\end{aligned}
\tag{4.184}$$

ist dann ablesbar, welche Wandstärken bei welchen zulässigen Spannungen notwendig sind. Die  $\pm t_k$ -Schichten werden dabei zu einer BD-Schicht der Dicke  $2t_k$  zusammengefaßt, damit die Schubkraftgleichung entfallen kann.

Im folgenden werden einige Sonderfälle von Fasernetzen behandelt:

$k = 1$ :

Für den Äquator eines Wickelbehälters ergibt z.B., daß bei einem Wickelwinkel  $\alpha_1 = \arcsin \frac{e}{R_2}$  und zulässigem  $\sigma_{11}$  die Doppellage die Wandstärke ( $\pm \alpha$  zusammengefaßt)

$$2t_1 = \frac{N_{\rho}}{\sigma_{11} \cos^2 \alpha_1} = \frac{N_{\varphi}}{\sigma_{11} \sin^2 \alpha_1}$$

haben muß. Der Wickelwinkel muß aber gleichzeitig der physikalischen Forderung genügen, daß Gleichgewicht herrschen muß. Zur Auflösung des vorliegenden, unterbestimmten Gleichungssystems verhilft hier die zusätzliche Festlegung

$$\frac{N_{\varphi}}{N_{\rho}} = \tan^2 \alpha.$$

$k = 2$ :

Schon in diesem Sonderfall zeigt sich, daß zur Bestimmung der vier Unbekannten  $t_1, t_2, \alpha_1, \alpha_2$  mehr Unbekannte als Gleichungen vorliegen.

Nun müßten zwei Wickelbedingungen  $\sin\alpha_1 = e_1/R_{z_1}$ ,  $\sin\alpha_2 = e_2/R_{z_2}$  zur Bestimmung der  $t_1$ ,  $t_2$  herangezogen werden. An  $N_y/N_x$  würden dann keine Bedingungen gestellt werden müssen. Allerdings bestehen dann diese Verbundschalen aus einem zweiseichtigen und einem einschichtigen Bereich (vgl. [Geier, 1971]) in Polkappennähe. Wie sich unter den Belastungen und Wickelbedingungen die Konturen ermitteln, zeigt Kapitel 4.9.

$k > 2$ :

Bedingt durch den mehrschichtigen Aufbau hat man es normalerweise mit den Sonderfällen  $k > 2$  zu tun (Bild 4.17). Bei ihnen wird selten bei jeder einzelnen Schicht  $k$  die Mittelkontur dieser Schicht der Berechnung zugrundegelegt. Das hängt damit zusammen, daß man sich auch keine Gedanken um die Verformungs-Verträglichkeit der Schichten macht. Für  $k = 3$  sieht man, daß auch bei bekannten Wickelbedingungen schon eine Unbekannte, nämlich  $t_3$ , zuviel ist. Es liegt eine Netztheorie vor, bei der eine statisch Unbestimmte auftritt, so daß man zur Bestimmung der unbekanntenen  $t_3$  eine Kompatibilitätsbedingung benötigt. Als Bedingung wird wie zuvor die Annahme getroffen, daß in allen Schichten des Laminates die gleichen Verzerrungen auftreten. Es liegt hier der Übergang von der Netztheorie zur Kontinuumstheorie vor. Die Ermittlung der Wickelkontur, nach der das Problem schließlich gelöst ist, weil erst <sup>mit ihrer Kenntnis</sup> dann  $N_x(\varphi)$  und  $N_y(\varphi)$  bekannt sind, ist ~~auch~~ in Kapitel 4.9 zu finden.

Für die Dehnungen leitet Puck bei einem reinen Netzwerk ab: Alle Lamine, die nach der Netztheorie optimal ausgelegt werden, d.h. dem Vorzeichen und dem Betrag nach gleiche Dehnung in allen Faserrichtungen aufweisen, erfahren nach der Netztheorie in jeder beliebigen Richtung die gleiche Dehnung und keine Schiebung. Das gilt für 2, 3 und mehr Faserrichtungen. Die Fasernetze erfahren eine Ähnlichkeitsvergrößerung, wobei die Netzknoten Knotenpunkte bleiben. Bei Beanspruchung unterhalb der Reißbildungsgrenze gilt dieses Ergebnis nur beschränkt.

#### 4.7.3 Ebene Flächenträger

Bei den ebenen Flächenträgern fallen rechteckige und kreisförmige Scheiben bzw. Platten an.

## Rechteckscheibe

Bei dieser Scheibe, die im allgemeinen gleichbleibende Dicke hat, gelten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + p_x &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y &= 0\end{aligned}\quad (4.185)$$

Bei Verwendung der Hauptspannungsrichtungen ist  $N_{xy} = 0$  setzbar. Der Zusammenhang der Kräfte mit den Schichtspannungen lautet wie in Glg. (4.181), wobei nach wie vor

$$\begin{aligned}N_x &= \sum_{k=1}^n t_k \sigma_{11k} \cos^2 \alpha_k \\ N_y &= \sum_{k=1}^n t_k \sigma_{11k} \sin^2 \alpha_k\end{aligned}\quad (4.186)$$

und auch weiterhin Glg. (4.184) gilt.

Bei bekannten  $N_x(x,y)$  und  $N_y(x,y)$  an der Stelle  $x,y$  lassen sich die an dieser Stelle notwendigen Größen  $t_k, \alpha_k$  ermitteln. Nur sind jetzt statt der  $k$ -Wickelbedingungen andere Forderungen zur Lösung des Gleichungssystems erforderlich. Man sieht jedenfalls, daß unendlich viele Möglichkeiten für die  $\alpha_k$  sich anbieten, bei denen Gleichgewicht erzeugt wird.

Für die Dehnungen gilt auch hier, daß sie nach der vorliegenden Netztheorie überall gleich groß sind.

Um keine Biegung in die Schale zu bekommen, müssen die Schichten des Laminats symmetrisch aufgebaut sein.

## Kreisscheibe

Bei der Kreisscheibe gilt die Gleichgewichtsbeziehung

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r} (N_r - N_\theta) + p_r = 0 \quad (4.187)$$

mit

$$p_r = g_v \cdot t(r) r \Omega^2,$$

falls z.B. Fliehkraft vorliegt.

In (4.187) ist je nach dem Herstellungsverfahren eine veränderliche Dicke  $t$  einzusetzen.

Nach Bild 4.21 ist für reine Umfangslagen  $t = \text{const.}$ . Wenn das Harz vernachlässigt wird, so verbleiben bei der umfangsgewickelten Scheibe

$$\begin{aligned}N_r &= 0, \\ \frac{N_\theta}{r} &= g_v t \cdot r \Omega^2 \quad (\rightarrow \hat{\sigma}_\theta = g(r\Omega)^2 = g v^2)\end{aligned}\quad (4.188)$$

Die Beanspruchung hängt also direkt von der Geschwindigkeit ab.  
Die zugehörige Dehnung ist

$$\epsilon_s = \frac{u}{r} \left( = \frac{\hat{\sigma}_s}{E_{II}} \right).$$

Hierbei wird infolge des vorausgesetzten Netzwerks der äußerste Rand am meisten belastet, während normalerweise innen die höchste Umfangsspannung vorliegt.

Eine wie ein Zwirnstern gewickelte Scheibe verändert ihre Dicke umgekehrt proportional zum Radius  $t = t_a \cdot r_a / r$ , wobei der Index  $a$  den Außenradius kennzeichnet. In diesem Fall ist für die sich wiederholenden BD-Schichten anzusetzen

$$\begin{aligned} N_r &= 2 t_1(r) \sigma_{II} \cos^2 \alpha(r) \\ N_{\varphi} &= 2 t_1(r) \sigma_{II} \sin^2 \alpha(r) \end{aligned} \quad (4.189)$$

und die geodätisch Ablage  $\sin \alpha(r) = e/r$  garantiert für konstante Faserspannung.

#### 4.8 Mehrschichtiger Linienträger (Stabachse eben)

Für Linienträger, die nur in einer Ebene belastet werden, sollen abschließend die Beziehungen angegeben werden.

##### 4.8.1 Gekrümmter Träger

Ausgehend von Glg. (4.127) verbleiben, wenn  $s$  die Bogenrichtung darstellt (vgl. Bild 4.19)

$$\begin{aligned} N_s &= \sum_{k=1}^n \sigma_{s,k} t_k, \quad Q_s = \sum_{k=1}^n \tau_k t_k, \\ M_s &= \sum_{k=1}^n \sigma_{s,k} \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_{s,k} (h_k - h_{k-1})(h_k + h_{k-1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_{s,k} t_k (h_k + h_{k-1}). \end{aligned} \quad (4.190)$$

Die Beziehungen zwischen den Spannungen und den Schnittgrößen sind, wenn die Krümmungsterme  $e/R$  entfallen können (Glg.(4.170 c))

$$\begin{aligned} \frac{dN_s}{ds} + \frac{r'}{r} N_s - \frac{Q}{R_1} + p_s &= 0 \\ \frac{dQ_s}{ds} + \frac{r'}{r} Q + \frac{N_s}{R_1} + p &= 0 \\ \frac{dM_s}{ds} + \frac{r'}{r} M_s - Q &= 0. \end{aligned} \quad (4.191)$$

Im Sonderfall des Kreisbogens wird  $R_1 = R_2$ ,  $r' = 0$ .

Als Formänderungsbeziehung verbleibt (wobei  $w/R_1$  und  $u/R_1$  häufig vernachlässigt werden kann)

$$\epsilon_s = -\frac{w}{R_1} + \frac{du}{ds} - z \frac{d}{ds} \left( \frac{u}{R_1} + \frac{dw}{ds} \right). \quad (4.192)$$

Man sieht, daß über der Schalendicke die Dehnung für alle Schichten entsprechend der Höhenkoordinate linear veränderlich ist  $\epsilon_s = C_1 + C_2 z$ . In den vorstehenden Gleichungen steckt gemäß den Annahmen der Technischen Biegelehre das "Ebenbleiben der Querschnitte" (Bernoulli). Diese Annahme schließt aus, daß es noch beliebig andere  $\sigma_s$ -Verteilungen gibt, die ebenfalls mit  $M_s$  im Gleichgewicht stehen. Mit Hilfe der Annahme von Bernoulli und mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen lassen sich die Normalspannungen ermitteln. Die Berechnung der Schubspannungen folgt allein aus den Gleichgewichtsbedingungen. Unter der Voraussetzung, daß die Schubspannungen an Unter- und Oberseite des Trägers Null sind, gilt für das Gleichgewicht analog zu Bild 4.20 bzw. nach (4.176)

$$\tau_{zs_j} \cdot b \cdot ds = \sum_{k=1}^j \int_{h_{k-1}}^{h_k} d\sigma_{s_k} \cdot b \cdot dz.$$

Die Ausrechnung kann dann näherungsweise nach

$$\tau_{zs_j} = \tau_{sz_j} = \sum_{k=1}^j \frac{h_k}{h_{k-1}} \frac{d\sigma_{s_k}}{ds} dz \approx \sum_{k=1}^j \frac{\Delta\sigma_{s_k}}{\Delta s} t_k. \quad (4.193)$$

erfolgen. Dazu sei vom isotropen Balken her als ein Vergleichswert

$$\tau_{zs} = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b} \quad \text{mit} \quad \max \tau_{zs} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot t}$$

angegeben. Bei Isotropie sind also nur bei vorliegender Querkraft interlaminare Schubspannungen vorhanden.

#### 4.8.2 Gerader Träger

Bei diesem Träger wird von (4.175) ausgegangen. Das führt, wenn wie üblich in Längsrichtung des Trägers die Koordinate  $x$  gelegt wird,

$$\begin{aligned} \frac{dN_x}{dx} + p_x &= 0 \\ \frac{dQ}{dx} + p &= 0 \\ \frac{dM_x}{dx} - Q &= 0. \end{aligned} \quad (4.194)$$



Als Spannungs-Schnittgrößen-Beziehungen liegen vor

$$\begin{aligned} N_x &= \sum_{k=1}^n \sigma_{x_k} t_k, & Q_x &= \sum_{k=1}^n \tau_{x\alpha_k} t_k \\ M_x &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_{x_k} t_k (h_k + h_{k-1}) \end{aligned} \quad (4.195)$$

Die Formänderungsbeziehungen sind

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} - z \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (4.196)$$

Für einen unsymmetrisch aufgebauten Sandwich-Träger mit dünnen Deckschichten sind nur die Gleichungen (4.195) anders. Sie lauten jetzt [Reher]

$$\begin{aligned} N_x &= \sigma_{x_1} t_1 + \int_{h_1}^{h_2} \sigma_{x_2} dz + \sigma_{x_3} t_3 \\ M_x &= -\frac{1}{2} \left\{ \sigma_{x_1} t_1 (h_1 - h_0) + \sigma_{x_3} t_3 (h_3 - h_0) \right\} - \int_{h_1}^{h_2} \sigma_{x_2} z dz. \end{aligned} \quad (4.197)$$

## 4.9 Faserablage und Konturverlauf

### 4.9.1 Gleichgewichtsbedingungen und Ablegewinkel

Voraussetzung einer beanspruchungsgerechten Faserverbundkonstruktion ist die richtige Ablage bzw. Ausrichtung der Fäden. Das gilt sowohl für ebene Tragkonstruktionen wie beispielsweise auch für Wickelbehälter. Meistens wird dafür die Netztheorie herangezogen, seltener die Kontinuumstheorie. Der Anwendung dieser Theorien liegt hier die symmetrisch aufgebaute Membranschale zugrunde.

In diesem Abschnitt sollen für gekrümmte Rotationsschalen die Wickelkonturen bestimmt werden. Man benötigt dazu für die Böden die Gleichgewichtsbedingungen der Schnittgrößen der allgemeinen Membranschale (KOS gemäß Bild 4.13)

$$\begin{aligned} \frac{N_\varphi}{R_1} + \frac{N_\psi}{R_2} + p &= 0 \\ \frac{dN_\varphi}{R_1 d\varphi} + \frac{\cos \varphi}{r} (N_\varphi - N_\psi) + p_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4.198a)$$

und für die zylindrischen Teile ( $R_2 = R_z$ ) die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{N_\psi}{R_z} + p = 0. \quad (4.198b)$$

Eine mit den Glgn. (4.198) erhaltene Kontur gilt streng genommen nur für die Mittelfläche der Schale.

a) Sonderfall Innendruck

Als Sonderfall der obigen Gleichungen ist bei einem gekrümmten Boden  $p_\varphi = 0$  hervorzuheben.

Man kann dann aus dem Gleichgewicht von Schnittkraftkomponente und Druck auf die Projektionsfläche eines abgeschnittenen Bodenteils die Beziehung (Innendruck  $p = -p_i$ )

$$2\pi r N_\varphi \sin\varphi = \pi r^2 p_i$$

bzw.

$$N_\varphi = \frac{p_i \cdot r}{2 \sin\varphi} = \frac{p_i R_2}{2} \quad (4.199)$$

ermitteln, so daß die komplizierte Meridiangleichung durch eine einfachere Gleichung ersetzt wird. Nach der Elimination von  $N_\varphi$  verbleibt  $N_\lambda$  als

$$N_\lambda = \frac{p_i}{2} \left( 2 - \frac{R_2}{R_1} \right) R_2 \quad (4.200)$$

Beim Zylinder werden für  $p_\varphi = 0$  und  $R_2 = R_1$

$$N_\varphi = \frac{p_i R_1}{2}, \quad N_\lambda = p_i R_1 \quad (4.201)$$

gefunden. Die vorstehenden Gleichungen stellen beim Boden zwei Beziehungen für die drei Unbekannten  $N_\varphi$ ,  $N_\lambda$  und  $r$  dar. Zur Bestimmung der drei Unbekannten fehlt somit eine Bedingung. Sie wird uns im allgemeinen durch die schon im Kapitel 2 erwähnte Wickelbedingung geliefert, welche allein von der Wickelart abhängt. Es kann aber auch irgendeine andere sinnvolle Bestimmungsgleichung sein, wie noch gezeigt wird.

Beim Zylinder entfällt die Unbekannte  $r(z)$ , und es stehen zwei Unbekannte  $N_\varphi$  und  $N_\lambda$  zwei Gleichungen für  $N_\varphi$  und  $N_\lambda$  gegenüber.

b) Sonderfall Fliehkraft

Für rotierende Schalen werden die Belastungsgrößen  $p$  und  $p_\varphi$  aus der Massenträgheit der Schale und einer eventuellen Füllung ermittelt.

Die Zerlegung einer rein radial gerichteten Belastungsgröße ergibt für die Rotationsschale ohne sonstige Belastung gemäß Bild 4.13

$$p_i = g_v t(r) r \Omega^2 \sin\varphi \quad (4.202)$$

$$p_\varphi = g_v t(r) r \Omega^2 \cos\varphi$$

Bei einer zylindrischen Verbundschale werden die Beziehungen einfacher, da  $t = \text{const.}$ ,  $r = R_z$  und  $\varphi = 90^\circ$ .

Leider lassen sich beim Lastfall Fliehkraft die DGLn (4.198 a) nicht durch eine ähnliche Gleichgewichtsbeziehung wie (4.200) vereinfachen. Wir werden deswegen  $N_\varphi$  oder  $N_\psi$  eliminieren, je nachdem was günstiger ist.

Das Ersetzen von  $N_\psi$  liefert ( $\varphi > 0$ ) anstelle von (4.198 a) am Boden

$$N_\psi = R_2 \left( + p_i - \frac{N_\varphi}{R_1} \right) = \frac{r}{\cos \varphi} \left( \frac{dN_\varphi}{R_1 d\varphi} + p_\varphi \right) + N_\varphi ,$$

so daß schließlich statt (4.200) die unbequemere DGL

$$N_\varphi \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{r}{\cos \varphi} \left( \frac{dN_\varphi}{R_1 d\varphi} + p_\varphi \right) - R_2 p_i = 0 . \quad (4.203a)$$

gefunden wird.

Im Zylinderteil reduziert sich diese Beziehung auf

$$N_\varphi = p_i \cdot R_z . \quad (4.203b)$$

Der Zusammenhang der Schnittgrößen ~~in~~ eines Netzwerk<sup>es</sup> mit dem Wickel- bzw. Ablegewinkel ist zur Bestimmung der Wandstärke der Einzelschichten notwendig. Für die BD-Schicht, das waren zwei UD-Schichten mit den Wickelwinkeln  $+\alpha$  und  $-\alpha$ , gelten nach Bild 4.26 die Beziehungen

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \sum_{k=1}^n t_{\alpha_k} \sigma_{\alpha_k} \cos^2 \alpha_k \\ N_\psi &= \sum_{k=1}^n t_{\alpha_k} \sigma_{\alpha_k} \sin^2 \alpha_k . \end{aligned} \quad (4.204)$$

Es werden dabei sinnvollerweise gleichgerichtete Schichten zusammengefaßt. So ergibt sich für einen Wickelboden aus einer BD-Schicht (bzw. beim ausgeglichenen Winkelverbund, abgek. AWV)

$$\frac{N_\psi}{N_\varphi} = \frac{t_\alpha \sigma_\alpha \sin^2 \alpha}{t_\alpha \sigma_\alpha \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha \quad (4.205a)$$

und für den häufigeren Fall des aus  $+\alpha$ ,  $-\alpha$  und  $90^\circ$  Lagen aufgebauten Zylinders

$$\frac{N_\psi}{N_\varphi} = \frac{t_\alpha \sigma_\alpha \sin^2 \alpha + t_{90} \sigma_{90}}{t_\alpha \sigma_\alpha \cos^2 \alpha} . \quad (4.205b)$$

Die vorgenannten Gleichungen sehen natürlich anders aus, wenn der Traganteil eines Liners zu berücksichtigen ist ([Cuntze, 1972], S. 37), oder wenn ein im Zylinderteil verstärkter Metallbehälter ausgewählt wird. In solchen Fällen müssen die Kompatibilitätsbedingungen zwischen Innenschale und Verbundhülle mit herangezogen werden.

Wird bei drei und mehr Schichten die statisch bestimmte Netztheorie verlassen, so gilt zwar (4.204), aber es muß dann schon bei reinem Verbund (ohne etwaige Liner) für die Erhaltung der Kompatibilität gesorgt werden.

Natürlich können die Glg. (4.198) auch zur Bestimmung der absoluten Wandstärken am Äquator von  $t_\alpha(R_z)$  auf der Bodenseite und  $t_{\alpha z, t_{q_0}}$  auf der Zylinderseite herangezogen werden, wenn die Normalkräfte  $N_p$  und  $N_s$  bekannt sind.

#### 4.9.2 Wandstärkenverlauf

Die Form der Rotationsschale liefert uns eine Aussage über den Verlauf der Wandstärke  $t_\alpha(r)$ . In [Zimmermann, 1969] wird die Aussage aus den folgenden beiden Angaben abgeleitet:

1. Die Zahl  $n$  der einen Breitenkreis kreuzenden Fäden ist unabhängig von der Höhe über dem Äquator (das gilt auch noch für die Kugel- oder Kegelzone am Pol).
2. Die Packungsdichte  $m = \text{Anzahl/Fläche}$  in einem Querschnitt senkrecht zur Fadenrichtung bleibt überall konstant, sowohl im Bodenteil als auch im Zylinderteil eines Wickelkörpers.

Betrachtet man die Gesamtzahl  $\tilde{A}$  der Fäden in einem Querschnitt der Länge  $L_\alpha$  senkrecht zur Fadenrichtung, so findet man (Bild 4.22)

$$\tilde{A} = m L_\alpha t_\alpha$$

Da dieselbe Anzahl auch durch die Projektionsfläche auf dem Breitenkreis geht, gilt, bezogen auf den ganzen Breitenkreisumfang,

$$\tilde{A} \frac{2\pi r}{L_\alpha / \cos\alpha} = n$$

Man erhält schließlich für den Dickenaufbau über einem gewickelten Boden, wobei der Index  $\tilde{A}$  für die Bodenanschlußstelle am Äquator steht

$$m t_\alpha 2\pi r \cos\alpha = n = \text{konst.} = m t_{\alpha \lambda} 2\pi R_z \cos\omega_z$$

$$t_{\alpha} = t_{\alpha\ddot{A}} \frac{R_2 \cos \alpha_2}{r \cos \alpha} \quad (4.206a)$$

$$= t_{\alpha\ddot{A}} \sqrt{\frac{R^2/e^2 - 1}{r^2/e^2 - 1}} \quad \begin{array}{l} \text{(Bei geodätischer} \\ \text{Fadenablage.} \\ \text{Geltungsbereich} \\ \text{bis } r/e \approx 1,2) \end{array} \quad (4.206b)$$

Bei Wickelteilungen  $1 \leq T \leq 3$  kann der Verbundaufbau am Pol aus

$$t_{\alpha} \approx 1,7 t_{\alpha\ddot{A}} \frac{R_2}{e}$$

abgeschätzt werden.

Für einen zylindrischen Wickelkörper gilt durchgehend  $t_{\alpha_2}$ .

Im Sonderfall Innendruck ist die Wandstärke für den bidirektional gewickelten Boden am Äquator,  $R_2 = R_{\ddot{A}} = R_z$

(4.207)

$$t_{\alpha\ddot{A}} = \frac{N_y}{\sigma_{\alpha} \cos^2 \alpha_2} = \frac{p_i R_2}{2 \sigma_{\alpha} \cos^2 \alpha_2} = \frac{p_i R_2}{2 \sigma_{\alpha}} (1 + \tan^2 \alpha_2)$$

und für den aus  $+\alpha$ ,  $-\alpha$  und  $90^\circ$  Lagen aufgebauten Zylinder

$$t_{\alpha_2} = t_{\alpha\ddot{A}}$$

$$\begin{aligned} t_{90} &= \frac{1}{\sigma_{90}} (N_y - t_{\alpha_2} \sigma_{\alpha} \sin^2 \alpha_2) \\ &= \frac{p_i R_2}{2 \sigma_{90}} (2 - \tan^2 \alpha_2). \end{aligned} \quad (4.208)$$

Wenn wegen der Festigkeitsabsenkung des Behälters infolge Faserüberschneidungen  $\sigma_{\alpha} = \eta \sigma_v$  und weiter  $\sigma_{90} = \sigma_v$  gesetzt werden, so ergibt sich für die Gesamtwandstärke

$$\begin{aligned} t_{\text{ges}} &= t_{\alpha_2} + t_{90} \\ &= \frac{p R_2}{2 \eta \sigma_v} \left[ 3 \eta + \frac{1}{\cos^2 \alpha_2} (1 - \eta) \right]. \end{aligned} \quad (4.209)$$

Für  $\eta = 1$  wäre die Gesamtwanddicke unabhängig vom Winkel  $\alpha_2$  der Schräglagen.

Interessant ist noch das Wanddickenverhältnis

$$\frac{t_{90}}{t_{\alpha_2}} = \eta (3 \cos^2 \alpha_2 - 1). \quad (4.210)$$

### 4.9.3 Differentialgleichungen der Wickelkonturen

Für die Sonderfälle Innendruck und Fliehkraft werden nun die DGL der Wickelkonturen abgeleitet

#### a) Sonderfall Innendruck

Für die innendruckbelastete Rotationsschale gelten bei ausgeglichenem Winkelverbund (zwei Schichten:  $+\alpha_2 = -\alpha_1$ ) die Beziehungen (4.192) und (4.193)

$$\begin{aligned} N_{\varphi} &= \frac{1}{2} p_i R_2 \left( 2 - \frac{R_2}{R_1} \right) = t_{\alpha} \sigma_{\alpha} \sin^2 \alpha \\ N_y &= \frac{1}{2} p_i R_2 = t_{\alpha} \sigma_{\alpha} \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (4.211a)$$

Die Gleichungen (4.204) überführen die vorstehenden Membranschalen-Schnittkräfte in Schnittkräfte der Netzwerkschale

$$\begin{aligned} \text{und} \quad N_{\varphi} (= \hat{\sigma}_{\varphi} t_{\alpha}) &= \sum_{k=1}^2 t_{\alpha_k} \sigma_{\alpha_k} \sin^2 \alpha_k = t_{\alpha} \sigma_{\alpha} \sin^2 \alpha \\ \text{und} \quad N_y (= \hat{\sigma}_y t_{\alpha}) &= \sum_{k=2}^1 t_{\alpha_k} \sigma_{\alpha_k} \cos^2 \alpha_k = t_{\alpha} \sigma_{\alpha} \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (4.211b)$$

Solange man (4.211 a) allein verwendet, hat man noch die allgemeine DGL der Wickelkontur einer Membranschale

$$\frac{N_{\varphi}}{N_y} = 2 - \frac{R_2(\underline{z})}{R_1(\underline{z})} \quad \left( = \frac{\hat{\sigma}_{\varphi}}{\hat{\sigma}_y} \right) \quad (4.212a)$$

Erst wenn (4.211 b) eingesetzt wird, ist eine Beziehung der Netztheorie verwendet worden, und es heißt

$$2 - \frac{R_2(\underline{z})}{R_1(\underline{z})} = \tan^2 \alpha(\underline{z}) \quad (4.112b)$$

Das Einsetzen der Krümmungsradien liefert, wenn  $1 + \overset{*}{r}^2 \neq 0$ ,

$$\overset{**}{r} + \frac{2 - \tan^2 \alpha}{r} (1 + \overset{*}{r}^2) = 0 \quad (4.113)$$

$$\overset{**}{r} + f_1(r, \overset{*}{r}) + f_2(r) = 0.$$

Für  $\tan^2 \alpha$  ist die Wickelbedingung einzusetzen.

Die zugehörigen Randbedingungen sind

$$r(\underline{z}=0) = R_2, \quad \overset{*}{r}(\underline{z}=0) = 0. \quad (4.114)$$

Aus obiger Gleichung läßt sich sofort ablesen, wo besondere Stellen der Wickelkontur sind.

Da man über  $\overset{*}{r} = 0$  (in den Bereich negativer Gaußscher Krümmung) hinaus praktisch nicht wickeln kann, gilt der Wendepunkt als Grenze (Bild 4.23). In ihm wird der Wickelwinkel

$$\tan^2 \alpha = 2 \quad \leadsto \quad \alpha = 54,75^\circ. \quad (4.215)$$

Der Radius am Wendepunkt (aus  $\sin \alpha_w = e/r_w$  und  $\tan^2 \alpha_w = \frac{\sin^2 \alpha_w}{1 - \sin^2 \alpha_w}$ )

$$r_w = \sqrt{\frac{3}{2}} e = 1,23 e$$

ist also nicht vom Äquatorradius abhängig.

Mit dem Wickelwinkel  $\alpha = 54,75^\circ$  wäre ~~auch~~ <sup>theoretisch</sup> jeder Zylinder unter Innendruck nur aus Winkellagen aufbaubar. Allerdings wäre ein solcher Zylinder sehr empfindlich gegenüber kleinen Lastveränderungen, weil jede Lastveränderung ein anderes  $\alpha_2$  bedingt.

Eine eingehendere Betrachtung der Konturdifferentialgleichung zeigt, daß bei dem Winkel  $\alpha = 54,75^\circ$  bzw.  $\tan^2 \alpha = 2$  oder  $r_w = 1,23 e$  die Krümmung der Kurve in der  $r - z$  - Ebene verschwindet bzw. ein Sattelpunkt mit dem Meridian Krümmungsradius  $R_1 = \infty$  vorhanden ist. Da die Krümmungsradien einen wesentlichen Einfluß auf die Spannungen haben, wäre es in diesem Fall zweckmäßig, als Polfitting eine Kegelschalenkappe an den Isotensoidteil des Bodens anzuhängen.

Für eine andere markante Stelle  $\alpha = 45^\circ$ ,  $r = e\sqrt{2} = 1,42e$  wird  $R_1 = R_2$ . Hier wird als Anschluß eine Kugelkappe mit dem Radius  $R_{45^\circ}$  wohl die geringeren Störungen im Spannungszustand bewirken.

Ein Sonderfall, der noch Beachtung verdient, ist der der Zero-Hoop-Stress-Confur. Hier ist die Membrankraft  $N_\varphi$  in der durch konstanten Innendruck belasteten Membranschale Null, wegen  $R_2 = 2 R_1$ . Alle Fäden verlaufen axial, d.h. auf Meridianen.

Die Bilder 4.24 bis 4.30 geben die Konturen geodätisch und planar gewickelter Behälter her. Bild 4.27 zeigt die Abweichung der Fadenablage beim planaren Wickeln von der Ablage auf der geodätischen Linie (statt in der Planarebene) des planaren Bodens.

#### b) Sonderfall Fliehkraft

Die Gleichung, die diesen Sonderfall bei der allgemeinen Rotationschale beschreibt, war Glg. (4.203 a). Sie soll als erstes in das üblicherweise bei der Berechnung von Wickelkonturen benutzte  $rg$ -KOS überführt werden. Dazu dienen die Beziehungen (4.128)

$$r' = \cos \varphi = \frac{dr}{ds}, \quad ds = R_1 d\varphi.$$

Es wird als erstes der Ausdruck

$$\frac{r}{\cos \varphi} = \frac{r}{dr} ds = \frac{r}{dr} R_1 d\varphi$$

ermittelt und eingesetzt

$$N_\varphi \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{r}{dr} R_1 d\varphi \frac{dN_\varphi}{R_1 d\varphi} + \frac{r}{\cos\varphi} p_\varphi - R_2 p = 0.$$

Weiter werden die Belastungen (4.195) und die Krümmungsradien (4.114) eingesetzt

$$N_\varphi \left(1 + \frac{-r^* r (1+r^{*2})^{3/2}}{(1+r^{*2})^{3/2} - 1}\right) + r \frac{dN_\varphi}{dr} + \frac{r}{\cos\varphi} \rho_v t r \Omega^2 \cos\varphi - r \sqrt{1+r^{*2}} \rho_v t r \Omega^2 \sin\varphi = 0$$

$$N_\varphi \left(1 - \frac{r r^*}{\sqrt{1+r^{*2}}}\right) + r \frac{dN_\varphi}{dr} + \rho_v t r^2 \Omega^2 \left(1 - \sqrt{1+r^{*2}} \sin\varphi\right) = 0. \quad (4.216)$$

Nun fehlt noch

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - r^{*2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1+r^{*2}}}.$$

Die Massenbelegung  $\rho_v t$  kann aufgeteilt werden in

$$\rho_v t = \rho_v \left( t_\alpha + \frac{\rho_{\text{Fällung}}}{\rho_v} t_{\text{Fällung}} \right) \quad (4.217)$$

Für eine <sup>nur</sup> unter Eigenmasse rotierende Schale bleibt somit nur  $\rho_v t_\alpha$  übrig.

Als Wanddickenverlauf ist wieder (4.206) einzusetzen

$$t_\alpha = t_{\alpha_A} R_2 \cos\alpha_A \frac{1}{r \cos\alpha(r)}$$

Bis zu dieser Stelle sind die Beziehungen die der allgemeinen Membrantheorie. Erst in Anwendung von Glg. (4.204) mit  $t_\alpha = t_{\alpha_1} + t_{\alpha_2}$  kommen wir zur Netztheorie, und zwar für die Membranschnittkraft

$$N_\varphi = \sum_{k=1}^2 t_{\alpha_k} \sigma_{\alpha_k} \cos^2\alpha_k,$$

für die folgende Veränderlichkeit über den Radius angenommen werden muß

$$N_\varphi = t_\alpha(r) \sigma_\alpha(r) \cos^2\alpha(r). \quad (4.218)$$

Das Einsetzen von  $N_\varphi$  führt auf eine Kontur-DGL in der noch zwei Unbekannte  $\sigma_\alpha$  und  $\alpha$  eingesetzt werden müssen, bevor sie gelöst werden kann. Wir wollen hier wieder eine geodätische Ablage anstreben

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{e^2}{r^2} \quad (4.219a)$$

und außerdem gleiche Faserbeanspruchung fordern (gegenüber Sonderfall Innendruck eine zusätzliche Bedingung)

$$\sigma_\alpha(r) = \sigma_\alpha = \text{const.} \quad (4.219b)$$



Als Randbedingungen liegen dieselben wie bei Innendruck vor.

Die Integration der Kontur-DGLn wird am bequemsten mit dem Runge-Kutta-Nyström Verfahren durchgeführt.

#### 4.9.4 Diskussion von berechneten und wirklich gewickelten Konturen

In [Zimmermann, 1973] ist eine interessante Untersuchung von verschiedenen Behältertypen vorgenommen worden. Für eine Eingruppierung dieser Typen ist die Tabelle 4.1 aufgestellt worden.

Wir sehen, daß bei einer Auslegung physikalische und geometrische Annahmen getroffen werden müssen, um die theoretische Kontur zu erhalten. Die strikte Anwendung dieser Annahmen würde, je nach geodätischer oder planarer Wickelbedingung eine ebensolche Fadenablage erfordern. Häufig ist eine solche Ablage aber fertigungstechnisch nicht verwirklichtbar, so daß die Möglichkeit besteht, eine nach einer planaren Wickelbedingung berechnete Kern- oder Linerkontur geodätisch zu bewickeln und umgekehrt. Einen Isotensoid kann man allerdings dann nicht erhalten.

Als physikalische Annahmen werden meistens nur einfache Kriterien angeführt. Daß es noch kompliziertere Annahmen zur Berechnung der Kontur gibt, wird bei den Bruchkriterien in Abschnitt 7 gezeigt.

Das spezielle Ziel der oben erwähnten Untersuchungen war, den Einfluß der Kontur auf die Güte eines Behälters festzustellen. Um unterschiedliche Konturen zu erzeugen, wurden drei Annahmen über den rechnerischen Spannungszustand in der Mittelfläche der tragenden Verbundstruktur getroffen (Auszug aus dem Untersuchungsbericht):

1. Die Normalspannungen in Richtung senkrecht zur Verstärkung und die Schubspannungen, bezogen auf die Verstärkungsrichtung und senkrecht zu ihr, verschwinden ( $\sigma_{\perp} = 0, \tau_{\#} = 0, \tau_{12} = 0$ ). Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit der Annahme der Netztheorie, daß die Belastung nur durch die Verstärkungsfäden aufgenommen wird, die Matrix also keinen Beitrag dazu leistet. Wenn man voraussetzt, daß der Verbund aus Verstärkung und Matrix ein Kontinuum bildet, lassen sich beide Bedingungen nicht gleichzeitig erfüllen.

2. Unter der Annahme, daß Verstärkung und Matrix ein Kontinuum bilden, sollen die Normalspannungen in Richtung senkrecht zur Verstärkung verschwinden ( $\sigma_{\perp} = 0$ , Typ T3).
3. Unter der Annahme, daß Verstärkung und Matrix ein Kontinuum bilden, sollen die Schubspannungen, bezogen auf die Verstärkungsrichtung und senkrecht zu ihr, verschwinden ( $\tau_{\#} = 0$ , Typ T4).

Die Annahmen  $\sigma_{\perp} = 0$  bzw.  $\tau_{\#} = 0$  sollen nicht als Bruchkriterien verstanden werden, sondern nur so, daß mit diesen beiden theoretischen Annahmen Konturen definiert werden können. Aus den Gleichgewichtsbedingungen, jeweils einer dieser Annahmen und aus Annahmen über den Verlauf der Verstärkungsfäden (Wickelmuster) lassen sich Konturen berechnen. Statisch bzw. fertigungstechnisch sinnvoll sind das geodätische und das planare Wickelmuster.

Die drei Annahmen über den Spannungszustand und die zwei Annahmen über das Wickelmuster führen zu sechs Konturen, die wiederum geodätisch oder planar bewickelt werden können -um den Einfluß des Wickelmusters bei gegebener Kontur kennen zu lernen-, so daß sich zwölf Behältertypen ergaben. Zimmermann untersuchte einen Teil der Aufgabe. Er bewickelte die mit den genannten drei Annahmen berechneten Bodenkonturen planar.

Aus dem Vergleich der Konturen ergibt sich, daß die Kontur des Typs T3 von der zugehörigen, mit planarem Wickelmuster berechneten Kontur nur geringfügig abweicht (Bild 4.31), während die Abweichungen bei den Typen T2 und T4 größer sind.

Ein ähnlicher Vergleich wird für die Wickelwinkel  $\alpha$  durchgeführt.  $\alpha$  ist der Winkel zwischen Faden und Meridian im gerade betrachteten Punkt der Kontur. In dem Bild 4.32 ist der Winkel  $\alpha$  in Abhängigkeit von der Radialkoordinate  $r$  aufgetragen, jeweils für geodätisches und planares Wickeln. Bei der Ermittlung von  $\alpha$  wurden die Konturen der Typen T2, T3 und T4 zugrunde gelegt. Man sieht, daß zwischen dem bei der Konturberechnung angenommenen und dem verwirklichten Wickelmuster große Differenzen bestehen. Am größten sind diese Unterschiede beim Typ T3, am geringsten beim Typ T4.

Die Annahme über den Spannungsverlauf beim Typ T3 ( $\sigma_{\perp} = 0$ ) scheint also zu Konturen zu führen, die nur wenig empfindlich gegenüber

Winkeländerungen sind.

Als Ergebnis zeigt sich, (wobei sicherlich die Sprödigkeit der Harzmatrix auch von Bedeutung sein wird), daß die Kontur den Strukturfaktor wesentlich beeinflussen kann, daß geringe Konturunterschiede aber auch nur geringe Unterschiede bewirken.

Die statische Auswertung der Versuchsergebnisse ergab, daß geringe Variationskoeffizienten der Festigkeiten erreichbar sind. Wichtig dafür ist jedoch das Vorhandensein einer zerstörungsfreien Prüfmethode, die Ausreißer erkennen läßt.

Es wurde deutlich, daß eine für die Analyse der Behälter ausreichende Theorie physikalische und geometrische Nichtlinearitäten sowie Biegebeanspruchungen einschließen muß.

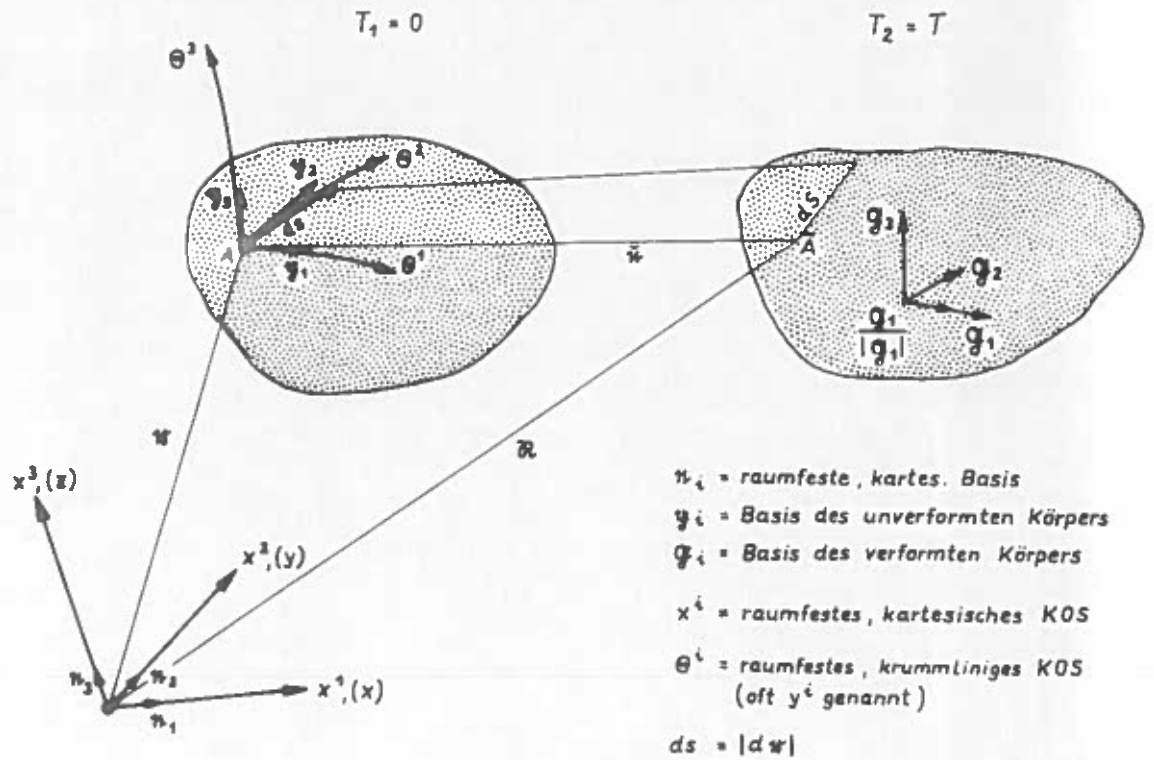


Bild 4.1 Koordinatensysteme des Körpers

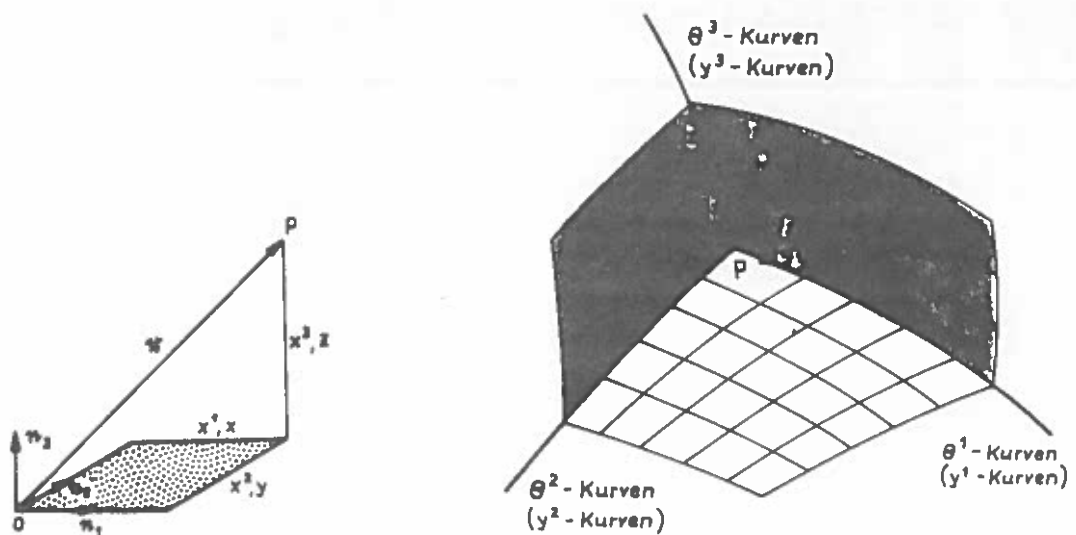


Bild 4.2 Geradlinige und krummlinige Koordinaten

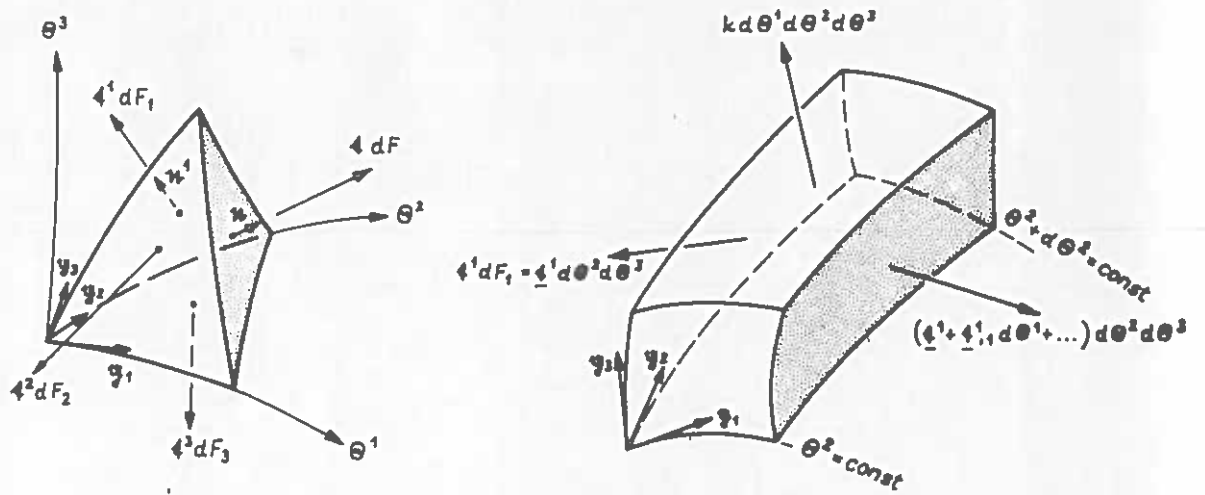


Bild 4.3 Gleichgewichte am krummlinigen, unverformten Tetraederelement u. am Volumenelement

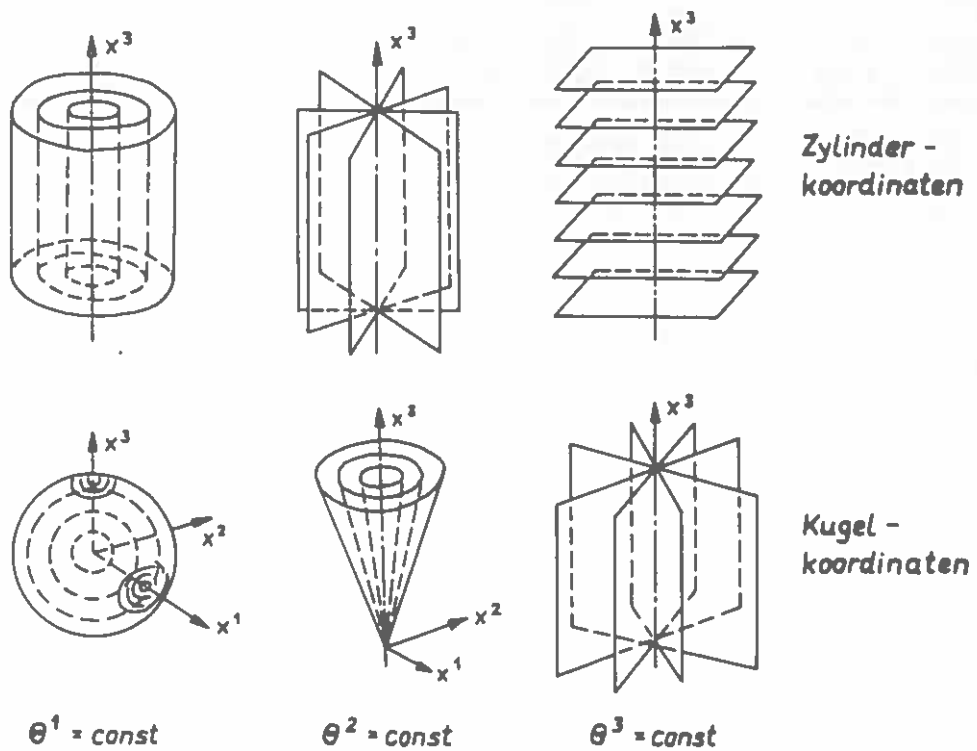


Bild 4.4 Flächen  $\Theta^i = \text{const}$

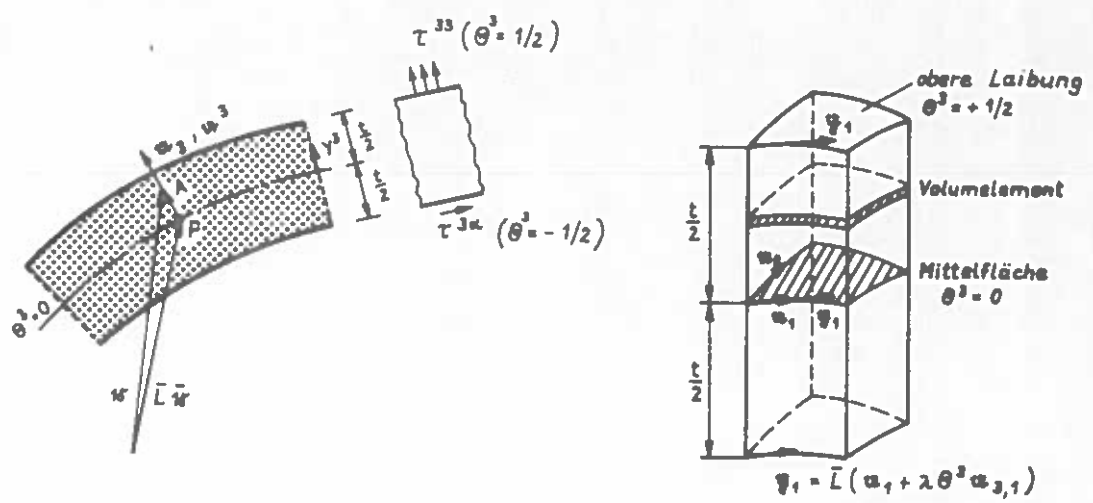


Bild 4.5 Geometrie der Schale

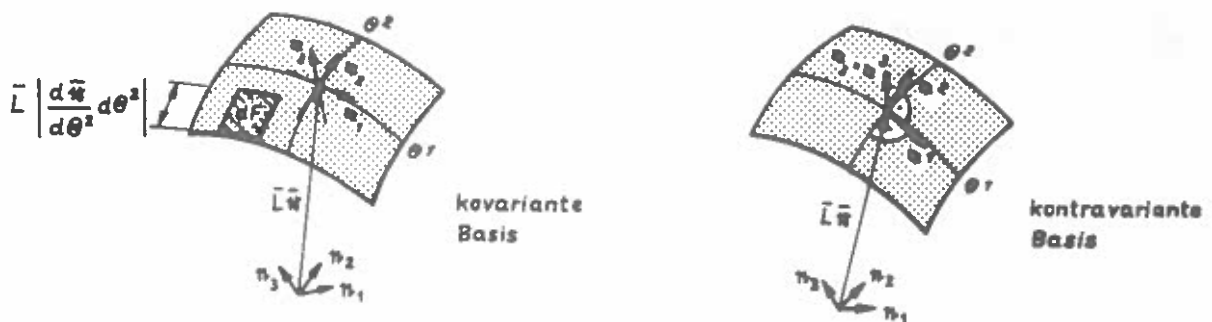


Bild 4.6 Koordinatensysteme der Schale (Mittelfläche)

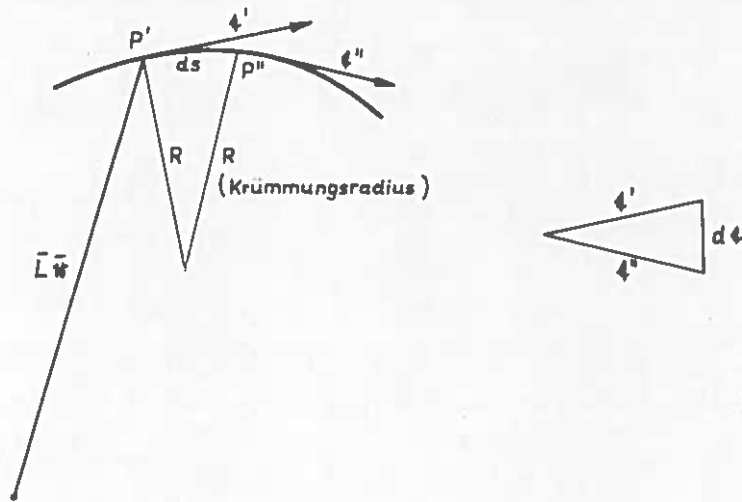


Bild 4.7 Normalschnitt einer Fläche

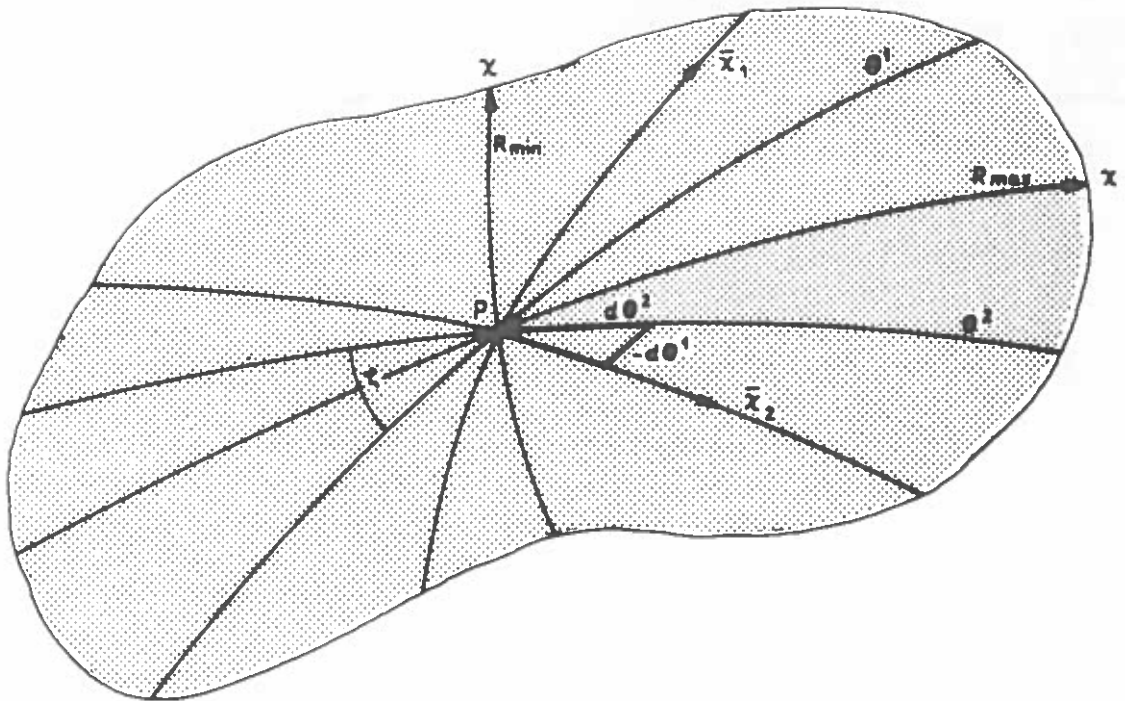
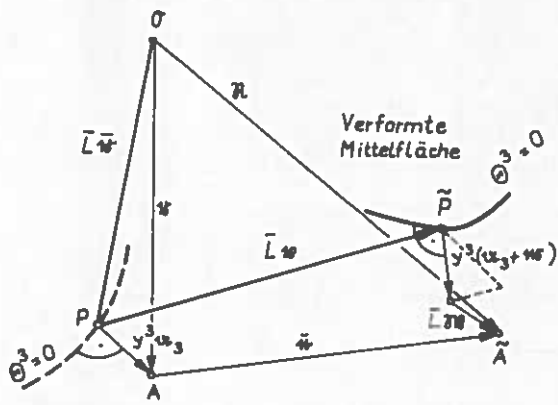


Bild 4.8 Krümmungslinien auf einer Schale



Zusammenhang der Schalenmittelflächenpunkte  $P, \tilde{P}$  mit den beliebigen Punkten  $A, \tilde{A}$

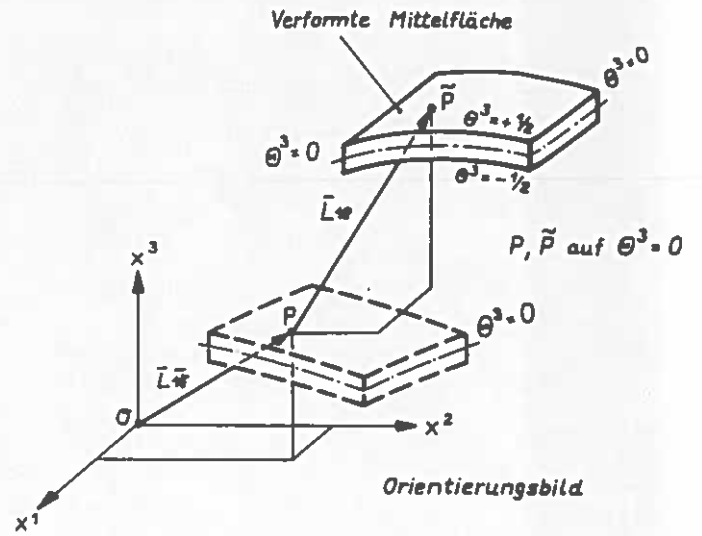


Bild 4.9 Verschiebungskomponenten der Schale

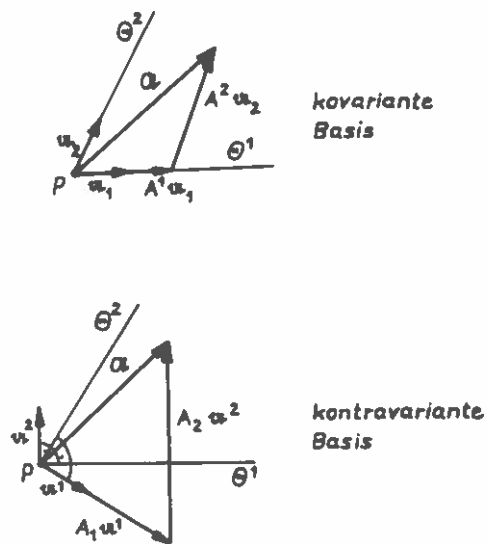
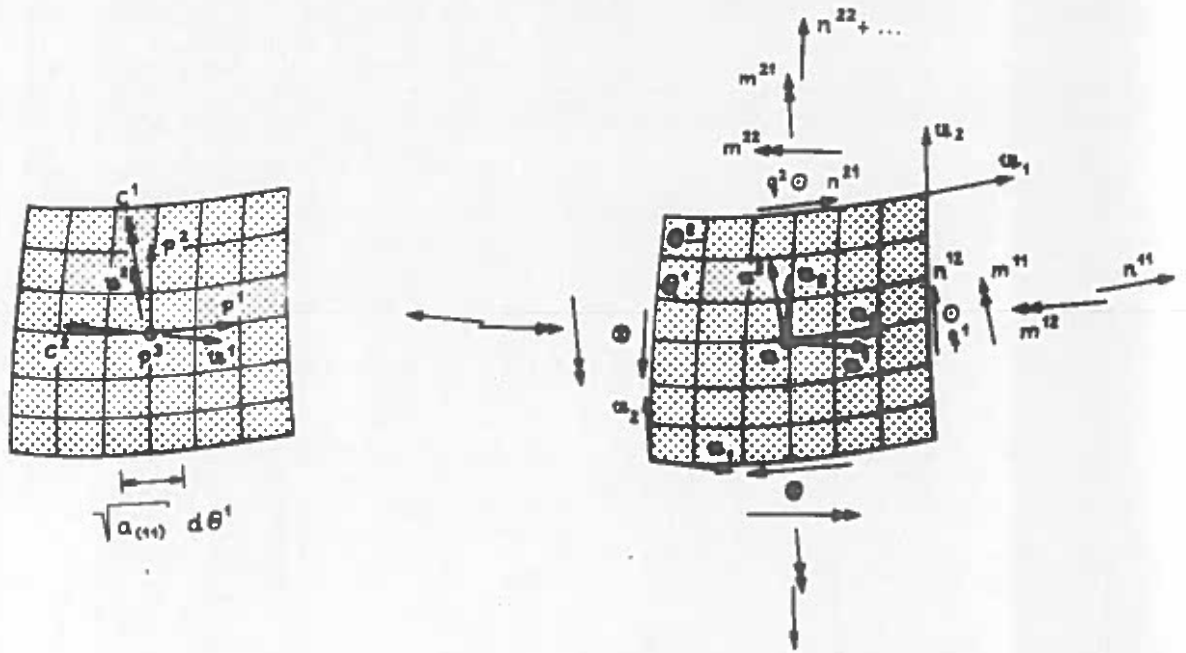


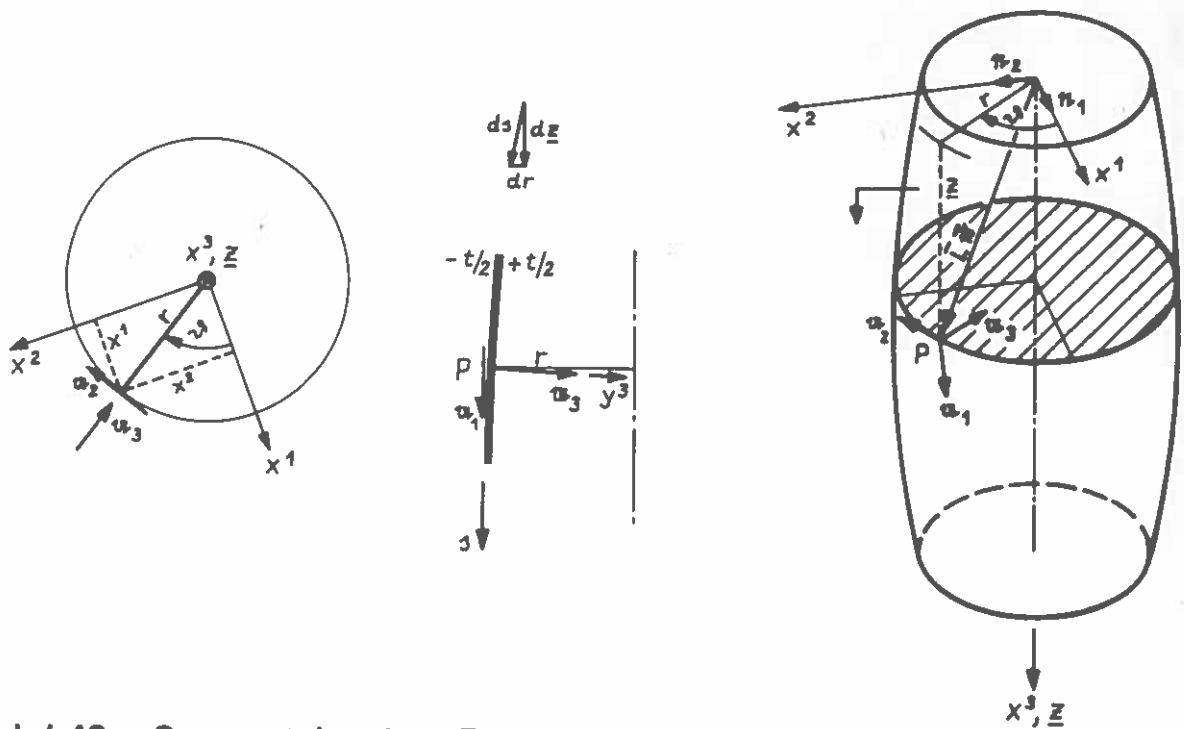
Bild 4.10 Zerlegung einer Schalen-Vektorgröße





**Bild 4.11 Tensorielle Lastkomponenten und tensorielle Schnittgrößen am endlichen Schalelement**

( Schnittkräfte: Kov. gerichtet. Schnittmomente: Kontravar. gerichtet.  
 Der Verdeutlichung wegen ebenes  $\theta^1, \theta^2$ -Raster gewählt. Die Spannungszuwächse sind nicht eingetragen. )



**Bild 4.12 Geometrie der Rotationsschale**

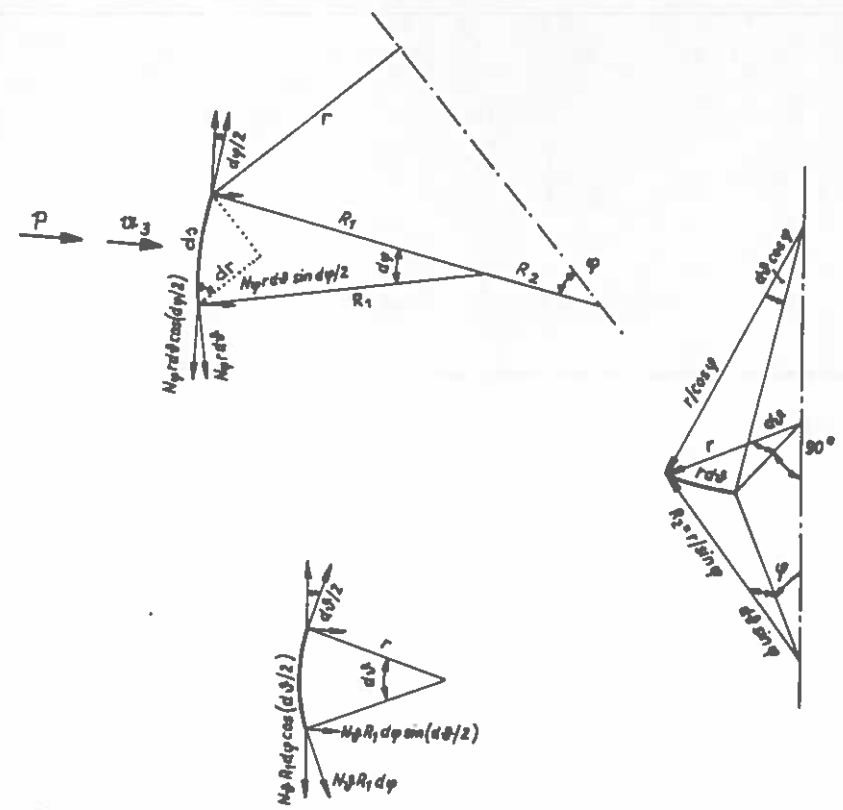
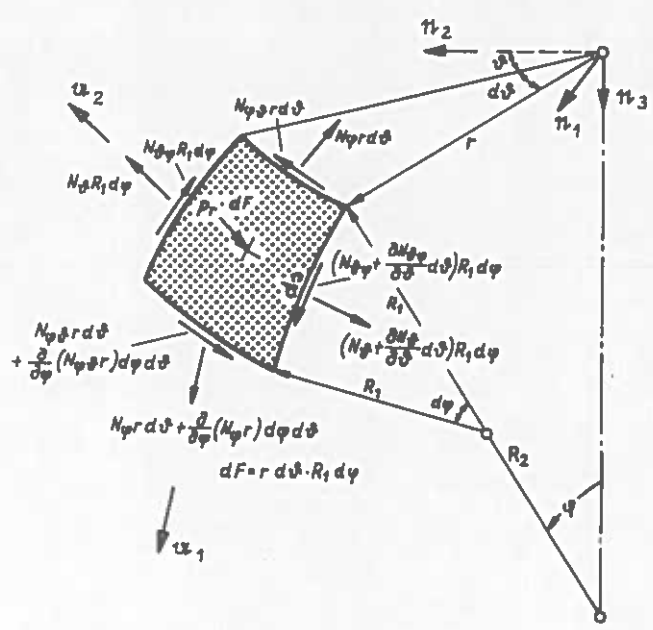


Bild 4.13 Element einer Drehschale mit Membranschnittkräften

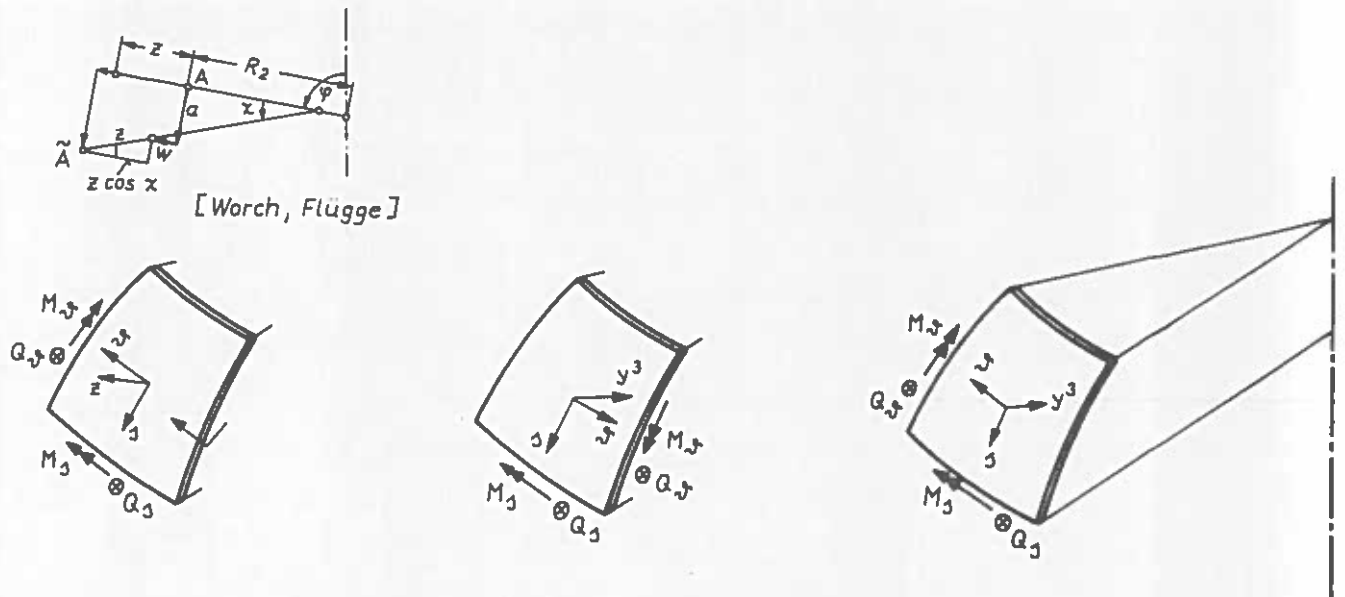


Bild 4.14 Wirkrichtungen von Schnittgrößen in verschiedenen KOS und Darstellung der Drehung  $\alpha$  der Meridiantangente

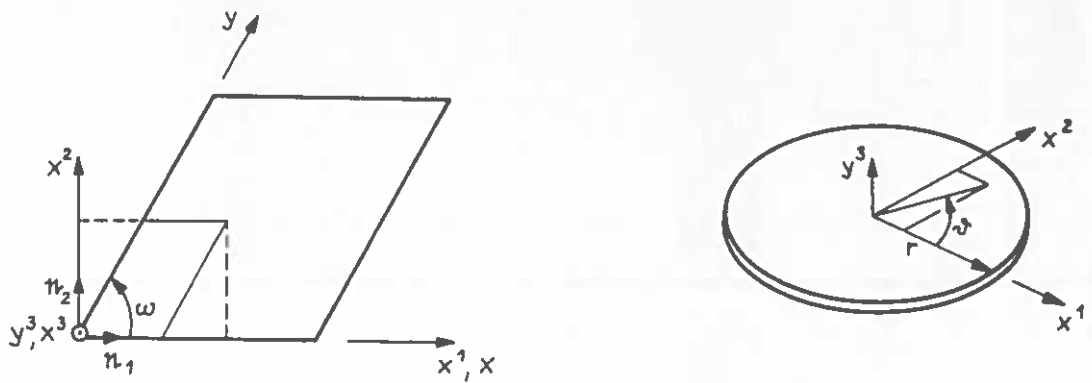


Bild 4.15 Koordinatensysteme beim Parallelogramm und der Kreisplatte

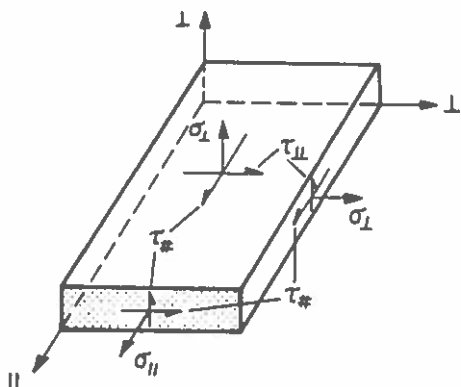


Bild 4.16 Spannungen in einer drei-dimensionalen, unidirektionalen Schicht (nach Puck)

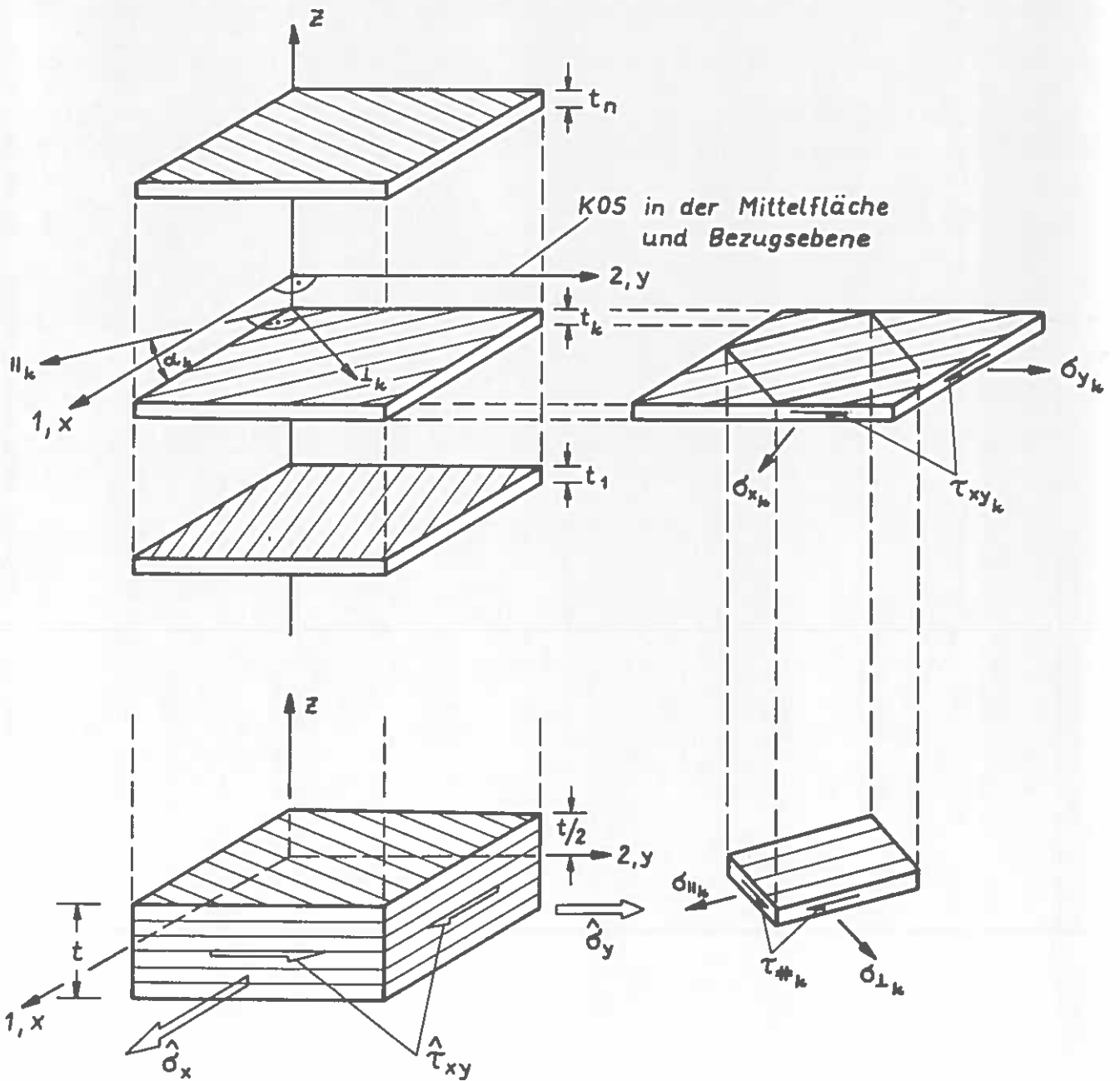


Bild 4.17 Membranspannungen am ebenen Mehrschichtenverbund mit  $n$  orthotropen Einzelschichten

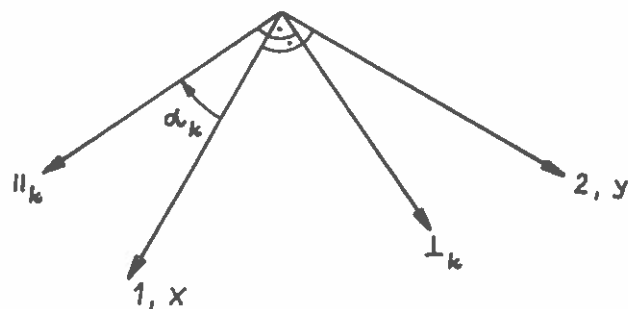


Bild 4.18 Transformation der natürlichen Achsen auf die Hauptachsen des Bauteils

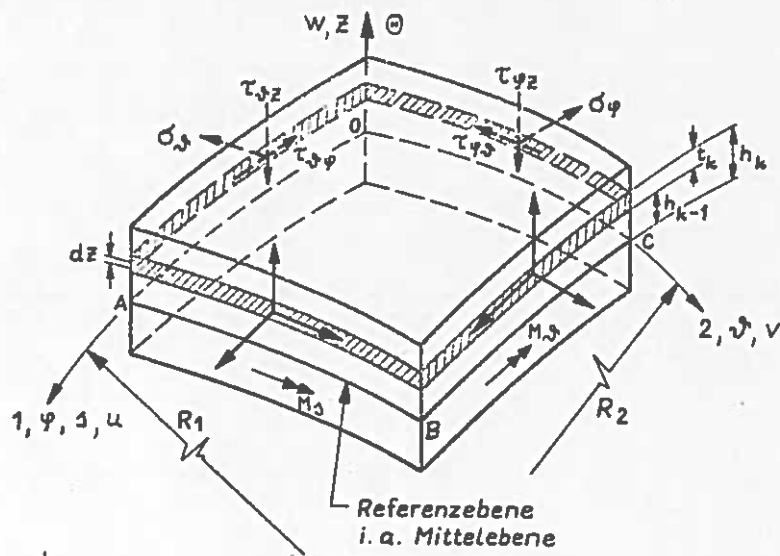


Bild 4.19 Schichtspannungen

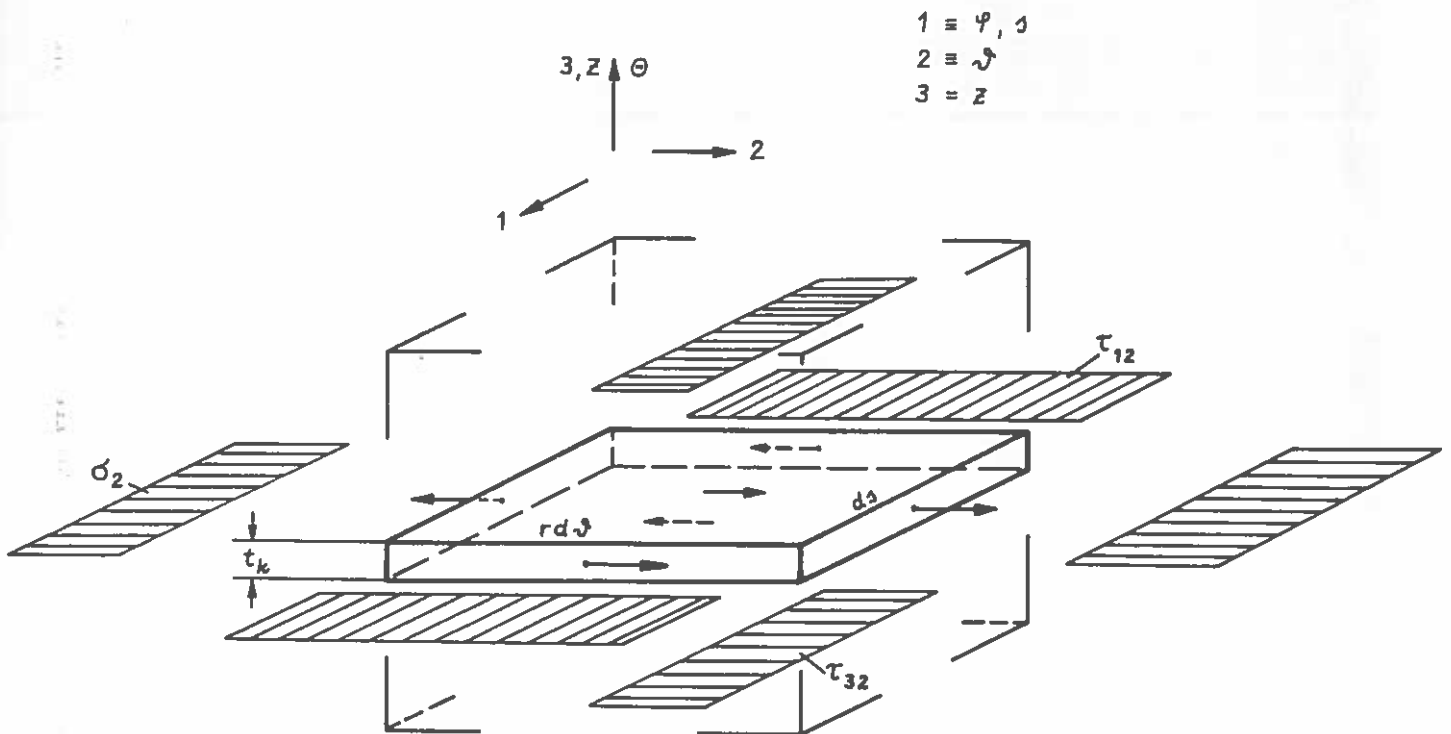


Bild 4.20 Spannungen am Schichtelement in 2-Richtung

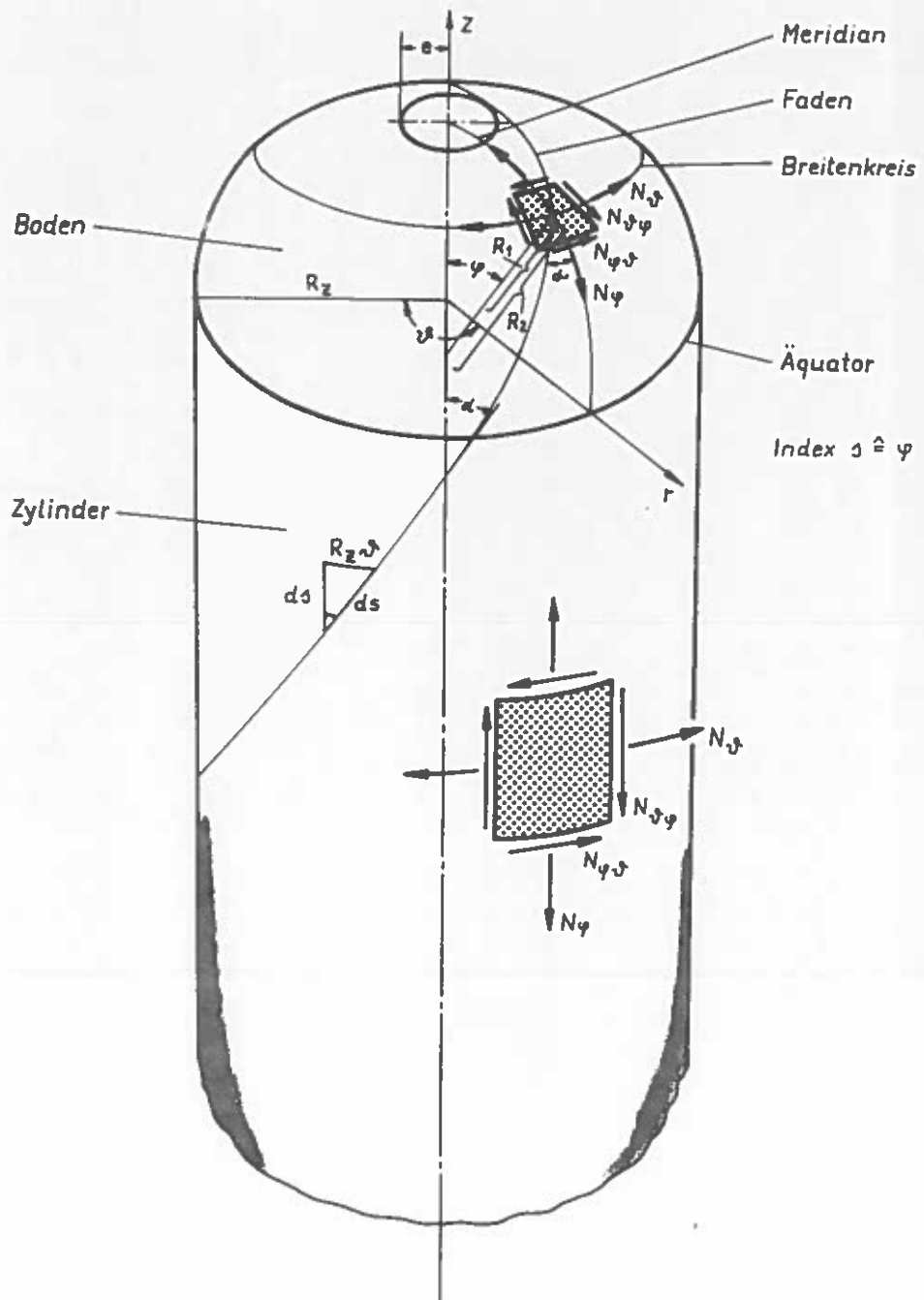


Bild 4.21 Bezeichnungen am Behälter

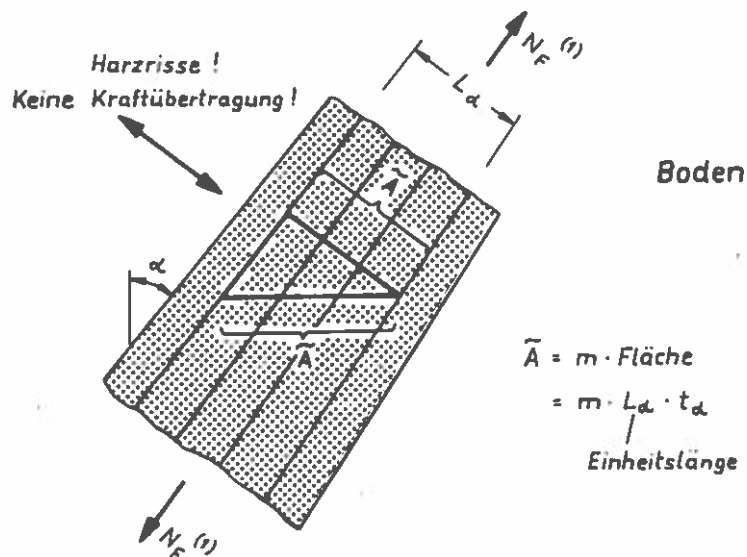
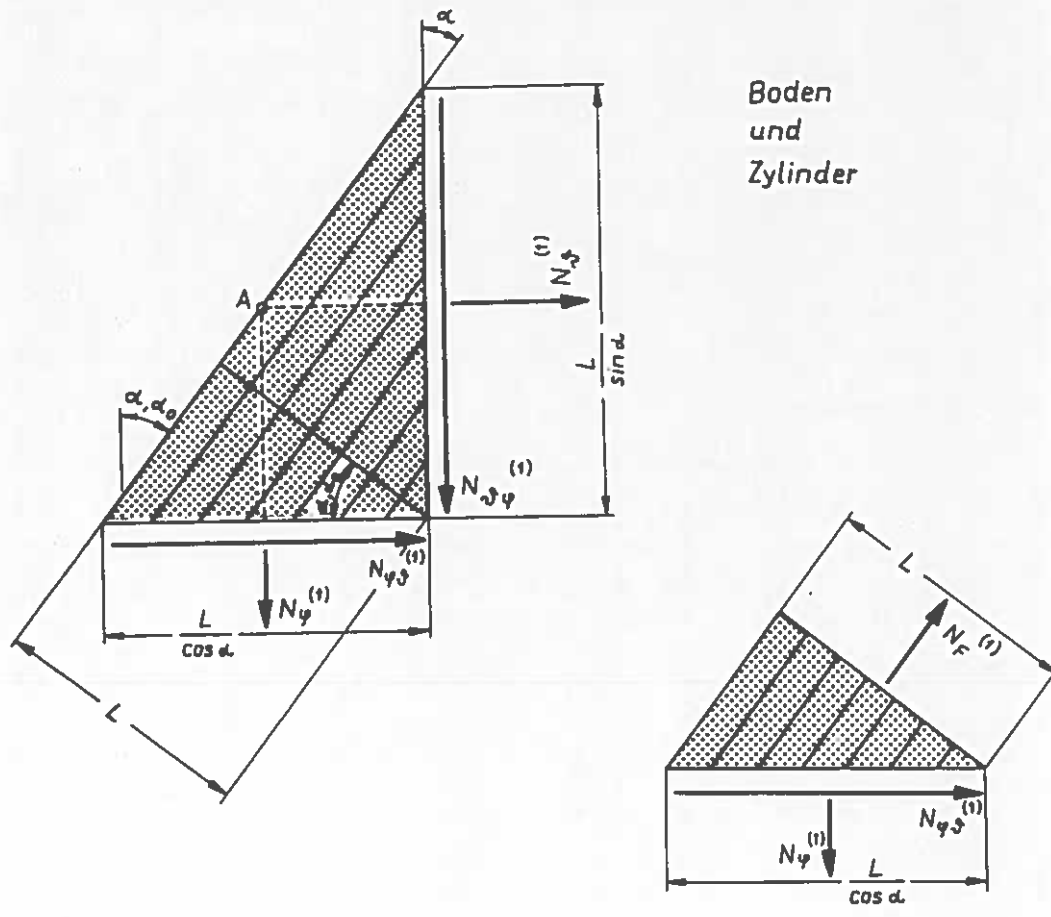


Bild 4.22 Membrankräfte in der unidirektionalen Schicht  
Netztheorie

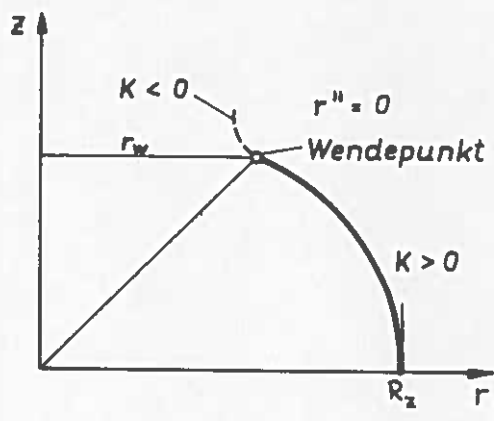


Bild 4.23 Differentialgeometrische Größen am Boden

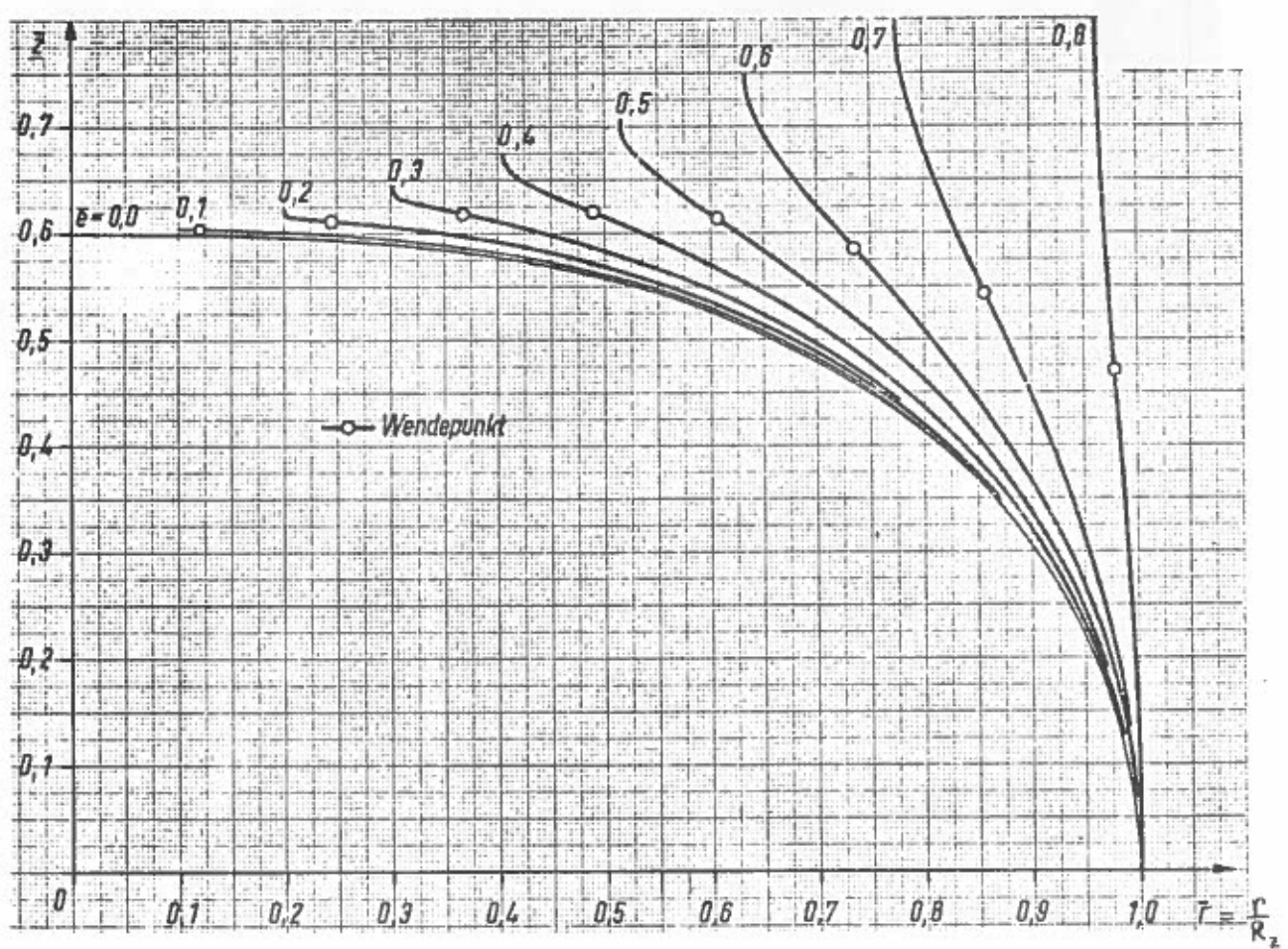


Bild 4.24 Theoretische Mittelflächen-Konturen von Isotenoidböden ( Zimmermann, 1969 )



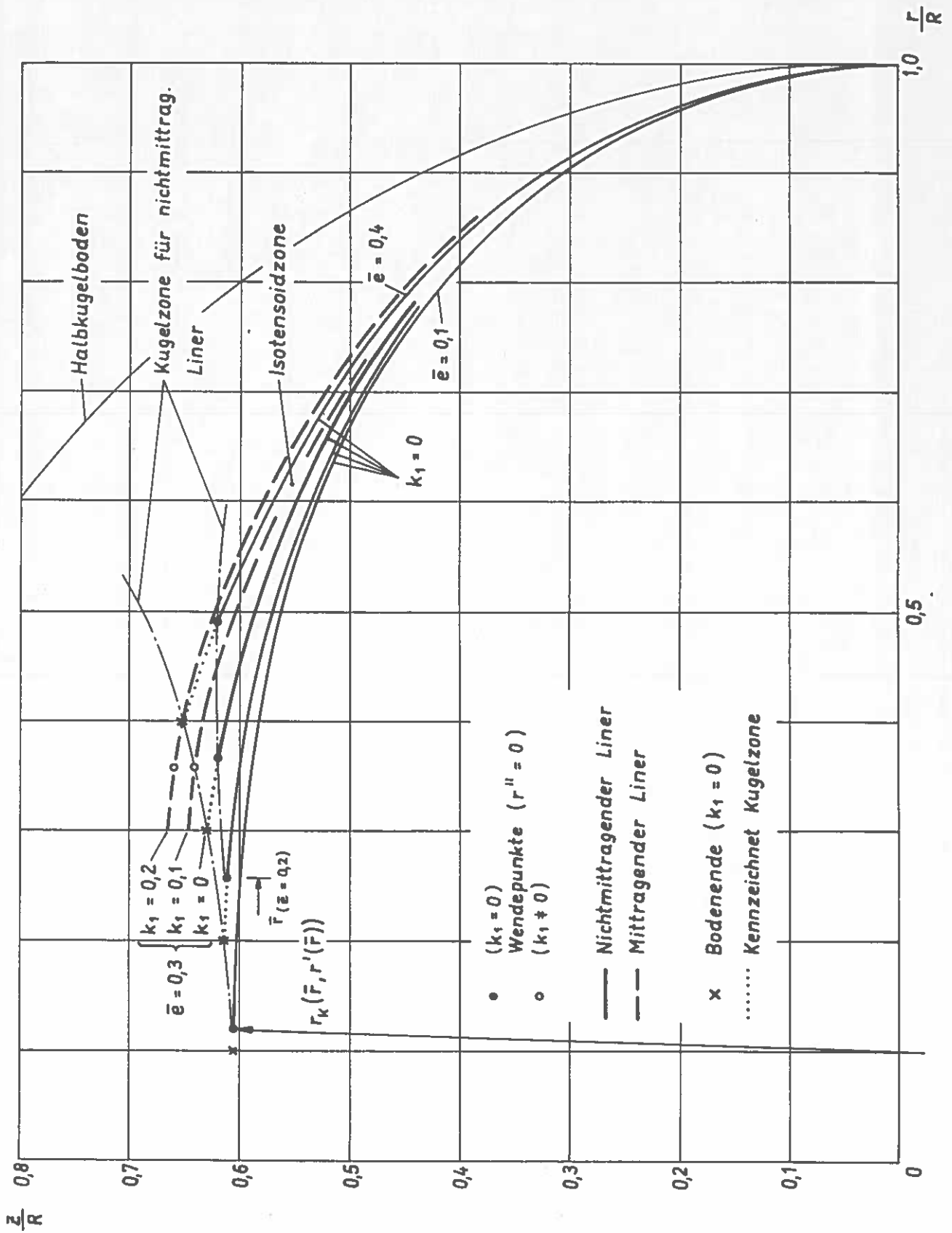


Bild 4.25 Konturen von einschaligen Isotensoidböden mit Kugelzone

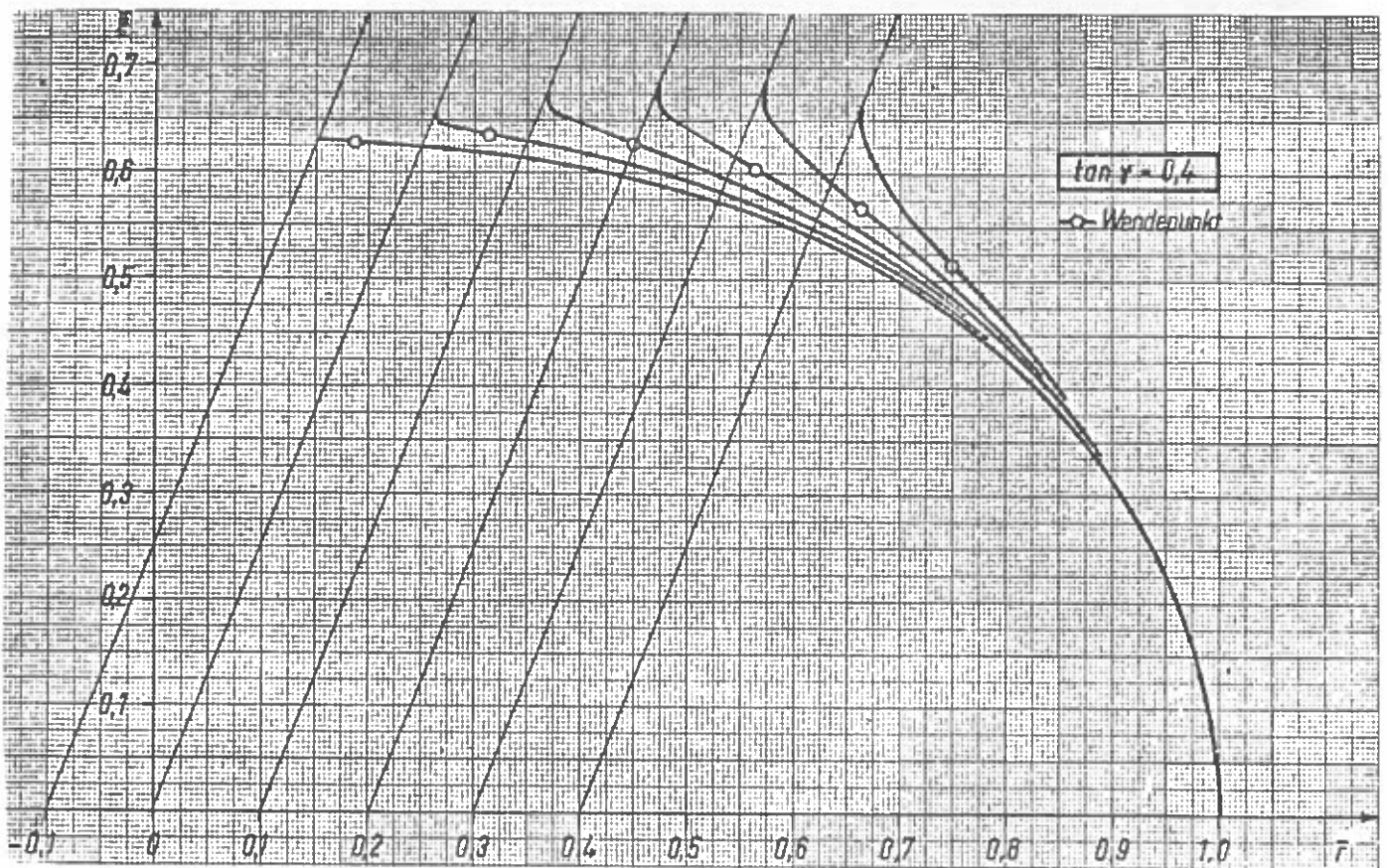
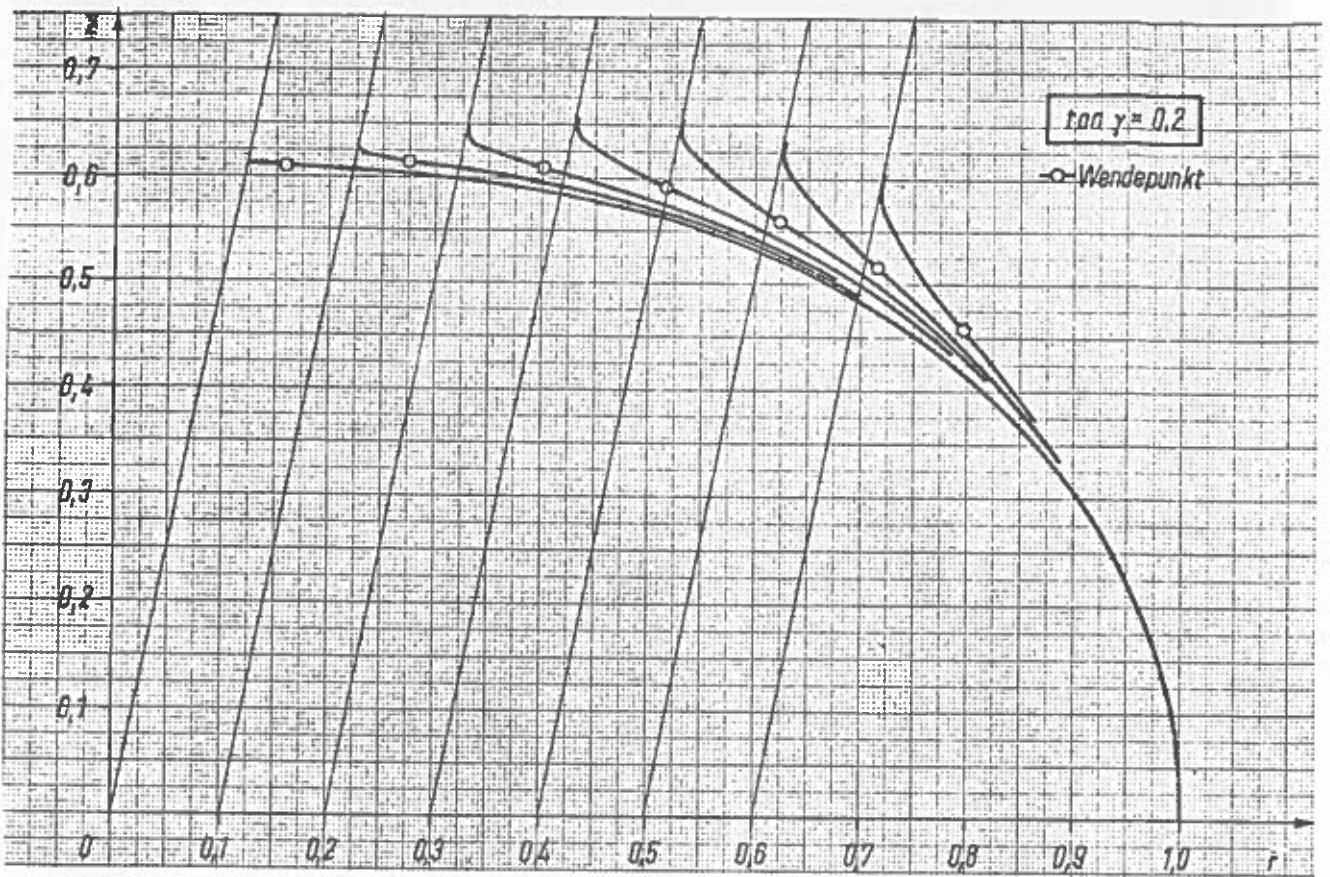


Bild 4.26 Theoretische Mittelflächen-Konturen planar gewickelter Böden [Zimmermann, 1969]

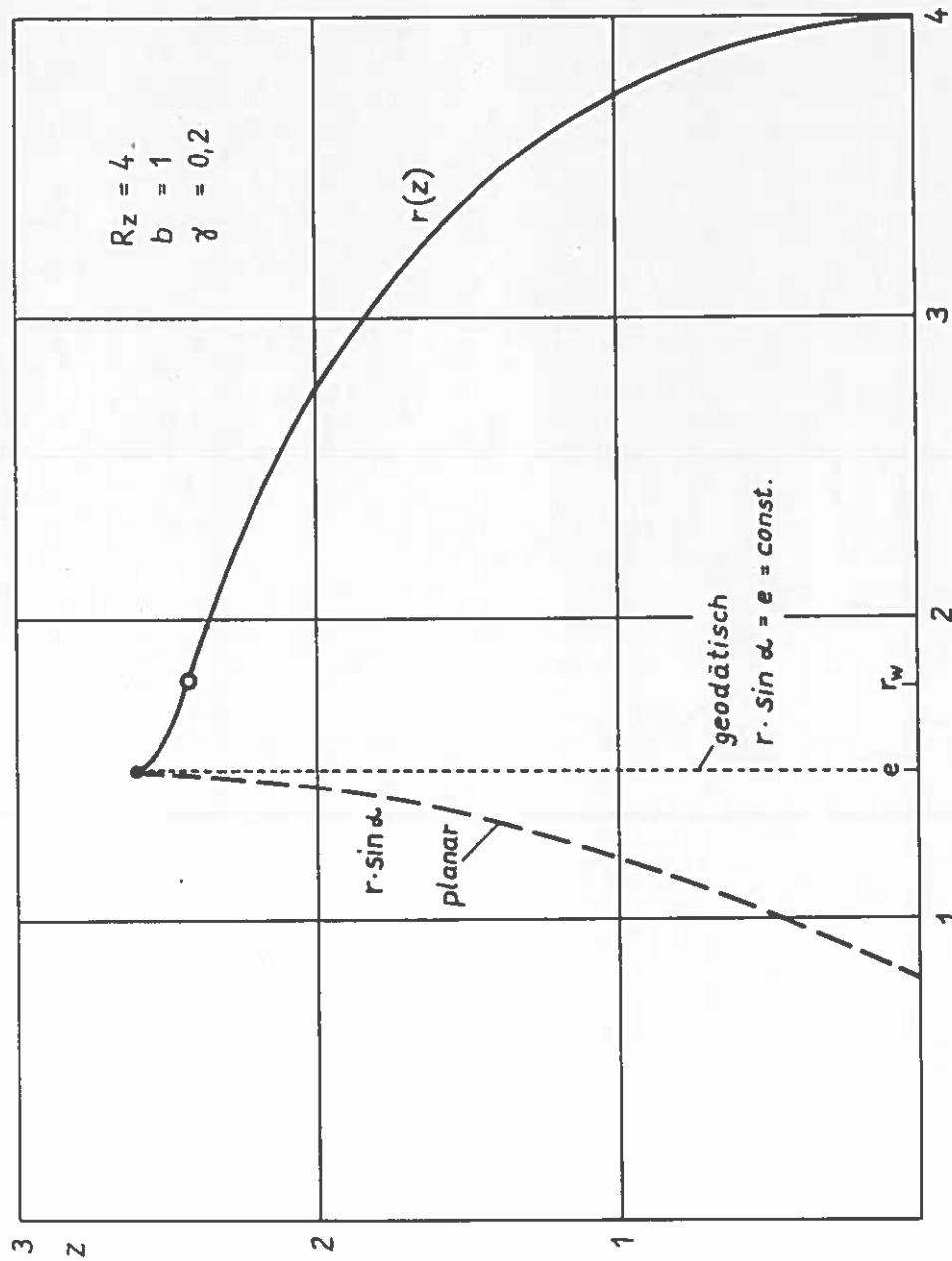
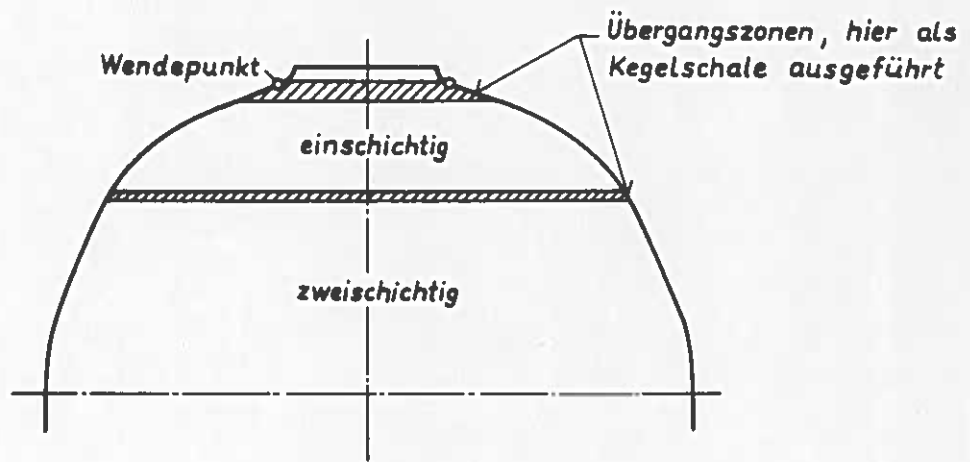
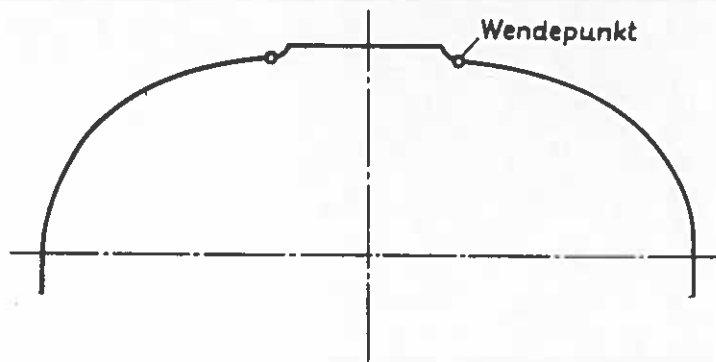


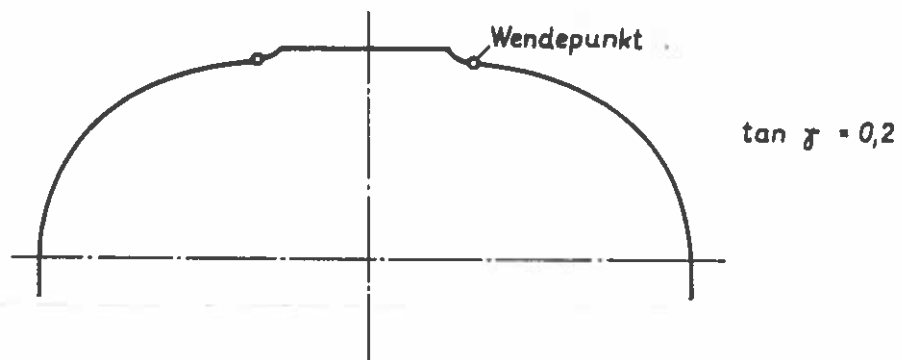
Bild 4.27 Geodätische Abweichung des planaren Bodens



**Bild 4.28**    **Zweischichtige Isotensoidschale**



**Bild 4.29**    **Einschichtige Isotensoidschale**



**Bild 4.30**    **Einschichtige, planar gewickelte Schale**

Mögliche Fadenablage (wickelmaschinenabhängig)			
geodätisch	planar		
gg <sup>1)</sup>	gp <sup>2)</sup>	geodätisch (Bild 3.9) $\sin \alpha = e/r$ bzw. $\tan^2 \alpha = \frac{e^2}{r^2 - e^2}$	
			Die Fäden rutschen beim Wickeln in Richtung $\alpha \cdot r_L \rightarrow \alpha = \arcsin \frac{e}{r_L}$
pg	pp <sup>2)</sup>	planar (Bild 3.11) $\tan^2 \alpha = \frac{[r \tan \gamma - r^*(b + z \tan \gamma)]^2}{(1 + r^{*2})[r^2 - (b + z \tan \gamma)^2]}$	
gg <sup>1)</sup>	gp <sup>2)</sup>	Netztheorie $\sigma_L = 0, \tau_{*} = 0$ bzw. $\sigma_F = \text{const}$	
		$\sigma_L = 0$ oder $\tau_{*} = 0$	
		$\epsilon_{II} = \epsilon_L$	3)
		Bruchkriterien komplizierter Art nach § 8.4	3)
<p>Annahmen für die Berechnung der Kontur der Mittelfläche einer Verbundschale unter Innendruck</p> $DGL: r^{*2} + (2 - \hat{\sigma}_s / \hat{\sigma}_q) \frac{r}{1 + r^{*2}} = 0, \quad r^{*2} = \frac{dz}{dr}$		Geometrische Annahmen (+Netztheorie: $\hat{\sigma}_s / \hat{\sigma}_q = \tan^2 \alpha$ )	Physikalische Annahmen

1) Strenge Netztheorie, Isotensoid

2) In [Zimmermann, 1973] verwirklichte Behälter

3) In [Förster / Kraft] berechnete Behälter zum Beispiel

Tabelle 4.1 Behälterkonturen und Fadenablage

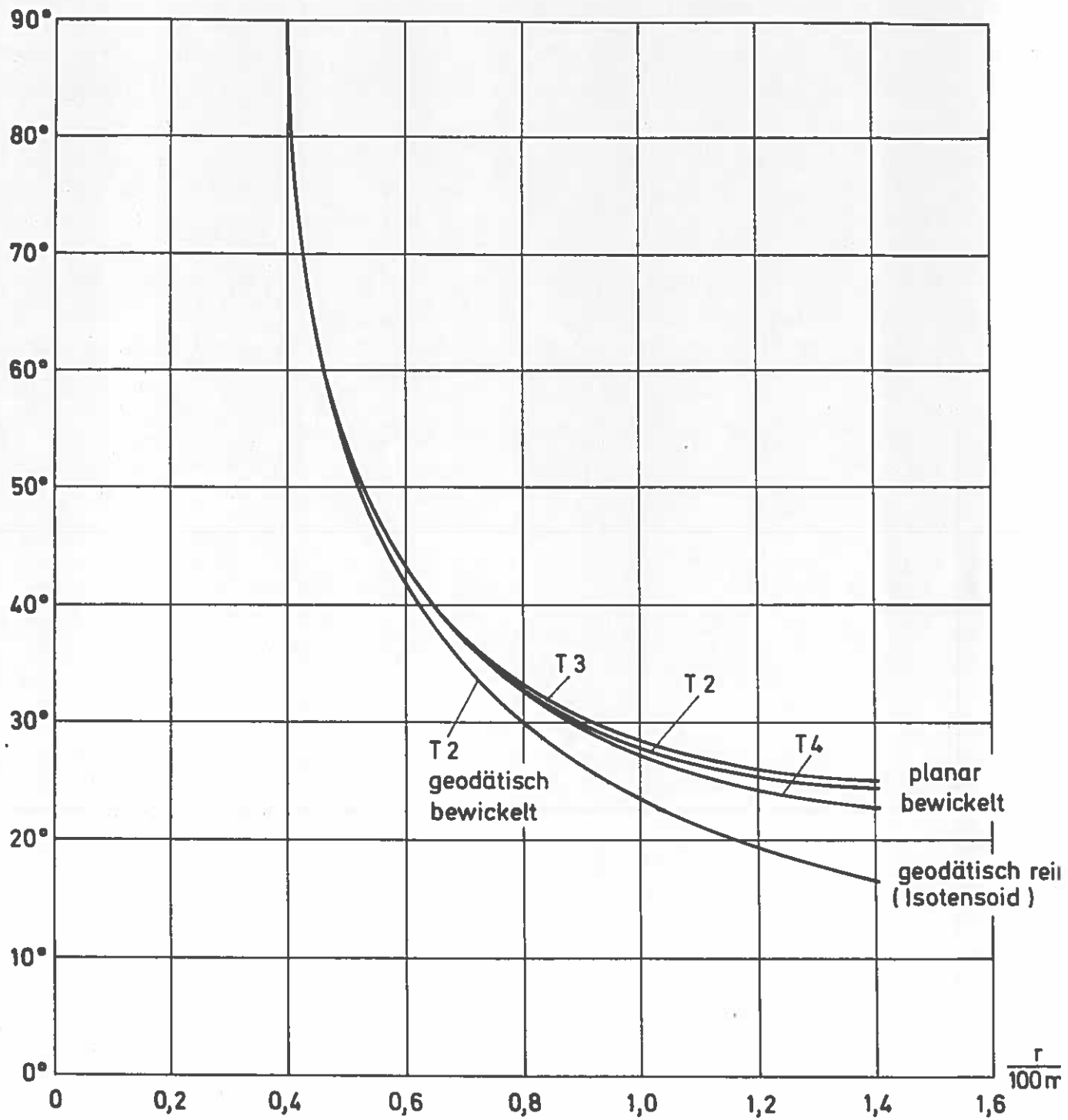
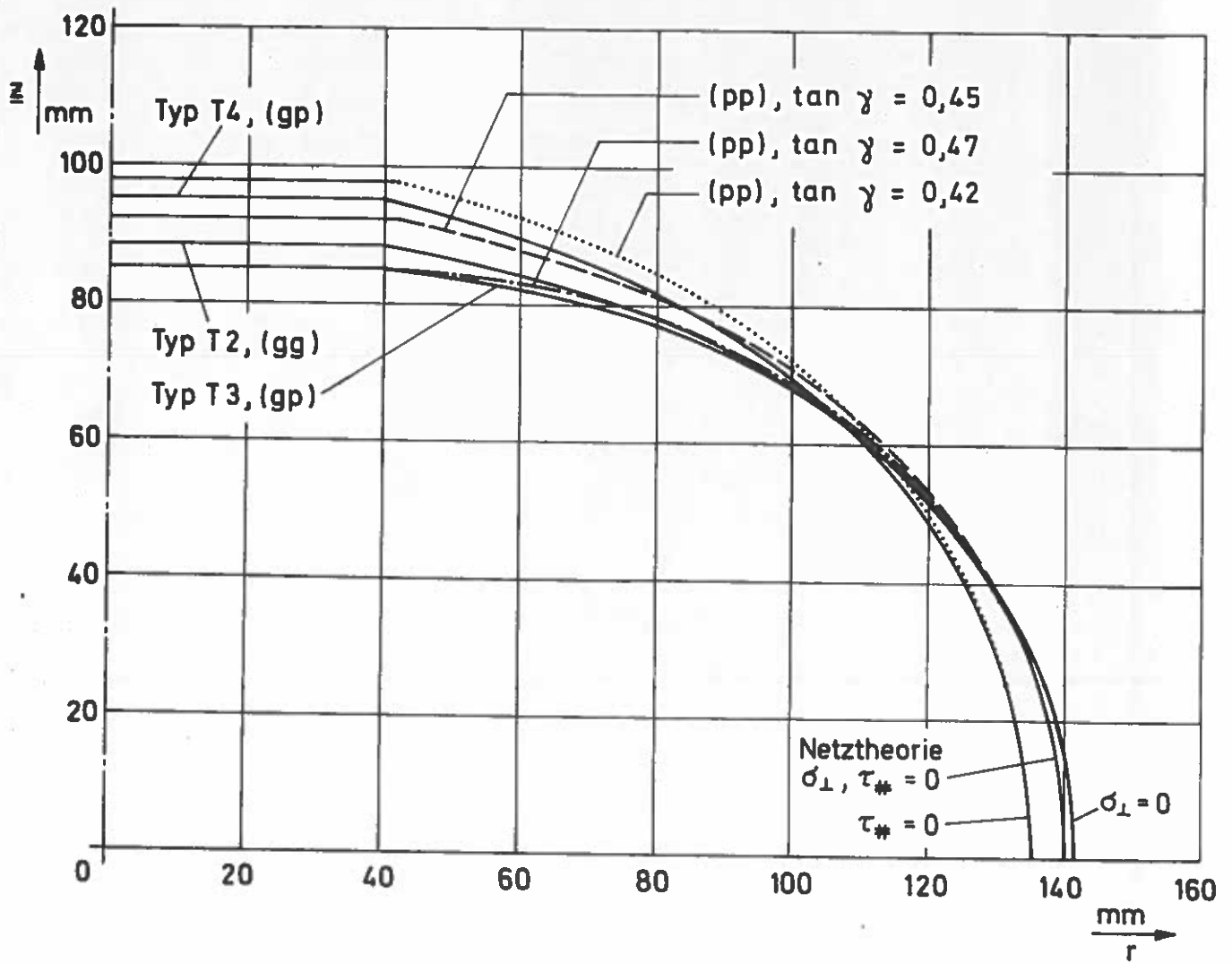


Bild 4.31 Wickelwinkel  $\alpha$  als Funktion der Radialkoordinate  $r$  ( $e = 40 \text{ mm}$ ), (aus [ Zimmermann, 1973 ])



**Bild 4.32** Konturvergleiche geod.-planarer Behälter  
 ( $e = 40 \text{ mm}$ ,  $\text{Vol} = 7,9 \text{ dm}^3$ , nach [ Zimmermann, 1973 ])

## 5. Elastische Konstanten des Verbundes

### 5.1 Physikalisch lineares Elastizitätsgesetz

Faserverstärkte Kunststoffe sind Werkstoffe aus mehreren Materialien unterschiedlicher Eigenschaften. Zu ihrer Berechnung - speziell unter Kurzzeitbeanspruchung - kann man, wenn die Verformungen oder die Spannungen nicht zu hoch werden, auf das Hookesche Gesetz zurückgreifen. Allerdings sind hier die elastischen Beziehungen für anisotrope Werkstoffe anzuwenden, da die Verstärkungswirkung fast nur in Längsrichtung der in die Matrix eingebetteten Fasern erfolgt. Gegenüber dem homogenen, isotropen Körper ist der FK mikroskopisch inhomogen. Makroskopisch wird er aber schichtenweise als homogen angesehen und berechnet.

Die Beziehungen zwischen den Spannungsgrößen  $\tau^{ij}$  und den Verzerrungsgrößen  $\gamma_{ij}$  werden in den sogenannten Elastizitätsgesetzen oder Stoffgesetzen formuliert. In dieser Arbeit wollen wir uns nur mit der physikalisch linearen Theorie, mit dem Hookeschen Gesetz befassen. Das Hookesche Gesetz kann einmal als eine Annahme angesehen werden, die der Bestätigung durch Erfahrung und Versuch bedarf, bzw. es muß aus der Untersuchung der die Verformung des Körpers begleitenden Vorgänge abgeleitet werden. Eine andere Möglichkeit ist, daß man die Existenz eines elastischen Potentials  $W$  voraussetzt und daraus nach einigen Betrachtungen ebenfalls zu diesem Gesetz gelangt. Hier soll der letztere Weg gewählt werden.

Für ein beliebiges raumfestes Koordinatensystem kann nach [Green/Zerna] die Beziehung

$$\tau^{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ji}} \right) \quad (5.1)$$

angeschrieben werden.

Das raumbezogene Potential  $W$  darin ist auch bei anisotropen Körpern invariant gegenüber Koordinatentransformationen, was mit Vorteil genutzt werden kann.

Es darf weiter für infinitesimale Verzerrungen, falls keine Eigenspannungen ( $E^{ij} = 0$ ) vorliegen,

$$W = \frac{1}{2} E^{ijkl} \gamma_{kl} \gamma_{ij} \quad (5.2)$$

angesetzt werden, wobei der Proportionalitätsfaktor  $E^{ijkl}$  nicht von den Verzerrungen abhängt. Da  $W$  invariant ist, folgt, daß  $E^{ijkl}$  ein Tensor ist. Er wird Elastizitätstensor genannt und transformiert sich



wie ein Tensor 4. Stufe.

Zu W muß bemerkt werden, daß es entsprechend den beiden Hauptsätzen der Thermodynamik in zwei physikalischen Arten auftritt, wobei beide Male reversible Formänderungen auftreten. Der Unterschied liegt darin, ob eine große Wirkungsdauer der Beanspruchung vorliegt und ein Temperaturengleich erfolgen kann (isotherm), oder ob kein Ausgleich der bei elastischen Deformationen auftretenden Wärmetönungen möglich ist (adiabatisch). Im statischen Versuch wird angenähert ein isothermer Elastizitätsmodul besser Sekantenmodul gemessen, während der dynamische Versuch adiabatische Werte liefert. Die Differenzen sind bei kristallinen und glasigen Körpern allerdings kleiner als 1 % und können vernachlässigt werden; bei Kunststoffen gilt das im allgemeinen nicht mehr.

Wir setzen nun Glg. (5.2) in (5.1) ein, führen die Summation durch und differenzieren die einzelnen Glieder. Nach tensorieller Zusammenfassung aller Größen erhalten wir schließlich das Hookesche Gesetz

$$\tau^{ij} = E^{ijkl} \gamma_{kl} \quad \text{mit } \begin{matrix} kl = \text{Summationsindizes} \\ i, j, k, l = 1, 2, 3 \end{matrix} \quad (5.3)$$

Dieses Gesetz sagt aus, daß jede der neun Komponenten des Verzerrungstensors eine Spannung in jeder der neun Komponenten des Spannungstensors hervorbringen kann (s. Bilder 5.1 u. 5.2). Im allgemeinen Fall besteht somit der Elastizitätstensor  $E^{ijkl}$  aus 81 Größen, auch Spannzahlen genannt. Diese Anzahl läßt sich allerdings erheblich verringern, wie im folgenden gezeigt wird.

Aus dem Gleichgewicht der Momente am Parallelepipeden-Element folgt die sogenannte "Zuordnung der Schubspannungen" bzw. ein symmetrischer Spannungstensor

$$\tau^{lm} = \tau^{ml} \quad (m \neq l) .$$

Damit erhalten wir für den Elastizitätstensor ein erstes Vertauschungsgesetz

$$E^{lmrs} = E^{mlrs} \quad (5.4)$$

Weiterhin führt die Annahme

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$$

zu einer Vereinfachung. Diese Annahme schränkt die Allgemeingültigkeit nicht ein. Sie stellt eine Drehung des Volumelementes in der k-i-Ebene dar, die keine Spannungen erzeugt. Wir können also schreiben

$$\tau^{lm} = E^{lmik} \gamma_{ik} = E^{mlki} \gamma_{ki} = 0 ;$$

so daß sich ein zweites Vertauschungsgesetz

$$E^{lmik} = E^{miki} \quad (5.5)$$

ergibt und der Elastizitätstensor sich auf  $6 \times 6 = 36$  Elastizitätskoeffizienten reduziert.

Es lassen sich jedoch noch weitere Vereinfachungen erzielen: Allgemein hängen die Elastizitätskoeffizienten eines Körpers von dem Metrik-tensor  $g_{ij}$  des unverzerrten Körpers und dessen physikalischen Eigenschaften ab. Infolge der Tensoreigenschaften lassen sich aber durch Transformation in andere Koordinatensysteme (Heben und Senken der Indizes mit den Metriktensoren (s. [Green/Zerna], S. 151 und [Dietz]))

$$E_{rs}^{ij} = g_{rm} g_{sn} E^{ijmn} = E_{rs}^{ji} = E_{sr}^{ij} = E_{sr}^{ji} \quad (5.6)$$

Symmetrieeigenschaften nachweisen. Diese drücken physikalisch nichts weiter aus, als daß bei Existenz eines Potentials die Gesamtform-änderungsarbeit unabhängig von der Reihenfolge sein muß, in der man die Verzerrungskomponenten erzwingt. Das Schema der 36 Elastizitätskoeffizienten ist also symmetrisch zur Diagonalen.

Im Falle größter Anisotropie erhalten wir demnach 21 numerisch verschiedene elastische Größen = trikline Anisotropie. Transformiert man noch die Matrix auf ein spezielles Hauptachsensystem, das wir durch drei Beziehungen zwischen den Elastizitätskoeffizienten festlegen können, so bleiben 18 numerisch voneinander unabhängige Koeffizienten übrig, für die allein der Stoff verantwortlich ist (Bild 5.3).

Um die Analogie zur Kristallelastizität heranziehen zu können, muß nach Schaper die Temperatur des Verbundes unterhalb der "Einfrier-temperatur" bleiben.

Weitere Vereinfachungen des Elastizitätstensors sind aus Symmetrien der geometrischen Struktur des allgemein- bzw. triklin- anisotropen Körpers abzuleiten.

## 5.2 Einordnung von Mikrostrukturen nach der Kristallelastizität

Der Elastizitätstensor  $E^{ijkl}$  bezieht sich bisher auf ein beliebiges Koordinatensystem. Wird das Koordinatensystem nun so gelegt, daß seine Achsen mit Symmetrieachsen des Körpers zusammenfallen, so kann sich die Zahl der 21 Koeffizienten (triklines System) bis auf 3 (isotropes System) verringern (s. [Voigt], [Lekhnitski], [Hearmon], [Love]). (Die Einarbeitung der Symmetrien erfolgt, indem man von dem bisher beliebigen raumfesten Koordinatensystem als von einem mit

kartesischen, Zylinder-, Kugel- oder schiefwinkligen Koordinaten versehenen System ausgehen kann und von diesen Transformationen des Ausgangssystems vornimmt. Da das elastische <sup>innere</sup> Potential  $W$  erhalten bleiben muß, gilt nach einer Transformation in ein Tilde-System die Beziehung (für  $W$  wird auch  $\pi_{(i)}$  geschrieben)

$$W = \pi_{(i)} = \frac{1}{2} E^{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} = \frac{1}{2} \tilde{E}^{uvst} \tilde{\gamma}_{uv} \tilde{\gamma}_{st} \quad (5.7)$$

Der Grad der Reduktion der Anzahl der Elastizitätskonstanten hängt davon ab, ob Symmetrieebenen und ob eine Symmetrieachse der elast. Eigenschaften vorhanden sind. Symmetrieebenen teilen dabei den Körper in spiegelgleiche Hälften, während  $n$ -zählige Symmetrieachsen angeben, nach welchen Winkel  $\xi_i = 2\pi/n_i$  eine Ebene des Körpers, in der diese Achse liegt, wieder elastisch gleich ist. Als Spezialfall ist die reine Rotationssymmetrieachse zu erwähnen. Eine Tafel über die Einteilung der Symmetrieklassen findet man bei [Heimeshoff, 1969].

### 5.2.1 Kartesisches Ausgangssystem

Mit Erfüllung der Identität in Glg. (5.7) durch Einsetzen der Transformationsbeziehungen aus Anhang I

$$\tilde{\gamma}_{uv} = \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^u} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^v} \gamma_{lm} = a_u^l a_v^m \gamma_{lm}$$

gelangen wir zu Aussagen für die Koeffizienten  $E^{lmop}$ . Das sieht im einzelnen folgendermaßen aus:

Als charakteristische Symmetriebeziehungen liegen

$$W(\tilde{\gamma}_{uv}) = W(\gamma_{uv})$$

bzw.

$$W(a_u^l a_v^m \tilde{\gamma}_{lm}) = W(\gamma_{uv})$$

vor. Weiter kann für das elastische Potential

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} E^{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} = \frac{1}{2} \tilde{E}^{uvst} \tilde{\gamma}_{uv} \tilde{\gamma}_{st} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{E}^{uvst} a_u^l a_v^m \gamma_{lm} a_s^o a_t^p \gamma_{op} \quad (\text{Allgemein}) \quad (5.8a) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} E^{uvst} a_u^l a_v^m \gamma_{lm} a_s^o a_t^p \gamma_{op} \quad (\text{An der Symmetriestelle}) \quad (5.8b)$$

angesetzt werden. Wir gewinnen daraus durch Gleichsetzen mit (5.7)

$$\frac{1}{2} E^{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} = \frac{1}{2} E^{uvst} a_u^l a_v^m \gamma_{lm} a_s^o a_t^p \gamma_{op}$$

bzw.

$$\frac{1}{2} (E^{ijkl} - E^{uvst} a_u^l a_v^m a_s^o a_t^p) \gamma_{ij} \gamma_{kl} = 0 \quad (5.9a)$$

Das sind 21 homogene Gleichungen für die 21 Elastizitätskoeffizienten  $E^{ijkl}$ .

Wenn wir an dieser Stelle auf das kartesische System übergehen, so erhalten wir etliche Vereinfachungen. Beim kartesischen System sind ko-, kontra- und gemischtvariante Tensoren gleich. Statt der kontravarianten Bezeichnung  $E^{ijkl}$  wird dort meistens die gemischtvariante Bezeichnung  $c_{kl}^{ij}$  benutzt und statt der Verzerrungsbezeichnung  $\gamma$  der Buchstabe  $\epsilon$ . Damit erhalten wir die Verzerrungen

$$\tilde{\epsilon}_{uv} = \alpha_u^t \alpha_v^m \epsilon_{tm} \quad , \quad \tilde{\epsilon}^{st} = \tilde{\alpha}_s^i \tilde{\alpha}_t^j \epsilon^{ij}$$

und aus (5.9 a) wird an den Symmetriestellen (Symmetrieachse oder -ebene)

$$\frac{1}{2} (c_{kl}^{ij} - c_{st}^{uv} \alpha_u^i \alpha_v^j \tilde{\alpha}_k^s \tilde{\alpha}_l^t) \epsilon_{ij} \epsilon^{kl} = 0. \quad (5.9b)$$

Die allgemeine Transformationsbeziehung bei beliebiger Drehung oder Spiegelung lautet

$$\tilde{c}_{kl}^{ij} = c_{st}^{uv} \tilde{\alpha}_u^i \tilde{\alpha}_v^j \alpha_k^s \alpha_l^t. \quad (5.9c)$$

Man kann die Glg. (5.9 b) auch in Matrixschreibweise zusammenfassen, so daß

$$\frac{1}{2} (\mathcal{E} - \alpha) \tau = 0. \quad (5.10a)$$

Darin sind  $\mathcal{E}$  die Einheitsmatrix,  $\alpha$  eine 21-reihige, quadratische, unsymmetrische Matrix und  $\tau$  ein Spaltenvektor mit den Komponenten  $c_{kl}^{ij}$ .

In ausgeschriebener Form, und wenn die  $\alpha_k^i = \tilde{\alpha}_k^i$  ( $i+k$ ) Null bzw.  $\alpha_k^i = \delta_k^i$  sind, erhalten wir aus Gleichung (5.9 b) die Aufstellung in Bild 5.4 oder 5.5. Im allgemeinen Fall wird aber besser nach [Heimeshoff, 1969] vorgegangen (vgl. [Hearmon], S.12). Wie dort gezeigt wird, zerfällt (5.10) in sechs Teile für die EK

$$c_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}, c_{\gamma\beta}^{\alpha\beta}, c_{\beta\beta}^{\alpha\beta}, c_{\beta\beta}^{\alpha\beta}, c_{\beta\beta}^{\alpha\beta}, c_{\beta\beta}^{\beta\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

Vereinfacht verbleiben dann

$$(\mathcal{E} - \alpha_{(k)}) \tau_{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 6) \quad (5.10b)$$

Über die Ausarbeitung der Matrizen  $\alpha_{(k)}$  und  $\tau_{(k)}$  in Tabelle 5.1 kam Heimeshoff numerisch zu dem Lösungsschema der  $\alpha_q$ , und zwar für die Fälle, wenn die  $x^3$ -Achse eine 2-, 3-, 4- oder 6-zählige Symmetrieachse ist. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichungssysteme lautet

$$\tau_{(k)} = \sum_{q=1}^r \lambda_q \alpha_{(k)q} \quad (5.11)$$

Dabei sind die Faktoren  $\lambda_q$  freie Parameter, die Elemente der Spaltenvektoren  $\alpha_{(k)q}$  sind Zahlenwerte und  $r$  gibt den Rangabfall der Matrizen  $\alpha_{(k)}$  an.

Wenn die  $x^1 - x^2$ -Ebene eine Symmetrieebene ist, so könnte das ganze Lösungssystem in entsprechend vereinfachter Form neu entwickelt werden. Allerdings ist das nicht notwendig, weil man die Spiegelung auch als Drehung um die  $x^1$ - oder  $x^2$ -Achse auffassen kann. Nur ergeben sich dann die zwischen den Elastizitätskoeffizienten  $c_{kl}^{ij}$  bestehenden Beziehungen aus Tabelle 5.1 erst durch zyklische Vertauschung der Indizes  $i, j, k, l$ . Das Auftreten zwei- oder dreifacher Symmetrien bedeutet eine hintereinandergeschaltete zwei- bzw. dreimalige Anwendung der Tabelle 5.1.

Im folgenden wird aber bei Vorhandensein von ein, zwei oder drei Spiegelebenen ein anderes, häufiger benutztes Verfahren verwendet [Hearmon], [Love].

#### a) 1 Symmetrieebene (Monokline Anisotropie)

In diesem Fall gilt für die Koordinaten des neuen und alten Systems der Zusammenhang

$$\tilde{x}^1 = x^1, \quad \tilde{x}^2 = x^2, \quad \tilde{x}^3 = -x^3 \quad (5.12)$$

Als Transformationsmatrizen sind vorhanden

$$[\tilde{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad |\tilde{A}| = |A| = -1 \text{ (Spiegelung)}$$

wenn  $\frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^1} = \tilde{\alpha}_1^r = \delta_1^r, \quad \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^2} = \tilde{\alpha}_2^r = \delta_2^r, \quad \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^3} = \tilde{\alpha}_3^r = -\delta_3^r$

Die obigen Transformationsbeziehungen werden in das elastische Potential  $W$  eingesetzt, ausgedrückt durch das zur elastischen Symmetrie gehörende Tilde-KOS. Das führt im Koeffizientenvergleich (5.9 b) mit den nichtverschwindenden Verzerrungsgrößen des Ausgangssystems zu einem Widerspruch in den Vorzeichen der im Bild 5.5 unterstrichenen Ausdrücke.

Es ist z.B. bei  $e_{11} e^{23}$  zu finden, daß

$$c_{23}^{11} e_{11} e^{23} \neq c_{23}^{11} \alpha_1^1 \alpha_1^1 \tilde{\alpha}_2^2 \tilde{\alpha}_3^3 e_{11} e^{23} = -c_{23}^{11} e_{11} e^{23}$$

sein muß. Das bedeutet, da  $e_{11}$  und  $e^{23}$  im allgemeinen nicht verschwinden, bzw. daß  $c_{23}^{11} = 0$  zu setzen ist.

Dieses Ergebnis kann aus Tabelle 5.1,  $\nu_3 = \infty$  oder  $n_3 = 2$  direkt abgelesen werden.

Von dem triklinen System werden also die Größen Null, die einmal oder dreimal den Index 3 haben. Die endgültige Elastizitätsmatrix ist in Bild 5.3 aufgezeichnet.

#### b) 2 Symmetrieebenen (Rhombische Anisotropie, Orthotropie)

Bei mehreren Symmetrieebenen werden die Transformationen nacheinander durchgeführt. Es muß bei zwei Symmetrieebenen noch zusätzlich zu a) die Transformation auf das KOS der zweiten Symmetrieebene mit

$$\tilde{x}^1 = -x^1, \quad \tilde{x}^2 = x^2, \quad \tilde{x}^3 = x^3 \quad (5.13)$$

durchgeführt werden. Diese Transformation mit

$$[\tilde{A}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [A] = [\tilde{A}]^{-1}$$

erzwingt, was hier ebenfalls nicht ausgeführt wird, auch ein Verschwinden derjenigen Elastizitätsgrößen, die einmal oder dreimal den Index 1 tragen.

#### c) 3 Symmetrieebenen (Tetragonale Anisotropie)

Zusätzlich ist zu b)

$$\tilde{x}^1 = x^1, \quad \tilde{x}^2 = -x^2, \quad \tilde{x}^3 = x^3 \quad (5.14)$$

zu berücksichtigen. Als Transformationsmatrix liegt

$$[\tilde{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [A] = [\tilde{A}]^{-1} = [\tilde{A}]$$

vor. Wir können feststellen, daß gegenüber b) keine zusätzlichen Glieder mehr verschwinden, da die Indizes 1 und 2 ungerade gekoppelt auftreten.

#### d) Transversale Isotropie (Hexagonale Anisotropie)

Dieser Fall beinhaltet Rotationssymmetrie um die senkrechte Achse,

da die Achse der elastischen Symmetrie  $n = \infty$ -zählig ( $n_3 = 6$  bedeutet genausoviel) ist. Bei dieser Symmetrie gilt (Bild 5.3), daß der Körper an jeder Stelle, die von einer Parallelen zu der Rotationsachse  $g$  getroffen wird, ebenfalls rotationssymmetrisch ist. An allen Punkten der Ebenen senkrecht zu  $g$  sind in allen Richtungen die gleichen Elastizitätseigenschaften anzutreffen, außerdem muß für beliebige Winkel  $\xi = \xi_3$  das elastische Potential dasselbe sein. Wir leiten daraus die Zusammenhänge

$$\tilde{x}^1 = x^1 \cos \varphi + x^2 \sin \varphi, \quad \tilde{x}^2 = -x^1 \sin \varphi + x^2 \cos \varphi, \quad \tilde{x}^3 = x^3$$

bzw.

$$x^1 = \tilde{x}^1 \cos \varphi - \tilde{x}^2 \sin \varphi, \quad x^2 = \tilde{x}^1 \sin \varphi + \tilde{x}^2 \cos \varphi, \quad x^3 = \tilde{x}^3 \quad (5.15)$$

ab und finden damit die Transformationsmatrizen

$$[\tilde{A}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [A] = [\tilde{A}]^{-1} = [\tilde{A}]^T.$$

Bei Rotation sind die Determinantenwerte im Gegensatz zur Spiegelung

$$|\tilde{A}|_{\text{Rot.}} = +1. \quad (5.16)$$

Eine ausführliche Herleitung der Elastizitätsmatrix bei transversaler Isotropie ist in [Love], S. 149, zu finden. Hier wird sich mit ihrer Angabe in Bild 5.3 begnügt.

Der Verdeutlichung wegen sollen <sup>auch</sup> Aussagen für die EK mit Hilfe von Tabelle 5.1 gemacht werden. Nach dieser Tabelle liefert der Koeffizientenvergleich für die Vektoren  $\zeta_{(k)}$

$$\begin{Bmatrix} c_{11}^{11} \\ c_{12}^{11} \\ c_{12}^{12} \\ c_{22}^{22} \end{Bmatrix} = \lambda_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} + \lambda_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = c_{11}^{11} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = c_{22}^{22},$$

sowie

$$c_{11}^{11} = c_{22}^{22}, \quad c_{12}^{12} = \frac{1}{2}(c_{11}^{11} - c_{22}^{22}),$$

$$\begin{Bmatrix} c_{33}^{11} \\ c_{33}^{22} \end{Bmatrix} = \lambda_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_4 = c_{33}^{11} = c_{33}^{22},$$

$$\begin{Bmatrix} c_{13}^{13} \\ c_{23}^{23} \end{Bmatrix} = \lambda_4 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = c_{13}^{13} = c_{23}^{23}, \quad c_{33}^{33} = \lambda_5 \cdot 1.$$

Zwischen diesen EK (hexagonales System) bestehen wegen des positiv definiten Charakters der Verzerrungsenergie Glg. 5.2 folgende Zusammenhänge ([Hearmon], S. 14)

$$|c_{11}^{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11}^{11} & c_{12}^{11} \\ c_{22}^{22} & c_{22}^{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{usf.}$$

bzw.

$$(c_{11}^{11})^2 > (c_{22}^{11})^2, \quad c_{33}^{33} (c_{11}^{11} + c_{22}^{11}) > 2(c_{33}^{11})^2, \quad c_{11}^{11} c_{33}^{33} > (c_{33}^{11})^2.$$

### e) Isotropie

Nun gelten zusätzlich zu d) nacheinander die Beziehungen

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 &= x^1 \cos \varphi - x^3 \sin \varphi, \quad \tilde{x}^2 = x^2, \quad \tilde{x}^3 = x^3 \cos \varphi + x^1 \sin \varphi \\ \text{und} \\ \tilde{x}^1 &= x^1, \quad \tilde{x}^2 = x^2 \cos \varphi + x^3 \sin \varphi, \quad \tilde{x}^3 = x^3 \cos \varphi - x^2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Dazu gehören die Transformationsmatrizen

$$[\tilde{A}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad [\tilde{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

↙  $\tilde{\alpha}_1^3$

Bei der Isotropie soll hier weder nach dem einen noch nach dem anderen Verfahren (Vertauschung der Indizes bei Anwendung der Tabelle 5.1) die Besetzung der Matrix abgeleitet werden. Der Leser sei aber auf [Heimeshoff] und [Love] verwiesen.

### 5.2.2 Ausgangssystem allgemeiner Rotationskörperkoordinaten

Im Falle der Anwendung des allgemeinen Hookeschen Gesetzes ist es immer möglich, das kartesische KOS zu benutzen. Jedoch ist es in manchen Fällen nicht zweckmäßig, den Elastizitätszustand in diesem KOS zu beschreiben, so z.B., wenn sich Elastizitätskoeffizienten konzentrisch zu einer Mittelachse verändern. Bei Verwendung von Zylinderkoordinaten z.B. können wir dann einfache Symmetriebedingungen verwenden.

Die Art der Symmetrien ist in den Einzelbildern des Bildes 5.3 mit eingezeichnet. Zur Reduktion der Matrix bei trikliner Anisotropie werden in die Auflistung von Bild 5.5 die entsprechenden  $\tilde{\alpha}_j^i, \tilde{\alpha}_j^i$  eingesetzt.

#### a) Eine Symmetrieebene (Monokline Anisotropie)

Der Zusammenhang zwischen altem und neuem KOS

$$\tilde{r} = r, \quad \tilde{\varphi} = -\varphi, \quad \tilde{z} = z \quad (5.18)$$



führt zu der Elastizitätsmatrix in Bild 5.3.

### b) Zwei Symmetrieebenen (Rhombische Anisotropie)

Jetzt kommt noch die Spiegelung in Drehachsenrichtung dazu, d.h. es wird zusätzlich  $\tilde{z} = -z$  berücksichtigt. (5.19)

### c) Volle Rotationssymmetrie (Transversale Isotropie)

Bei vorliegender Rotationssymmetrie gelten die Symmetriebedingungen

$$\tilde{x} = r \cos \varphi, \quad \tilde{y} = r \sin \varphi, \quad \tilde{z} = z. \quad (5.20)$$

Ist die  $r - \varphi$ -Ebene außerdem Symmetrieebene, so kommen wir mit zusätzlicher Berücksichtigung von  $\tilde{z} = -z$  wiederum zur transversalen Isotropie.

### 5.2.3 Schiefwinklige Koordinaten (Paratroper Körper)

Wenn die Elastizitätseigenschaften  $c_{ik}$  des anisotropen Körpers im kartesischen KOS bekannt sind, dann ist die Bestimmung der  $\tilde{c}_{ik}$  in einem schiefwinkligen KOS  $(\xi, \eta, \zeta)$  eine reine Transformationsaufgabe [Kaczkowski]. In den Ausdrücken für die neuen EK werden als Parameter insgesamt neun Richtungskosini der 3 Achsen auftreten. Diese Richtungskosini genügen bei der Achse  $\xi$  z.B. der Beziehung

$$\cos^2(\xi, x) + \cos^2(\xi, y) + \cos^2(\xi, z) = 1.$$

Damit wird die Anzahl der neun unabhängigen Parameter um die Anzahl dieser drei Beziehungen auf sechs herabgesetzt.

Der Vorteil liegt darin, daß für ein spezielles, auszusuchendes KOS (weitere drei Bedingungen) eine ebenso einfache Elastizitätsmatrix wie beim orthotropen (9 unabh. EK) Körper aufgestellt werden kann, allerdings nur, wenn, wie beim orthotropen Körper, zusätzlich noch sechs bestimmte Zusammenhänge zwischen den  $c_{ik}$  im kartesischen System bestehen. Das dafür auszuwählende KOS ist das der sogenannten konjugierten Elastizitätsrichtungen. Sie entsprechen den Hauptrichtungen beim orthotropen Körper. Ein spezieller Anwendungsfall ist beim zweidimensionalen Problem die schiefe Platte.

## 5.3 Technische Elastizitätskonstanten

### 5.3.1 Reduktion der Vierfachindizierung des Elastizitätstensors

Bei den mit vier Indizes behafteten Steifigkeitskoeffizienten in den Elastizitätsmatrizen (abgek. EM) des Bildes 5.3 a kann rein formal eine Umbenennung vorgenommen werden. Bisher galt

$$\tau^{ii} = c_{kl}^{ii} \gamma^{kl} \quad (\text{mit } i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (5.21a)$$

und nun soll

$$\tau^q = c_r^q \gamma^r \quad (\text{mit } q, r = 1 \dots 6) \quad (5.21b)$$

gelten.

Diese kontravariante Darstellung eines sechszeiligen Vektors darf für kartesische Koordinaten, bei denen ja  $\gamma_i = -\gamma^i$  gilt, auch auf folgende allgemein übliche Art umgeschrieben werden

$$\tau_q = c_{qr} \gamma_r \quad (\text{mit } q, r = 1 \dots 6) \quad (5.21c)$$

Daß Glg. (5.21 c) statt Glg. (5.21 b) geschrieben werden kann, beweisen die nächsten Zeilen. Es gilt z.B. für die erste Zeile  $i = j = 1$

$$\begin{aligned} \tau^{11} &= c_{11}^{11} \gamma^{11} + c_{12}^{11} \gamma^{12} + c_{13}^{11} \gamma^{13} + c_{21}^{11} \gamma^{21} + c_{22}^{11} \gamma^{22} + \\ &+ c_{23}^{11} \gamma^{23} + c_{31}^{11} \gamma^{31} + c_{32}^{11} \gamma^{32} + c_{33}^{11} \gamma^{33} \\ &= c_{11}^{11} \gamma^{11} + 2 c_{12}^{11} \gamma^{12} + 2 c_{13}^{11} \gamma^{13} + c_{22}^{11} \gamma^{22} + 2 c_{23}^{11} \gamma^{23} + c_{33}^{11} \gamma^{33}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Im übrigen bietet Glg. (5.21 c) gegenüber Glg. (5.21 a) den Vorteil, daß sie sehr einfach als Matrizenbeziehung dargestellt werden kann. Als Identitäten für die Spannungen sind danach festzulegen

$$\tau^{11} = \tau_1, \quad \tau^{22} = \tau_2, \quad \tau^{33} = \tau_3, \quad \tau^{23} = \tau_4, \quad \tau^{13} = \tau_5, \quad \tau^{12} = \tau_6. \quad (5.23)$$

Der Zusammenhang zwischen tensoriellen und technischen Verzerrungen ist

$$\gamma^{11} = \gamma_1, \quad \gamma^{22} = \gamma_2, \quad \gamma^{33} = \gamma_3, \quad 2\gamma^{23} = \gamma_4, \quad 2\gamma^{13} = \gamma_5, \quad 2\gamma^{12} = \gamma_6. \quad (5.24)$$

Nach Einsetzen der Beziehungen (5.23) in (5.24) gilt dann

$$\tau_1 = \tau^{11} = c_{11}^{11} \gamma_1 + c_{22}^{11} \gamma_2 + c_{33}^{11} \gamma_3 + 2 c_{23}^{11} \frac{1}{2} \gamma_4 + 2 c_{13}^{11} \frac{1}{2} \gamma_5 + 2 c_{12}^{11} \frac{1}{2} \gamma_6,$$

was mit (5.21 c) direkt verglichen werden kann

$$\tau_1 = c_{11} \gamma_1 + c_{12} \gamma_2 + c_{13} \gamma_3 + c_{14} \gamma_4 + c_{15} \gamma_5 + c_{16} \gamma_6.$$

Die Koeffizientenvergleiche für die anderen Indizes führen nach [Dietz S. 29, auf die Identität zwischen den EK

$$\begin{array}{l}
c_{12}^{12} = c_{66} \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{11}^{11} = s_{11}, \quad s_{11}^{22} = s_{12}, \quad s_{11}^{33} = s_{13}, \quad s_{11}^{23} = \frac{1}{2} s_{14}, \quad s_{11}^{31} = \frac{1}{2} s_{15}, \quad s_{11}^{12} = \frac{1}{2} s_{16} \\
c_{31}^{31} = c_{55}, \quad c_{31}^{12} = c_{56} \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{22}^{22} = s_{22}, \quad s_{22}^{33} = s_{23}, \quad s_{22}^{23} = \frac{1}{2} s_{24}, \quad s_{22}^{31} = \frac{1}{2} s_{25}, \quad s_{22}^{12} = \frac{1}{2} s_{26} \\
s_{33}^{33} = s_{33}, \quad s_{33}^{23} = \frac{1}{2} s_{34}, \quad s_{33}^{31} = \frac{1}{2} s_{35}, \quad s_{33}^{12} = \frac{1}{2} s_{36} \\
s_{23}^{23} = \frac{1}{4} s_{44}, \quad s_{23}^{31} = \frac{1}{2} s_{45}, \quad s_{23}^{12} = \frac{1}{2} s_{46} \\
s_{31}^{31} = \frac{1}{4} s_{55}, \quad s_{31}^{12} = \frac{1}{2} s_{56} \\
s_{12}^{12} = \frac{1}{4} s_{66}
\end{array} \right.
\end{array} \right. \quad (5.25)
\end{array}$$

Bei den  
Steifigkeitsmatrizen  
ist der Vorfaktor 1.

Dabei waren von der Indizierung her folgende Übereinstimmungen anwendbar

$$\begin{array}{l}
11 \hat{=} 1, \quad 23 \hat{=} 4 \\
22 \hat{=} 2, \quad 13 \hat{=} 5 \\
33 \hat{=} 3, \quad 12 \hat{=} 6.
\end{array} \quad (5.26)$$

Der Gebrauch der Bezeichnungen  $c_{qr}, s_{qr}$  ist erst in neuerer Zeit geläufig geworden. Lechnitzki verwendet noch die Symbole

$$A_{qr} = c_{qr}, \quad a_{qr} = s_{qr}.$$

### 5.3.2 Zusammenhang Steifigkeitskoeffizienten - Nachgiebigkeitskoeffizienten

Der Zusammenhang zwischen den Steifigkeitskoeffizienten  $c_{qr}$  und den Nachgiebigkeitskoeffizienten  $s_{qr}$  ist durch die Inversion

$$\begin{array}{l}
[S] = [C]^{-1} \quad \text{oder} \quad [C][S] = [I] \\
\text{bzw. durch} \quad s_{qr} = \frac{(-1)^{q+r}}{|C|} |c_{rq}| \quad (5.27) \\
\hspace{15em} \text{Unterdeterminante}
\end{array}$$

gegeben, worin die Determinanten nichtsingulär sind.

Bei der Ermittlung der funktionalen Zusammenhänge zwischen den elastischen Größen wird statt des komplizierten triklinen Systems ein vereinfachtes System gewählt. Ein System das alle wesentlichen Sonderfälle im Faserverbund beinhaltet, ist das rhombisch anisotrope System (Bild 5.3). Bei ihm liegen gemäß

$$\tau_q = c_{qr} \gamma_r \quad \text{und} \quad \gamma_q = s_{qr} \tau_r \quad (q, r = 1 \dots 6)$$

die Matrizen

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ \text{symm.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad [S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ \text{symm.} & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

vor. In diesen sind die unteren drei Gleichungen entkoppelt. Somit ergeben sich direkt

$$S_{44} = \frac{1}{C_{44}}, \quad S_{55} = \frac{1}{C_{55}}, \quad S_{66} = \frac{1}{C_{66}}. \quad (5.29a)$$

Mit der Restdeterminante, nach der Sarusschen Regel bestimmt,

$$|C|_{\text{Rest}} = C_{11} (C_{22} C_{33} - C_{23}^2) + C_{12} (C_{23} C_{13} - C_{12} C_{33}) + C_{13} (C_{12} C_{23} - C_{13} C_{22}) \quad (5.29b)$$

folgen als Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten ([Puck], S. 290)

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{11}} = S_{11} &= \frac{1}{|C|} (C_{22} C_{33} - C_{23}^2), & S_{12} &= \frac{-1}{|C|} (C_{12} C_{33} - C_{23} C_{13}) \\ S_{13} &= \frac{1}{|C|} (C_{12} C_{23} - C_{22} C_{13}), & S_{22} &= \frac{1}{|C|} (C_{11} C_{33} - C_{13}^2) \\ S_{23} &= \frac{-1}{|C|} (C_{11} C_{23} - C_{12} C_{13}), & S_{33} &= \frac{+1}{|C|} (C_{11} C_{22} - C_{12}^2). \end{aligned} \quad (5.29c)$$

### 5.3.3 Technische Elastizitätskonstanten

Im allgemeinen ist es üblich, nur indirekt mit den EK  $c_{rs}^{ij}$  und  $s_{rs}^{ij}$  bzw.  $c_{qr}$  und  $s_{qr}$  zu rechnen. Man verwendet lieber die sogenannten Technischen Elastizitätskonstanten. Obwohl diese Größen keine Konstanten sind (kein Tensor nullter Stufe), wird doch im allgemeinen das Wort Konstante benutzt. Eigentlich darf man nur beim homogenen, elastischen Körper von Elastizitätskonstanten reden.

Es gilt für den triklinen Körper nach den Gruppierungen von Bekhterev ([Lekhnitskii], S. 13) die Nachgiebigkeitsmatrix

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_1} & \frac{\eta_{23,1}}{E_1} & \frac{\eta_{31,1}}{E_1} & \frac{\eta_{12,1}}{E_1} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{\eta_{23,2}}{E_2} & \frac{\eta_{31,2}}{E_2} & \frac{\eta_{12,2}}{E_2} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_3} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & \frac{\eta_{23,3}}{E_3} & \frac{\eta_{31,3}}{E_3} & \frac{\eta_{12,3}}{E_3} \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & \frac{\mu_{11,23}}{G_{23}} & \frac{\mu_{12,23}}{G_{23}} \\ & & & & \frac{1}{G_{13}} & \frac{\mu_{12,13}}{G_{13}} \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{1. Index: Ort} \\ \text{2. Index: Ursache} \end{array} \quad (5.30)$$

(symm.)

(Häufig werden in der Literatur, so auch bei Lekhnitskii, die  $\nu_{12}$  und  $\nu_{21}$  an verschiedenen Stellen vertauscht benutzt). Darin sind die  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $E_{33}$  die Young-Moduli oder Elastizitätsmoduli die  $G_{23}$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{12}$  die Schubmoduli und die  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{31}$ ,  $\nu_{32}$  die Poissonzahlen. Die  $\mu_{31,23}$  usw. sind die drei Koeffizienten von Chentsov und die  $\eta_{23,1}$  usw. die sechs Koeffizienten der wechselseitigen Schubbeeinflussungen.

Für den orthotropen Körper reduzieren sich die Nachgiebigkeitsmatrix und die zugehörige Steifigkeitsmatrix, wobei der Einfachheit wegen  $E_{11} = E_1$ ,  $E_{22} = E_2$  und  $E_{33} = E_3$  gesetzt wird (vgl. [Lempriere])

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (5.31a)$$

(Symm.)

Als Steifigkeitselastizitätsmatrix erhält man gemäß  $\{\tau\} = [C] \{\epsilon\}$  und  $[C] = [S]^{-1}$  ([Mil-Handbook 17 A], S. 327)

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{N} (1 - \nu_{23} \nu_{32}) & \frac{E_2}{N} (\nu_{12} + \nu_{13} \nu_{32}) & \frac{E_3}{N} (\nu_{13} + \nu_{23} \nu_{12}) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1}{N} (\nu_{21} + \nu_{31} \nu_{23}) & \frac{E_2}{N} (1 - \nu_{31} \nu_{13}) & \frac{E_3}{N} (\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13}) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1}{N} (\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}) & \frac{E_2}{N} (\nu_{32} + \nu_{12} \nu_{31}) & \frac{E_3}{N} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{23} & 0 & 0 \\ & & & & G_{13} & 0 \\ & & & & & G_{12} \end{bmatrix} \quad (5.31b)$$

(Symm.)

$$N = (1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{12} \nu_{23} \nu_{31})$$

Da Symmetrie zur Diagonalen wegen der Existenz eines Potentials vorliegt, gelten die drei Beziehungen (auch für Matrix (5.30))

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12} \quad ; \quad E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23} \quad ; \quad E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31} \quad . \quad (5.32)$$

Die dann noch vorhandenen neun unbekannteten Elastizitätsgrößen des orthotropen Körpers werden im allgemeinen aus Versuchen bestimmt. Dabei wird man zu ihrer Ermittlung die Nachgiebigkeitsmatrix  $[S]$  heranziehen, da die  $s_{ik}$  gegenüber den  $c_{ik}$  die einfacheren Beziehungen mit den Grundkonstanten vorweisen.

Bei einer Transformation der Elastizitätsmatrix des orthotropen Körpers infolge einer Drehung um die 3-Achse ergibt sich formal dieselbe Besetzung wie beim monoklinen Körper.

Entsprechend den Besonderheiten eines unidirektional hergestellten Verbundkörpers gilt für diesen näherungsweise recht gut das Elastizitätsgesetz des transversal isotropen Körpers. Bei diesem Körper gibt es eine Ebene, in der in allen Richtungen die elastischen Eigenschaften gleich sind. Da im Faserverbund häufig eine hexagonale Anordnung angenommen werden darf, ist dieses physikalische Modell zur Beschreibung einer <sup>dickwandigen</sup> UD-Schicht heranziehbar. Infolge der Gleichwertigkeit der Eigenschaften in 3 und 2-Richtung gelten

$$S_{12} = S_{13} \quad , \quad S_{22} = S_{32} \quad , \quad S_{55} = S_{66} \quad (5.33a)$$

und

$$C_{12} = C_{13} \quad , \quad C_{22} = C_{33} \quad , \quad C_{55} = C_{66}$$

bzw. in technischen Begriffen

$$E_2 = E_3 \quad , \quad G_{12} = G_{13} \quad (5.33b)$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} \quad , \quad \nu_{21} = \nu_{31} \quad , \quad \nu_{23} = \nu_{32}$$

Als zusätzliche Gleichung liegt vor, herrührend aus der Existenz der 2-3-Ebene als Isotropieebene, daß

$$S_{44} = 2 (S_{22} - S_{23}) \quad \text{und} \quad C_{44} = \frac{1}{2} (C_{22} - C_{23}) \quad (5.34a)$$

bzw.

$$G_{23} = \frac{E_{22}}{2(1 + \nu_{23})} \quad (5.34b)$$

ist. Es verbleiben 5 Konstante (s. [MIL-Handbook], S. 3.31).

Mit den typischen Verbundbezeichnungen  $\parallel$  für in Faserrichtung und  $\perp$  für senkrecht zur Faserrichtung und den Identitäten  $\parallel = 11$ ,  $\perp = 22$  bzw.  $33$  und  $\# = 12$  bzw.  $13$  beim Schubmodul sind dann die Elastizitätsmatrizen (5.35)

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{\parallel}} & \frac{-\nu_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}} & \frac{-\nu_{\parallel\perp}}{E_{\parallel}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{\parallel\perp}}{E_{\perp}} & \frac{1}{E_{\perp}} & \frac{-\nu_{\perp\perp}}{E_{\perp}} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_{\perp}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{11}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{\#}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{\#}} \end{bmatrix} \quad , \quad [C] = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu_{\perp\perp}^2)E_{\parallel}}{N} & \frac{\nu_{\perp\parallel}(1+\nu_{\perp\perp})E_{\parallel}}{N} & \frac{\nu_{\parallel\perp}(1+\nu_{\perp\perp})E_{\parallel}}{N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(1-\nu_{\perp\parallel}\nu_{\parallel\perp})E_{\perp}}{N} & \frac{(\nu_{\perp\perp}+\nu_{\perp\parallel}\nu_{\parallel\perp})E_{\perp}}{N} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{(1-\nu_{\perp\parallel}\nu_{\parallel\perp})E_{\perp}}{N} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & G_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{\#} & 0 & 0 \\ & & & & G_{\#} & 0 \\ & & & & & G_{\#} \end{bmatrix}$$

(5.35 a, b)

aus den Grundkonstanten  $\nu_{11}, E_{11}, \nu_{11}, \nu_{11}$  und  $G_{11}$  herleitbar. Die Größe  $G_{11}$  errechnet sich aus Glg. (5.34 b) und  $N = (1-\nu_{11})(1-\nu_{11}-2\nu_{11}\nu_{11})$ . Weiter ist  $E_{11} = E_{11} \nu_{11} / \nu_{11}$ .

Tauchert/Guzelsu haben aber z.B. für BFK herausgefunden, daß es sich bei ihm mehr um ein tetragonales Material handelt.  $G_{11}$  wäre also als sechste unabhängige Elastizitätskonstante zusätzlich zu ermitteln (s. auch [Enie/Rizzo]).

Als Beispiel für einen speziellen transversal isotropen Körper seien für zwei Kohlenstoffasern die Ergebnisse einer Berechnung der Grundkonstanten nach den Formeln (anderes KOS 1,2,3!)

$$\begin{aligned}
 E_3 &= \frac{1}{S_{33}} = \frac{c_{33}(c_{11} + c_{12}) - 2c_{13}^2}{c_{11} + c_{12}}, & G_{13} &= \frac{1}{S_{44}} = c_{44}, \\
 E_1 &= \frac{1}{S_{11}} = \frac{(c_{11} - c_{12})(c_{11}c_{33} + c_{12}c_{33} - 2c_{13}^2)}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}, & & \\
 \nu_{13} &= -\frac{S_{13}}{S_{33}} = \frac{c_{13}}{c_{11} + c_{12}}, & G_{12} &= \frac{1}{S_{66}} = \frac{1}{2(S_{11} - S_{12})} = c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}).
 \end{aligned}
 \tag{5.36}$$

aus [Dean/Turner] und [Goggin] in Tabelle 5.2 angegeben.

Für Isotropie verbleiben die einfacheren Matrizen (vgl. Bild 5.3)c

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} = [C]^{-1} \tag{5.37a}$$

(symm.)

$$[C] = \begin{bmatrix} 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \tag{5.37b}$$

(symm.)

mit  $E = 2G(1 + \nu)$

oder mit den Laméschen Konstanten

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} = c_{11}^{11} = c_{22} \tag{5.37c}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G = \frac{1}{2}(c_{11}^{11} - c_{22}^{11}) = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

## 5.4 Elastizitätsgesetze spezieller Faserverbund- bzw. Schichtkörper

### 5.4.1 Beziehungen zwischen Spannungen und Verzerrungen

Beim Übergang vom dreidimensionalen zum zweidimensionalen Körper vereinfachen sich die Elastizitätsmatrizen je nach der Reduktion der Spannungs- und Verzerrungsgrößen.

In diesem Zusammenhang wird auf die wohl anschaulichste Schreibweise der Spannungs-Verzerrungsbeziehungen übergegangen (Bild 5.6). Für die Normalspannungen und Dehnungen stehen die einfach indizierten Größen  $\sigma$  und  $\epsilon$ . Bei den Schubspannungen  $\tau$  gibt der erste Index den Schnitt und der zweite die Richtung an. Für  $\gamma$  gilt dasselbe.

Reine Symmetriebetrachtungen führen zu den vier Elastizitätsgleichungen des rotationssymmetrisch belasteten, orthotropen (aber auch des transversal isotropen) Rotationskörpers in Skizze 1 des Bildes 5.6. Beim Rotationskörper werden, wenn keine Torsion vorliegt,  $\gamma_{23}$  bzw.  $\tau_{23}$  Null. Sind keine Laibungsspannungen da, so wird  $\tau_{12} = 0$ .

Eine Vernachlässigung der kleinen oder nur örtlich auftretenden Spannung  $\sigma_3$ , also der Spannung in Normalen-Richtung, führt zu den dicken Platten (Skizze 2). Es verbleiben bei ihnen maximal - ohne Symmetriebetrachtungen - fünf konstitutive Gleichungen. Die eliminierte dritte Gleichung dient lediglich dazu, bei ermittelten  $\sigma_1, \sigma_2$  die an und für sich uninteressante Wanddickenverzerrung zu bestimmen.

Skizze 2 und folgende Skizzen zeigen als Beispiel UDV-Körper.

Wenn aus Symmetriegründen zusätzlich  $\gamma_{23} = 0$  gesetzt wird, so kommen wir zu der rotationssymmetrisch belasteten, dicken Kreisringplatte (Skizze 3). Es verbleiben vier Gleichungen.

Bei dem zweidimensionalen Problem haben wir zwei Zustände zu unterscheiden, den ebenen Formänderungszustand (EFZ) und den ebenen Spannungszustand (ESZ).

Einem EFZ unterliegt die durch Skizze 4 dargestellte Platte. Bei ihr ist  $\epsilon_1$ , die Verzerrung in 1-Richtung, behindert. Weiter gilt, daß  $\gamma_{13}$  und  $\gamma_{12}$  Null sind. Als EM erhalten wir hier, nach Einsetzen der Beziehung

$$\epsilon_1 = s_{11} \sigma_1 + s_{12} \sigma_2 + s_{13} \sigma_3 = 0$$

(diese Beziehung verbleibt die Bestimmungsgleichung für  $\sigma_1$ ), und Elimination von  $\sigma_1$  in der zweiten und dritten Gleichung eine 3 x 3 Matrix.



Für den ESZ (Skizze 5) ergibt sich - wie zuvor Orthotropie oder transversale Isotropie vorausgesetzt - eine ebenfalls um drei Spalten und Zeilen reduzierte Nachgiebigkeits-EM. Nur braucht hier bei der Nachgiebigkeits-EM nichts eliminiert zu werden, da Glieder der rechten Seiten verschwinden, und zwar  $\bar{\epsilon}_3$ ,  $\bar{\gamma}_{23}$  und  $\bar{\gamma}_{13}$ .

Gerade umgekehrt ist es bei der Steifigkeits-EM. Bei EFZ ändert sich für  $\epsilon_1 = 0$  nichts, aber für ESZ ( $\bar{\epsilon}_3 = 0$ ) folgt eine reduzierte Steifigkeits-EM [C]. Diese Matrix wird in der amerikanischen Terminologie [Q] genannt. Ihre Steifigkeitskoeffizienten  $q_{qr}$  hängen mit den  $c_{qr}$  wie folgt zusammen: [Ashton/Whitney], [Lechnitskii, S. 44]

$$q_{qr} = c_{qr} - \frac{c_{q3} c_{r3}}{c_{33}} \quad (q, r = 1, 2, (4), (5), 6) \quad (5.38a)$$

Damit sind  $q_{66} = c_{66}$  und  $q_{16} = q_{26} = 0$  beim orthotropen Körper (vgl. die Glg. (5.39)). Der Zusammenhang dieser Koeffizienten mit den technischen Elastizitätsgrößen ist z.B. für Orthotropie

$$q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad q_{22} = \frac{E_2}{E_1} q_{11}, \quad q_{66} = G_{12}, \quad (5.38b)$$

$$q_{12} = q_{21} = \nu_{12} q_{11} = \nu_{21} q_{22}$$

Wenn keine Orthotropie gegeben ist, so sind  $q_{16}$  und  $q_{26}$  ungleich Null, und es läßt sich kein so einfacher Zusammenhang mit den technischen Elastizitätsgrößen wie zuvor geben.

Hat das Hauptachsensystem des Bauteils einen Winkel zur Elastizitätshauptachse, so ist eine Transformation durchzuführen, und es sind alle Kopplungsglieder wieder voll besetzt wie beispielsweise in Skizze 6. Die Verzerrungen  $\bar{\epsilon}_3$ ,  $\bar{\gamma}_{23}$ ,  $\bar{\gamma}_{13}$  können nach Bekanntsein der  $\bar{\epsilon}_1$ ,  $\bar{\epsilon}_2$ ,  $\bar{\gamma}_{12}$  berechnet werden.

Bei dünnen Platten (Skizze 7) unter Querkraftbiegung werden nur im Elastizitätsgesetz (nicht im Gleichgewicht) die Schubspannungen  $\tau_{23}$  und  $\tau_{13}$  Null gesetzt. Es ergibt sich dieselbe Form der Matrix wie bei einer Scheibe.

Für eine umfangsgewickelte Scheibe ist neben Skizze 8 die Elastizitätsmatrix aufgeschrieben. Die Belastung sei ebenfalls rotationssymmetrisch. Wie sich die Gesamtelastizitätsmatrix eines aus Einzelschichten bestehenden Laminates ermitteln läßt, wird Abschnitt 5.6.2 zeigen.

Zum Schluß noch eine Bemerkung: Bei aus dicken Schichten aufgebauten Körpern kann verhältnismäßig einfach die Lösung der Differentialgleichung mit numerischen Rechenverfahren erzielt werden. Das bedeutet, es

ist eine Diskretisierung entsprechend den Schichtstärken durchführbar. Bei vielschichtigen dünnen Schalen ist das zu teuer. Hier wird deswegen von den Einzelschichten zum Laminat übergegangen und ein Schalenelement mit Laminateneigenschaften verwendet.

#### 5.4.2 Beziehungen zwischen Schnittgrößen und Verzerrungen beim MSV

Ausgehend von den Spannungen in einem bestimmten Schichtelement mit beliebiger Ausrichtung des Bauteilhauptachsensystems zu den Orthotropieachsen einer Schicht kann für eine dicke Schale nach Umordnung geschrieben werden (die eingerahmten Glieder werden Null, wenn die Plattenorthotropie in Hauptachsenrichtung liegt)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}_k = [C]_k \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \epsilon_{13} \end{Bmatrix}_k \quad \tau_{12} \text{ ungeordnet!} \quad (5.39)$$

$$[C]_k = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{16} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & q_{26} & 0 & 0 \\ q_{61} & q_{62} & q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix}$$

Das Mitführen der Glieder  $\tau_{23}$  und  $\tau_{13}$  stellt den Unterschied zur Kirchhoffschen Plattentheorie heraus. Die Schubspannungen  $\tau_{23}$ ,  $\tau_{13}$  werden trotz der im allgemeinen dünnen Verbundschalen an dieser Stelle mit aufgeführt, weil nur mit ihnen der Spannungs- und Verformungszustand an freien Schalenrändern erfaßt werden kann. Außerdem stellen sie die schon erwähnten interlaminaren Schubspannungen dar, die für die Festigkeitsauslegung von Bedeutung sind.

Für die dünne ebene oder auch schwach gekrümmte Schale bleibt in (5.39) der linke obere Quadrant übrig. Als Spannungsdehnungsbeziehungen der Schicht gelten

$$\sigma_i = q_{ir} \epsilon_r \quad \text{bzw.} \quad \{\sigma\}_k = [Q]_k \{\epsilon\}_k \quad (5.40)$$

Genau wie man bei der Schale vereinfacht zu den über der Schalendicke integrierten Spannungen, den Schnittgrößen, übergeht, so wird man von dem Hookeschen Gesetz der einzelnen Schicht zu dem des MSV bzw. dem eines Laminates zu gelangen versuchen. Aus Glg. (5.40) erhält man ganz formal (s. [Calcote] und [Ashton/Whitney], S. 16)

$$(N_i, M_i) = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_i(1, z) dz \quad (i = 1, 2, 6) \quad (5.41a)$$

Bei einem MSV gehen die vorstehenden Gleichungen in

$$\{N\} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sum_{k=1}^n \{\sigma\}_k dz \quad \text{und} \quad \{M\} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sum_{k=1}^n \{\sigma\}_k z dz \quad (5.41b)$$

über. Das Einsetzen der Bernoulli-Gleichung (4.164) vom Ebenbleiben der Querschnitte in die vorstehende Beziehung liefert

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n [Q]_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\{\hat{\epsilon}\} - z \{\hat{\chi}\}) dz \quad \text{und} \quad \{M\} = \sum_{k=1}^n [Q]_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\{\hat{\epsilon}\} - z \{\hat{\chi}\}) z dz \quad (5.41c)$$

Bei einer MSV Biegeschale aus dünnen Einzelschichten kann über die einzelne Schichtdicke recht einfach integriert werden, weil dort die Spannungen bzw. Dehnungen als konstant angesehen werden können

$$\{\sigma\}_k = \text{const.}, \quad \{\epsilon\}_k = \{\hat{\epsilon}\} - h_k \{\hat{\chi}\} = \text{const.} \quad \text{über} \quad t_k = h_k - h_{k-1}$$

Für das Laminat kommt man nach der Integration von Glg. (5.41 c) zu

$$\begin{aligned} \{N\} &= \sum_{k=1}^n [Q]_k \{\hat{\epsilon}\} (h_k - h_{k-1}) + \sum_{k=1}^n [Q]_k \{-\hat{\chi}\} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ &= [A] \{\hat{\epsilon}\} + [B] \{\hat{\chi}\} \\ \{M\} &= [B] \{\hat{\epsilon}\} + [D] \{\hat{\chi}\} \end{aligned} \quad (5.42)$$

mit den Summenausdrücken

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n q_{ij} (h_k - h_{k-1}) \quad \text{bzw.} \quad [A] = \sum_{k=1}^n [Q]_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^n q_{ij} \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^n q_{ij} \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (5.43)$$

Wir finden schließlich die gewünschten Beziehungen in der unteren, ausgeschriebenen Matrizenform

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ \dots \\ M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \dots & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & (\text{Symm.}) & & & D_{22} & D_{26} \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_1 \\ \hat{\epsilon}_2 \\ \hat{\gamma}_{12} \\ \dots \\ -\hat{\chi}_1 \\ -\hat{\chi}_2 \\ \dots \\ -\hat{\chi}_{12} \end{pmatrix} \quad (5.44a)$$

Abgekürzt wird daraus ([Whitney, 1972], S. 428)

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\epsilon} \\ -\hat{\chi} \end{pmatrix} = [K] \begin{pmatrix} \hat{\epsilon} \\ -\hat{\chi} \end{pmatrix} \quad (5.44b)$$

A wird darin die EM im Scheibenquadranten, D die EM in Plattenquadranten, B die Kopplungsmatrix und K die Steifigkeitsmatrix genannt.

Durch die Hineinnahme des Minuszeichens vor die Verwölbungen kann die Matrix symmetrisch gemacht werden. Verschwindet das Drillmoment  $M_{12}$ , so reduziert sich die EM auf 5 x 5 Werte.

Aus den Beziehungen (5.44) ist zu entnehmen, daß orthotrope Platten ohne allgemeine Neutralebene, d.h. ohne plattenparallele Symmetrie, es nicht gestatten, Scheiben- und Plattenprobleme getrennt von einander zu betrachten. Bezüglich spezieller, symmetriebedingter Vereinfachungen kann in [Wiedemann, 1962 u. 1963] nachgelesen werden.

Aus dem Ausdruck für  $B_{ij}$  ist ableitbar, daß nur bei symmetrisch aufgebauten Laminaten wie  $(+\alpha, -\alpha, -\alpha, +\alpha)$  die  $B_{ij}$  verschwinden und bei unsymmetrisch aufgebauten Laminaten immer Biegespannungen vorliegen, auch wenn keine äußeren Momente angreifen. Das gilt schon für Schichtorientierungen  $(+\alpha, -\alpha, +\alpha, -\alpha)$ . Ein Beispiel für den symmetrischen Aufbau eines mehrschichtigen Laminates zeigt Bild 5.7. Hieran anschließend seien die speziellen Eigenschaften dreier verschiedener Laminare zur besseren Einprägung aufgeführt:

- $+\alpha / -\alpha$  orthotropes, nicht symmetrisches Laminate (AWV)
- $+\alpha / -\alpha / +\alpha$  symmetrisches, anisotropes Laminate (KV)
- $+\alpha / -\alpha / -\alpha / +\alpha$  symmetrisches und orthotropes Laminate (AWV).

Wie sich schon eine UD-Schicht bei verschiedenen elastischen Eigenschaften verformt, zeigt abrundend Bild 5.8.

Tsai/Pagano zeigen auf Seite 241 des Buches Composite Materials Workshop, welche Invarianten bei Transformationen der Elastizitätsmatrizen von Laminaten beachtet werden können.

Zur Erinnerung seien noch die bei der homogenen, orthotropen Platte gebräuchlichen Steifigkeitsgrößen angeführt (nach allgemein üblicher Benennung, [Worch])

$$A_{11} \rightarrow D_x = \frac{E_x t}{1 - \mu_x \mu_y}, \quad A_{22} \rightarrow D_y = \frac{E_y t}{1 - \mu_x \mu_y} \quad \text{Dehnsteifigkeiten}$$

$$A_{12} \rightarrow D_{xy} = G_{xy} t = Gt \quad \text{Gleitsteifigkeit}$$

$$D_{11} \rightarrow K_x = \frac{1}{12} \frac{E_x t^3}{1 - \mu_x \mu_y}, \quad D_{22} \rightarrow K_y = \frac{1}{12} \frac{E_y t^3}{1 - \mu_x \mu_y} \quad \text{Biegesteifigkeiten}$$

$$D_{12} \rightarrow K_{xy} = \frac{1}{2} Gt^3 \quad \text{Drillsteifigkeit.}$$

(4.45)

Sind die Momente Null, so wird wieder mit den durch ein Dach gekennzeichneten fiktiven Laminat-Mittelspannungen und Steifigkeitsgrößen gerechnet

$$\{\hat{\sigma}\} = \{N/t\} = \frac{1}{t} [A] \{\hat{\epsilon}\} = [\hat{\sigma}] \{\hat{\epsilon}\}. \quad (5.46)$$

Wir wollen abschließend den Einfluß der Querkräfte mitnehmen und kommen damit zur dicken Platte oder dicken Schale kleiner Krümmung. Bei solchen Strukturen sind die Querschubspannungen zwar in jeder Schicht anders, aber man rechnet trotzdem rein formal mit Schnittgrößen und über der Dicke konstanten Mittelflächenverformungen  $\gamma_{23}, \gamma_{13}$  (Glg. (4.173)). Um so vereinfacht rechnen zu können, müssen Schubkorrekturfaktoren  $k_1$  und  $k_2$  zur Erhaltung der konstitutiven Gleichungen für die Schnittgrößen  $Q_x$  und  $Q_y$  der dicken Platte bestimmt werden

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_2 \\ \vdots \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{23} dz \\ \vdots \\ \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{13} dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \int_{-t/2}^{t/2} C_{44} dz & k_1 k_2 \int_{-t/2}^{t/2} C_{45} dz \\ \vdots & \vdots \\ \text{Symm.} & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \vdots \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \quad (5.47)$$

Die Bestimmung dieser Korrekturfaktoren ist recht umständlich. Sie kann nach [Whitney, 1972], S. 429, vorgenommen werden. Auf eine Aufstellung der notwendigen Formeln wird hier verzichtet, da die Ermittlung der Werte doch numerisch erfolgt. Zur Erinnerung: Für die homogene Platte ermittelte Reißner für parabolische Schubspannungsverteilung  $\tau_{23}$  den bekannten Wert  $k_1^2 = 5/6 = k_2^2$ .

Welchen Einfluß interlaminare Zugkräfte infolge  $\sigma_z$ -Spannungen auf den Bruch haben, zeigt eine Arbeit von Pagano über die Berechnung der interlaminaren Normalspannungen in mehrschichtigen Verbundschalen. Die Vorgehensweise ist analog zum Vorhergehenden.

### 5.4.3 Physikalisch nichtlineare Verhaltensweisen

Die physikalisch lineare Elastizitätstheorie gilt je nach Fasersorte und Art des Verstärkungsmaterials nur bis zu verschiedenen großen und zeitlich dauernden Belastungen.

Haferkamp unterscheidet beim Spannungs-Dehnungsverlauf z.B. bei GFK zwei Bereiche. Dem anfänglichen Linearteil (Bild 5.9), der bis zur

Proportionalitätsgrenze reicht, folgt ein weiterer Linearteil. Für beide Bereiche kann ein E-Modul angegeben werden. Der übliche E-Modul entspricht der Steigung des ersten Linearanteils also bis zum sogenannten Knie (Beginn der Mikrorissbildung im Harz). Eine rein elastische Rechnung hat so bei Glasfasermatten nur bis etwa  $0,45_8$  Gültigkeit. Um einen weiteren Bereich rechnerisch direkt erfassen zu können, wird man ingenieurmäßig ausreichend genau auf den Sekantenmodul (gepunktet bei Gewebe eingezeichnet) übergehen.

Bei der Fa. Dornier werden in Rechenprogrammen für die Analyse der UD-Schicht (Bild 5.10) die Spannungs-Dehnungs-Linien von Bild 5.11 angesetzt.

Meistens wird man aber, oder darf man sogar, vor allem bei steiferen Fasern, vom Vorhandensein einer linearen Spannungs-Dehnungslinie der UD-Schicht in Längs- und Querrichtung ausgehen.

Hahn/Tsai, 1973, nehmen ein solches lineares Verhalten an, um eine Aussage für das nichtlineare Schubverhalten machen zu können. Diese Verfasser untersuchten auch verschiedene Faserorientierungen und bestätigten für BFK die theoretischen Ergebnisse durch Versuchsergebnisse (Bilder 5.12).

In [Hahn, 1973] wird von der UD-Schicht auf das Laminat übergegangen. Außerdem werden dort wiederum Versuchsergebnisse aufgeführt.

Da die Auslegung immer Sicherheitskoeffizienten gegenüber Bruch größer  $s = 1,5$  bis 2 vorsieht, ist aber die physikalische Nichtlinearität für Schub im allgemeinen von nicht ganz so großer Bedeutung. Im übrigen ist es durchaus logisch, mit sehr aufwendigen nichtlinearen Berechnungen erst dann zu beginnen, wenn die lineare Behandlung genügend Unterlagen geschaffen hat.

Bild 5.13 gibt einen Überblick über die bei genauer Behandlung des Deformationsverhaltens von FK zu unterscheidenden E-Moduli.

## 5.5 Theoretische Ermittlung der Grund - Elastizitätskonstanten

Bei der Vordimensionierung einer Verbundstruktur sind oftmals die technischen Elastizitätskonstanten nicht bekannt. Es müssen deshalb theoretisch ermittelbare Werte herangezogen werden, die aber sobald wie möglich durch Versuchsergebnisse bestätigt bzw. ersetzt werden sollten.

Im dreidimensionalen, orthotropen Fall sind neun voneinander unabhängige Elastizitätskonstanten zu berechnen, nämlich  $E_1, E_2, E_3, G_{23},$

$G_{13}$ ,  $G_{12}$  und  $\nu_{32}$ ,  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{13}$  und im zweidimensionalen Fall vier Konstanten. Hieraus kann man entnehmen, welcher Mehraufwand gegenüber dem isotropen Körper mit nur zwei Konstanten besteht. Da für dreidimensionale Körper in der Literatur praktisch verwertbare Berechnungsformeln nur für einige technische Elastizitätskonstanten angegeben werden<sup>1)</sup>, und die meisten Verbundstrukturen dünnwandig sind, beschränkt man sich meistens auf das ebene Problem. Wir wollen das hier nicht tun.

Die vier Grund (bzw. technischen) Elastizitätskonstanten einer einzelnen, ebenen UD-Schicht sind  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $\nu_{12}$  und  $G_{12}$ . Dazu kommen beim UD-Schichtkörper noch  $G_{11}$  und  $\nu_{11}$ . Für sie werden verschiedene Formeln angegeben, wobei als Parameter der Faseranteil und die Elastizitätsgrößen von Faser und Matrix auftreten. Dabei sieht der Verfasser aber keinen Sinn in der Angabe komplizierter Berechnungsformeln, da eine kurze Näherungsformel im Rahmen aller anderen Ungenauigkeiten ausreicht. Es sei hier noch einmal betont, daß die elastischen Eigenschaften des Verbundes nicht nur von Faser und Matrix abhängen. Auch der verwendete Haftvermittler hat erheblichen Einfluß auf die Größe der Elastizitätswerte, sowie die schon erwähnten Härtings- und Umweltbedingungen (Temperatur, Feuchtigkeit).

Eine theoretische Ermittlung der Grund - Elastizitätskonstanten unidirektionaler Faserverbunde ist von vielen Autoren vorgenommen worden. Sie alle arbeiteten mit bestimmten Grund - Annahmen [Goggin]:

1. Der Faserverbund ist makroskopisch homogen und linear elastisch;
2. Fasern und Matrix sind jeweils homogen und linear elastisch im betrachteten Bereich;
3. Matrix und Faser sind frei von Lufteinschlüssen und Mikrorissen;
4. Die Verbindung Faser - Matrix ist vollkommen und ohne Übergangszone;
5. Die Fasern sind gleichmäßig im Verbund verteilt und sind gut ausgerichtet.

#### 5.5.1 Elastizitätsmodul in Faserrichtung: $E_{11}$

Unter der Annahme einachsiger Belastung, und daß Faser und Matrix parallel geschaltete Federn sind, gelten für beide Materialien

$$\epsilon_V = \epsilon_F = \epsilon_M$$

und

$$\sigma_F = \epsilon_F E_F, \quad \sigma_M = \epsilon_M E_M.$$

<sup>1)</sup> Eine sehr nützliche Literatur-Checkliste für alle elastischen Grundgrößen  $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{23}, G_{13}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$  (aber auch die thermischen Größen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, K_1, K_2, K_3$ ) wird in [Chamis/Sendecky], S. 346, angegeben.

Weiter ist

$$\frac{P}{A_v} = \sigma_v = \sigma_f \frac{A_f}{A_v} + \sigma_m \frac{A_m}{A_v} = \sigma_f \varphi + \sigma_m (1-\varphi).$$

Daraus wird über

$$E_{||} = \frac{\sigma_v}{\epsilon_v} = \frac{\epsilon_f}{\epsilon_v} E_f \varphi + \frac{\epsilon_m}{\epsilon_v} E_m (1-\varphi)$$

die sogenannte "Mischungsregel"

$$E_{||} = E_f \left( \varphi + (1-\varphi) \frac{E_m}{E_f} \right) \quad \text{Obere Schranke} \quad (5.48a)$$

gefunden. Diese einfache Formel ist, wie man mit den Variationsprinzipen der Elastomechanik zeigen kann, eine obere Schranke, die <sup>auch</sup> mit dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie gefunden werden kann.

Eine untere Schranke kann mit dem Prinzip vom Minimum der Komplementärenergie zu

$$E_{||} = \frac{E_f}{\varphi + (1-\varphi) \frac{E_f}{E_m}} = \frac{E_m}{(1-\varphi) + \varphi \frac{E_m}{E_f}} \quad \text{Untere Schranke} \quad (5.48b)$$

hergeleitet werden [Calcote]. Bei beiden Formeln ist zusätzlich angenommen worden, daß die Querkontraktion unbehindert ist.

Die vorstehenden Formeln drücken nicht aus, daß eine im Mittel vorliegende Unidirektionalität der Fasern erfaßt wurde. Tsai gibt deswegen einen Korrekturfaktor für die Ausrichtung der Fasern in der Ungleichung

$$0,8 < K < 1,0$$

an. Den Vergleich der theoretischen Kurve mit Meßwerten zeigt für GFK Bild 5.14. Es wurde hierbei Glg. (5.48 a) angewendet.

### 5.5.2 Elastizitätsmodul quer zur Faser: $E_{\perp}$

Größere Schwierigkeiten verursacht die Ermittlung einer Abschätzungsformel für den Elastizitätsmodul in Querrichtung. Hier liegt eine kompliziertere Schaltung von Faser und Matrix als bei der Ermittlung von  $E_{||}$  vor, da der Kraftfluß im Verbund von dem Faseranteil und der Fasernanordnung abhängt (Bild 5.15).

Die Aufstellung der Formeln wird in einigen Aufsätzen rein theoretisch vorgenommen, wobei die Packungsarten der Fasern im Verbund betrachtet werden (vgl. Bilder 5.16). Es werden z.B. hexagonale Packungen von kreisförmigen Elementarfasern [Hashin], oder quadratische Packungen



mit quadratischen oder elliptischen Fasern [Beer], [Tsai], [Azzi] untersucht. Alle diese Formeln ergeben erheblich voneinander abweichende Ergebnisse. Für technische Zwecke haben sich deswegen halbempirisch gefundene Formeln als brauchbarer erwiesen. Eine solche brauchbare<sup>re</sup> Formel liefert Knappe für GFK

$$E_{\perp} = \frac{E_{0M}}{(1-\varphi)^{1,45} + \varphi \frac{E_{0M}}{E_F}} \quad (5.49a)$$

Darin berücksichtigt die Einführung von

$$E_{0M} = \frac{E_M}{1-\mu_M^2}$$

eine Querdehnungsbehinderung der relativ weichen Matrix durch die viel steiferen Fasern. Das bedeutet, die obige Formel gibt Anhaltswerte für GFK, CFK, aber nicht für eine steife Aluminiummatrix. Für GFK kann eine relativ gute Übereinstimmung einer gegenüber Glg. (5.49 a) etwas anderen Kurve (Scheibchenmodell) mit Versuchswerten in Bild 5.17 festgestellt werden.

Für CFK kann als Abschätzung eine von Puck, S. 55, für eine quadratische Faserpackung gefundene rein theoretische Formel herangezogen werden.

Unter Annahme der Parallelschaltung des Faser - Harzbereiches (Bild 5.15) und anschließender Hintereinanderschaltung dieses Bereiches mit dem reinen Harzbereich fand Puck

$$E_{\perp} = \frac{E_{0M}}{\frac{1}{\frac{E_{F\perp}}{E_{0M}} + \frac{1-\sqrt{\varphi}}{\sqrt{\varphi}}} + 1-\sqrt{\varphi}} \quad (5.49b)$$

In dieser Formel ist wiederum die behinderte Querkontraktion des Harzbereiches berücksichtigt, und es ist der oft nicht bekannte Fadenelektizitätsmodul in Querrichtung einzusetzen. Glg. (5.49 b) liefert im praktischen Bereich  $0,45 < \varphi < 0,65$  eine relativ gute Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen.

Eine andere Formel gibt Ekvall an. Sie lautet

$$E_{\perp} = \frac{E_M'}{(1-\varphi)(1-\nu_M'^2) + \varphi \frac{E_M'}{E_F}} \quad (5.49c)$$

wobei

$$E_M' = E_M (1-2\nu_M'^2)$$

den dreiachsialen Querdehnungseffekt berücksichtigt.

Eine andere sehr einfache Berechnungsformel liefert auch hier die Mischungsregel, nur daß jetzt statt des axialen Faserelastizitätsmoduls der quergerichtetete verwendet wird

$$E_{\perp} = E_{F_{\perp}} \left( \varphi + (1-\varphi) \frac{E_M}{E_{F_{\perp}}} \right) \quad (5.49d)$$

Im allgemeinen sollte man bei  $E_{\perp}$  direkt auf Versuchswerte zurückgreifen.

### 5.5.3 Querkontraktionszahl: $\nu_{\perp\parallel}$

Die Haupt - Querkontraktionszahl  $\nu_{\perp\parallel}$  wird mit dem Federmodell bei Längsbelastung ermittelt. In [Calcote] ist die Ermittlung analog zu  $E_{\parallel}$  angegeben. Über die Querdehnungsbeziehung

$$\epsilon_{\perp} / \epsilon_{\parallel} = -\nu_{\perp\parallel} \quad \text{mit} \quad \epsilon_{\perp} = \Delta_{\perp} / t_v$$

bzw. 
$$\Delta_{\perp} = t_v \nu_{\perp\parallel} \epsilon_{\parallel} = \Delta_{F_{\perp}} + \Delta_{M_{\perp}} = t_v \left( \varphi \nu_F \epsilon_{\parallel} + (1-\varphi) \nu_M \epsilon_{\parallel} \right)$$

läßt sich die Gleichung

$$\nu_{\perp\parallel} = \nu_F \left( \varphi + (1-\varphi) \frac{\nu_M}{\nu_F} \right) \quad (5.50)$$

finden.

Meßwerte und theoretische Verläufe für  $\nu_{\perp\parallel}$  gibt Puck in Bild 5.18 an.

### 5.5.4 Schubmodul in der Schichtebene (longitudinal - transversal):

$$\underline{G_{\#} = G_{\parallel\perp}}$$

In diesem Fall kann wieder eine Federanalogie eine Abschätzungsformel erbringen. Ekvall findet

$$G_{\#} = G_M \frac{1}{(1-\varphi) + \varphi G_M / G_F} \quad (5.51a)$$

Für diese Federschaltung und auch andere Näherungen geben Puck/Wurtinger ebenfalls in Bild 5.17 Vergleichskurven an.

Förster/Knappe führen, alldings nur für GFK, die halbempirische Gleichung

$$G_{\#} = G_M \frac{1 + 0,4\sqrt{\varphi}}{(1-\varphi)^{1,45} + \varphi G_M / G_F} \quad (5.51b)$$

an, mit

$$G_M = \frac{E_M}{2(1+\nu_M)} ; \quad G_F \approx \frac{E_F}{2(1+\nu_F)}$$

Puck kommt zu

$$G_{\#} = G_M \frac{1}{\frac{G_F}{G_M} + \frac{1-\sqrt{\varphi}}{\sqrt{\varphi}} + 1-\sqrt{\varphi}} \quad (5.51c)$$

In den vorstehenden Gleichungen sind die jeweiligen Faser- und Harzwerte und der Faservolumenanteil vorzugeben. Das  $\approx$ -Zeichen bei  $G_F$  soll angeben, daß die Fasern selbst schon orthotrop oder transversal isotrop sein können und dann entsprechend berücksichtigt werden sollten (C-Faser).

Bild 5.18 gibt abschließend einen Überblick über die Abhängigkeit aller vier Elastizitätskonstanten vom Faservolumenanteil, aufgezeigt am Beispiel eines speziellen GFK.

### 5.5.5 Querkontraktionszahl: $\nu_{\perp\perp}$

Bei Vorhandensein einer steifen, kreisförmigen isotropen Faser (z.B. Glasfaser) in einer weichen Matrix kann nach Foye, 1972, mit ( $\nu_{LT} \equiv \nu_{\perp\parallel}$ !)

$$\nu_{\perp\perp} = \nu_F \left( \varphi + (1-\varphi) \frac{\nu_M \cdot \frac{1+\nu_M - \nu_{\perp\parallel} E_M / E_{\parallel}}{\nu_F \cdot 1 - \nu_M^2 + \nu_M \nu_{\perp\parallel} E_M / E_{\parallel}}}{\nu_F} \right) \quad (5.52)$$

auch Anwendung auf CFK

gerechnet werden (vgl. Bild 5.19, sowie Bild 5.17).

### 5.5.6 Interlaminarer (Transversal-transversaler) Schubmodul: $G_{\perp\perp}$

Welche Wirkrichtungen dieser Schubmodul gegenüber  $G_{\#}$  hat, zeigt Bild 5.2. Für den Wert von  $G_{\perp\perp}$  kann eine Abschätzung nach Glg. (5.34 b)

$$G_{\perp\perp} = \frac{E_{\perp\perp}}{2(1 + \nu_{\perp\perp})} \quad (5.53)$$

vorgenommen werden.

Letztlich kann zu den vorgenannten Formeln gesagt werden: Sie sind bis auf  $E_{\parallel}$  und  $\nu_{\perp\parallel}$  mehr von theoretischer als von praktischer Bedeutung. Fehler bis in Höhe des Faktors zwei können bei bestimmten betrachteten Materialien auftreten. Allerdings bieten die Formeln die Möglichkeit, die makroskopischen Eigenschaften des Verbundes durch die geometrischen Abmessungen und die Werkstoffgrößen der Komponenten zu kontrollieren.

### 5.6 Zusammenhang technischer Elastizitätsgrößen mit dem Faserorientierungswinkel und Belastungsrichtung

Um ein gutes Verständnis für die Wirksamkeit der technischen Elastizitätsgrößen zu bekommen, empfiehlt es sich, diese in Abhängigkeit vom Ablegewinkel aufzuschreiben. Es soll zuerst die dünne, ebene UD-Schicht untersucht werden.

### 5.6.1 UD-Schicht

Zur Ermittlung der Abhängigkeiten schreiben wir ganz formal das allgemeine Hookesche Gesetz für die k'te Schicht in der bezeichnungsmäßig, gebräuchlichsten Form (ESZ)

$$\{\epsilon\}_k = [S]_k \{\sigma\}_k = \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{26} \\ \text{symm.} & & s_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_k \quad (5.54)$$

an. Ebenso formal kann die Nachgiebigkeitsmatrix  $[S]_k$  in technischen Größen ausgedrückt werden. Nach den Bezeichnungen von Calcote führt das auf (s. [Ashton/Whitney])

$$[S]_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_1} & \frac{\eta_{12,1}}{E_1} \\ & \frac{1}{E_2} & \frac{\eta_{12,2}}{E_2} \\ \text{symm.} & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}_k \quad (5.55)$$

Durch Gleichsetzen der entsprechenden Glieder in (5.54) und (5.55) erhalten wir den Zusammenhang mit den bauteilachsenbezogenen EK  $s_{ik}$ .

Es fehlt noch der Zusammenhang von  $[S]_k$  mit den Elastizitätsgrößen der orthotropen Einzelschicht. Für diese schreiben wir (Schreibweise Puck)

$$\{\epsilon_{UD}\}_k = [S_{UD}]_k \{\sigma_{UD}\}_k = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{\perp} \\ \tau_{\#} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{1\perp} & 0 \\ s_{\perp 1} & s_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & s_{\#} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{\perp} \\ \tau_{\#} \end{Bmatrix}_k \quad (5.56a)$$

an mit  $[S_{UD}]_k$  in technischen Größen

$$[S_{UD}]_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{\perp 11}}{E_{11}} & 0 \\ \frac{-\nu_{11\perp}}{E_{\perp}} & \frac{1}{E_{\perp}} & 0 \\ \text{symm.} & & \frac{1}{G_{\#}} \end{bmatrix}_k \quad (5.56b)$$

Die reziproken Verhältnisse bei Verwendung der Steifigkeitskoeffizienten sollen hier gleich mit angegeben werden

$$\{\sigma_{UD}\}_k = [Q_{UD}]_k \{\epsilon_{UD}\}_k = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{1\perp} & 0 \\ q_{\perp 1} & q_{\perp} & 0 \\ \text{symm.} & & q_{\#} \end{bmatrix}_k \{\epsilon_{UD}\}_k = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-\nu_{\perp 11}\nu_{11\perp}} & \frac{\nu_{11\perp} E_{11}}{1-\nu_{\perp 11}\nu_{11\perp}} & 0 \\ & \frac{E_{\perp}}{1-\nu_{\perp 11}\nu_{11\perp}} & 0 \\ \text{symm.} & & G_{\#} \end{bmatrix}_k \{\epsilon_{UD}\}_k \quad (5.57)$$

Darin sind

$$q_{1\perp} = q_{\perp 1} \quad \text{bzw.} \quad \nu_{\perp 11} = \nu_{11\perp} E_{11}/E_{\perp}$$

Weiterhin sind Transformationen der Schichtspannungen und -dehnungen auf das Bauteil-Hauptachsensystem 1,2 vorzunehmen

$$\{\sigma\}_k = [T_\sigma]_k \{\sigma_{UD}\}_k \quad (5.59a)$$

$$\{\varepsilon\}_k = [T_\varepsilon]_k \{\varepsilon_{UD}\}_k \quad (5.59b)$$

Darin liegen als Transformationsmatrizen

$$[T_\sigma]_k = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & +2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & +sc & c^2-s^2 \end{bmatrix}_k \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} c &= \cos(\alpha_k - \omega) \\ s &= \sin(\alpha_k - \omega) \end{aligned} \quad (5.59a)$$

und

$$[T_\varepsilon]_k = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2-s^2 \end{bmatrix}_k \quad (5.59b)$$

vor, wobei folgende Beziehungen zwischen den Transformationsmatrizen gelten

$$[T_\sigma]^{-1} = [T_\varepsilon]^T, \quad [T_\varepsilon]^{-1} = [T_\sigma]^T.$$

Wenn statt der technischen Formänderungen tensorielle gewählt würden (vgl. Kapitel 5.3), so würde weiter vereinfacht gelten

$$[T_\sigma] \hat{=} [T_\varepsilon].$$

Es können so schließlich die Bauteilachsenwerte  $[S]_k$  bestimmt werden über

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}_k &= [S]_k \{\sigma\}_k & [T_\varepsilon]_k \{\varepsilon_{UD}\}_k \\ [S]_k [T_\sigma]_k \{\sigma_{UD}\}_k &= [T_\varepsilon]_k [S_{UD}]_k \{\sigma_{UD}\}_k \end{aligned} \quad (5.60a)$$

zu

$$[S]_k = [T_\varepsilon]_k [S_{UD}]_k [T_\sigma]_k^{-1} = [T_\varepsilon]_k [S_{UD}]_k [T_\varepsilon]^T.$$

Der Vollständigkeitshalber sei noch die analog herleitbare Formel für die Steifigkeitsmatrix gegeben

$$[Q]_k = [T_\sigma]_k [Q_{UD}]_k [T_\sigma]_k^T. \quad (5.60b)$$

Nach Ermittlung von  $[S]_k$ , bei der UD-Schicht direkt aus  $[S_{UD}]_k$ , läßt sich z.B. für die erste Identität finden ( $\alpha_k = \alpha, \omega = 0$ , Vgl. [Dietz], S.10)

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} = \frac{c^4}{E_{11}} - \frac{\nu_{11}}{E_1} s^2 c^2 - \frac{\nu_{21}}{E_{11}} s^2 c^2 + \frac{s^4}{E_1} + \frac{s^2 c^2}{G_{12}}$$

Bezüglich der  $s_{22}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{66}$ ,  $s_{16}$  und  $s_{26}$  kann in [Lechnitski] nachgelesen werden.

Die Zusammenfassung und Umstellung von Gliedern führt für  $s_{11}$  und die übrigen restlichen 5 Elastizitätsgrößen zu den Beziehungen ( $\sin \alpha = s$ ,  $\cos \alpha = c$ )

$$\frac{E_{II}}{E_1} = c^4 + \left( \frac{E_{II}}{G_{\#}} - 2\nu_{1II} \right) s^2 c^2 + \frac{E_{II}}{E_1} s^4 \quad (5.61 \text{ a bis f})$$

$$\frac{E_{II}}{E_2} = s^4 + \left( \frac{E_{II}}{G_{\#}} - 2\nu_{1II} \right) s^2 c^2 + \frac{E_{II}}{E_1} c^4$$

$$\nu_{21} = \frac{E_1}{E_{II}} \left( \nu_{1II} - \left( 1 + 2\nu_{1II} - \frac{E_{II}}{G_{\#}} + \frac{E_{II}}{E_1} \right) s^2 c^2 \right); \quad \nu_{12} = \nu_{21} \frac{E_2}{E_1};$$

$$\frac{G_{\#}}{G_{12}} = \frac{G_{\#}}{E_{II}} \left( \left( 1 + 2\nu_{1II} + \frac{E_{II}}{E_1} \right) - \left( 1 + 2\nu_{1II} + \frac{E_{II}}{E_1} - \frac{E_{II}}{G_{\#}} \right) (c^2 - s^2) \right)$$

$$-\eta_{12,1} \frac{E_{II}}{E_1} = m_1 = 4s^2 c^2 \left( \nu_{1II} + \frac{E_{II}}{E_1} - \frac{E_{II}}{2G_{\#}} - c^2 \left( 1 + 2\nu_{1II} + \frac{E_{II}}{E_1} - \frac{E_{II}}{G_{\#}} \right) \right)$$

$$-\eta_{12,2} \frac{E_{II}}{E_2} = m_2 = 4s^2 c^2 \left( \nu_{1II} + \frac{E_{II}}{E_1} - \frac{E_{II}}{2G_{\#}} - s^2 \left( 1 + 2\nu_{1II} + \frac{E_{II}}{E_1} - \frac{E_{II}}{G_{\#}} \right) \right),$$

wobei wieder auf die richtige Indizierung der größeren Querkontraktionszahl geachtet wurde, (s. Bücher [Leknitskii]<sup>S.43</sup> und [Ashton/Whitney]). (Bei Dietz finden wir die Bezeichnung  $m_1/E_{II}$  statt  $-\eta_{12,1}/E_1$ ). Als Invarianten liegen ([Hearmon], [Leknitskii])

$$s_{11} + s_{22} + 2s_{12} = \tilde{s}_{11} + \tilde{s}_{22} + 2\tilde{s}_{12} = s_{II} + s_I + 2s_{II,I}$$

$$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - 2\frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{1}{E_{II}} + \frac{1}{E_I} - 2\frac{\nu_{1II}}{E_{II}}$$

und

$$s_{66} - 4s_{12} = \tilde{s}_{66} - 4\tilde{s}_{12} = s_{\#} - 4s_{II,I}$$

$$\frac{1}{G_{12}} + \frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{1}{G_{\#}} + 4\frac{\nu_{1II}}{E_{II}}$$

vor.

Für einen speziellen Datensatz sind die Funktionsverläufe der Glg. (5.61) in Bild 5.21 angegeben. Dimnock/Abrahams geben für  $E_1$  ( $\alpha$ ) auch Meßwerte an Bild 5.22.

Die wesentliche Erkenntnis all dieser Kurven vermittelt diejenige von  $E_1 / E_{II}$ . Sie zeigt einen recht schnellen Abfall für kleine Werte  $\alpha$  in der 1-Richtung, was für Steifigkeitsüberlegungen von höchster

Bedeutung ist. Die Werte in der Querrichtung (entsprechend  $90-\alpha$ ) sind von Winkelabweichungen weniger beeinflusst. Wir sehen weiter aus der Schubmodulformel, daß für  $\alpha = 45^\circ$  der Schubmodul  $G_{12}$  unabhängig von  $G_{\#}$  wird [Dietz]

$$G_{12} = \frac{E_{II} E_{\perp}}{E_{II} + E_{\perp} + 2 E_{\perp} \nu_{II}} \quad (5.62)$$

### 5.6.2 Multidirektionales Laminat

Der Übergang zur mehrschichtig, aufgebauten Schale ist recht einfach, wenn erst einmal - wie zuvor gezeigt - die Anteile der UD-Schicht auf das Hauptachsensystem des Bauteils bezogen sind.

Entsprechend dem Zusammenhang zwischen den Schichtspannungen und den durch ein Dach ( $\wedge$ ) gekennzeichneten Schalenmittelspannungen erhalten wir

$$\{\hat{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\tau}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1/t \\ N_2/t \\ N_{12}/t \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_k = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} \{\sigma\}_k,$$

wobei  $t_k$  die Schichtdicke und  $t$  die Gesamtverbundwandstärke sind.  $\{\hat{\sigma}\}$  setzt sich also aus den Schichtanteilen zusammen, multipliziert mit dem Schichtdickenverhältnis. Nach Einsetzen der Gleichgewichtsbeziehungen in das inverse Hookesche Gesetz wird

$$\{\hat{\epsilon}\} = [\hat{S}] \{\hat{\sigma}\} = [\hat{S}] \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} \{\sigma\}_k \quad (5.63a)$$

Da aber die Schichten nicht aufeinander gleiten sollen, gilt

$$\{\hat{\epsilon}\} = \{\epsilon\}_k = [S]_k \{\sigma\}_k$$

und weiter

$$[\hat{S}] \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} \{\sigma\}_k = [S]_k \{\sigma\}_k$$

Man sieht, daß auf diese Weise - wie beim UDV - ein Aufbau der Nachgiebigkeitsmatrix des Laminates aus den Schichtanteilen nicht mehr möglich ist. Nachgiebigkeiten lassen sich nicht aufaddieren! Der Weg führt über die Addition von Steifigkeiten zur Steifigkeitsmatrix des Laminates und anschließende Inversion.

Für die Transformationsbeziehung (5.58 a)

$$\{\sigma\}_k = [T_{\sigma}]_k \{\sigma_{UD}\}_k$$

und Einsetzen von (5.58 b), sowie der Spannungsdehnungsbeziehung für die Schicht (Glg. (5.56 a))

$$[Q]_k \{\epsilon\}_k = [T_{\sigma}]_k [Q_{UD}]_k \{\epsilon_{UD}\}_k$$

$$= [T_{\sigma}]_k [Q_{ub}]_k [T_{\epsilon}]_k^{-1} \{\epsilon\}_k$$

finden wir die zuvor nicht abgeleitete Glg. (5.60 b)

$$[Q]_k = [T_{\sigma}]_k [Q_{ub}]_k [T_{\sigma}]_k^T$$

mit  $[T_{\epsilon}]_k^{-1} = [T_{\sigma}]_k^T$ .

Die Elastizitätsmatrix  $[\hat{Q}]$  des Laminates erhält man über das Hookesche Gesetz für die Schicht, sowie die Gleichgewichtsbeziehung des Laminates und die Kontinuitätsbeziehung  $\{\hat{\epsilon}\} = \{\epsilon\}_k$

$$\{\hat{\sigma}\} = [\hat{Q}]\{\hat{\epsilon}\} = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} \{\sigma\}_k \quad (5.63b)$$

$$[\hat{Q}]\{\epsilon\}_k = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} [Q]_k \{\epsilon\}_k$$

$$[\hat{Q}] = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} [Q]_k \quad (5.64)$$

Weil  $[\hat{S}]$  zu  $[\hat{Q}]$  invers ist, gilt schließlich

$$[\hat{S}] = [\hat{Q}]^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} & \hat{S}_{16} \\ & \hat{S}_{22} & \hat{S}_{26} \\ \text{symm.} & & \hat{S}_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{E}_1} & -\frac{\hat{\nu}_{21}}{\hat{E}_1} & \frac{\hat{\eta}_{12,1}}{\hat{E}_1} \\ & \frac{1}{\hat{E}_2} & \frac{\hat{\eta}_{12,2}}{\hat{E}_2} \\ \text{symm.} & & \frac{1}{\hat{G}_{12}} \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

In einigen Spezialfällen seien noch die Beziehungen für die technischen Elastizitätsgrößen angegeben.

Wenn die Fasern in zwei Richtungen unter dem Winkel  $\alpha =$  beliebig zur Bauteilachse liegen, wenn also ein bidirektionaler Verbund (BDV) vorliegt (s. [Vogt u.a.], S. 201), dann kommen wir mit den Größen der Einzelschicht nach den Glgn.(5.61) zu

$$\begin{aligned} \frac{E_{II}}{\hat{E}_1} &= \frac{E_{II}}{E_1} - m_1^2 \frac{G_{12}}{E_{II}} \quad , \quad \frac{E_{II}}{\hat{E}_2} = \frac{E_{II}}{E_2} - m_2^2 \frac{G_{12}}{E_{II}} \quad , \quad \text{AWV} \\ \hat{\nu}_{12} &= \frac{\hat{E}_2}{E_{II}} \left( \nu_{12} \frac{E_{II}}{E_2} + m_1 m_2 \frac{G_{12}}{E_{II}} \right) \quad , \quad \hat{\nu}_{21} = \frac{\hat{E}_1}{E_{II}} \left( \nu_{21} \frac{E_{II}}{E_1} + m_1 m_2 \frac{G_{12}}{E_{II}} \right) \quad , \quad (t_1 = t_2) \\ \frac{E_{II}}{\hat{G}_{12}} &= \frac{1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \left( \frac{E_{II} (1 - \nu_{12} \nu_{21})}{G_{12}} - \frac{m_1 E_1 (m_1 + \nu_{12} m_2)}{E_{II}} - \frac{m_2 E_2 (m_2 + \nu_{21} m_1)}{E_{II}} \right) \quad (5.66) \end{aligned}$$

Für einen speziellen Datensatz sind die Glgn. (5.66) eines AWV in Bild 5.23 aufgezeichnet worden. Es zeigt sich, daß der Abfall von  $\hat{E}_1$  gegenüber der vergleichsweise eingezeichneten  $E_1$ -Kurve des UDV erst bei einem größeren Faserorientierungswinkel  $\alpha$  erfolgt.

Bild 5.24 gibt alle technischen Elastizitätskonstanten eines speziellen AWV in Abhängigkeit vom Faserorientierungswinkel  $\alpha$  an.

Für den Fall, daß die Fasern rechtwinklig zueinander orientiert sind, wie beim Kreuzverbund (er soll dünnwandig sein), lauten die Beziehungen (s. [Diss. Puck], S. 11)



$$\frac{\hat{E}_{11}}{\hat{E}_1} = \frac{1 - \nu_{11} \nu_{11}}{\frac{t_2}{t} \frac{E_1}{E_{11}} + \frac{t_1}{t} - \frac{\nu_{11}^2}{\frac{t_2}{t_1} + \frac{t_1}{t} \frac{E_1}{E_{11}}}} \quad (5.67)$$

$$\frac{\hat{E}_{22}}{\hat{E}_2} = \frac{1 - \nu_{11} \nu_{11}}{\frac{t_1}{t} \frac{E_1}{E_{11}} + \frac{t_2}{t} - \frac{\nu_{11}^2}{\frac{t_1}{t} + \frac{t_2}{t} \frac{E_1}{E_{11}}}} \quad \text{KV} \quad (t_1 \neq t_2)$$

$$\hat{\nu}_{12} = \frac{\nu_{11}}{\frac{t_1}{t} + \frac{t_2}{t} \frac{E_{11}}{E_1}} = \hat{\nu}_{21} \quad , \quad \frac{\hat{E}_{11}}{\hat{G}_{12}} = \frac{E_{11}}{G_{\#}}$$

Bild 5.25 zeigt die technischen Elastizitätskonstanten eines Kreuzverbundes (KV) für den Sonderfall  $t_1 = t_2$ . Bei der Auftragung bleibt  $\alpha = 90^\circ$  erhalten und nur die Transformationsrichtung  $\omega$  wird variiert.

Wie in [Tsai, 1966] soll auch hier betont werden: Für isotrope Materialien sind alle technischen Elastizitätskonstanten wirklich konstant. Bei einem orthotropen Material sind die Moduln bei Drehung nicht invariant. Das begründet weiter, daß für spezielle Winkel  $\alpha$  eine Querkontraktionszahl größer als 0,5 werden kann. Wie aus dem Verlauf von  $\hat{\nu}_{12}$  gefolgert werden darf, kann mit einer gesteuerten Winkelablage in vielschichtigen Verbundschalen eine bessere Dehnungsverträglichkeit erhalten werden.

### 5.6.3 Matte und Gewebe

Die technischen Elastizitätsgrößen von Matten und Geweben lassen sich mit Hilfe einiger Überlegungen aus den Ergebnissen für den MSV ableiten.

#### Matte

Bei Matten ist die Vorstellung die, daß man sich die statistisch verteilten Fasern durch eine große Summe von UD-Schichten bestimmter Faserlänge ersetzt denkt. Wenn die Belastung in Mattenebene erfolgt, kann man dann davon ausgehen, daß der Traganteil in jeder Richtung 0,5 (s. [Schneider, 1973]) ist. Dieses läßt die Folgerung zu, daß die technischen Elastizitätsgrößen von Matten aus einem aus gleichdicken UD-Schichten bestehendem Kreuzverbund (KV) ermittelt werden können. Aus Glg. (5.67) wird dann für die quasihomogene Matte (die EK sind also unabhängig von der Transformationsrichtung)

$$E_{\text{MoHc}} \approx 0,5(E_{\parallel} + E_{\perp}) \quad , \quad \nu_{\text{MoHc}} = \frac{\nu_{\perp\parallel}}{0,5(1 + E_{\parallel}/E_{\perp})} \quad , \quad (5.6A)$$

$$G_{\text{MoHc}} = G_{\#} .$$

### Gewebe

Da Kett- und Schußrichtung einen Winkel von  $90^{\circ}$  einschließen, können bei Geweben die Formeln für den KV, Glg. (5.67), angewendet werden. In diesen Formeln stehen jedoch die unbekannt Schichtdicken  $t_{\text{K}}$  und  $t_{\text{S}}$ , die im folgenden berechnet werden sollen.

Bei Geweben werden von den Herstellerfirmen zu ihrer Charakterisierung Gewichtsanteile,  $k_{\parallel}$  genannt, der Fasern in ihrer Hauptrichtung angegeben. Das Gewichtsverhältnis der Fasermenge in Beanspruchungsrichtung (hier Kettrichtung) zur Gesamtfasermenge wird durch Zerlegung eines Gewebes der Fläche  $A$  in Kett- und Schußfäden und Wägung der jeweiligen Fasermengen bestimmt. Unter der Annahme, daß der Fasergehalt in Kett- und Schußschicht gleich groß ist, wird ( $\gamma_{\text{S}}$  = Index Schuß,  $\gamma_{\text{K}}$  = Index Kett richtung)

$$k_{\parallel} = \frac{G_{\text{Fs.}}}{G_{\text{F}}} = \frac{G_{\text{Fs.}}}{G_{\text{Fs.}} + G_{\text{Fk.}}} = \frac{A t_{\text{K}} \gamma_{\text{F}}}{A(t_{\text{K}} + t_{\text{S}}) \gamma_{\text{F}}} = \frac{t_{\text{K.}}}{t_{\text{K.}} + t_{\text{S.}}} = \frac{t_{\text{K.}}}{t} \quad (5.69a)$$

bzw. das Schichtdickenverhältnis (s. [Puck/Wurtinger])

$$\frac{t_{\text{K.}}}{t_{\text{S.}}} = \frac{k_{\parallel}}{1 - k_{\parallel}} \hat{=} \frac{t_1}{t_2} \quad (5.69b)$$

erhalten. Unterschiedliche Faseranteile  $\varphi_{\text{K}}$  und  $\varphi_{\text{S}}$  müßten in Glg. (5.69 a) eingearbeitet werden.

Die Ermittlung der absoluten Werte erfolgt über verschiedene Beziehungen Falls Lufteinschlüsse vernachlässigt werden, ist die Gesamtwanddicke

$$t = \frac{t_{\text{F}}}{\varphi} = \frac{\bar{q}}{\gamma_{\text{F}}} \cdot \frac{1}{\varphi} \quad , \quad (5.70a)$$

wenn  $\bar{q}$  das Fasergewicht je Flächeneinheit der Gewebelage ist.

Für die Schichtdicke der Kettfäden gilt, wenn  $n_{\text{L}}$  die Anzahl der Gewebelagen im Laminat ist,

$$t_{\text{K.}} = n_{\text{L}} \frac{k_{\parallel} \bar{q}}{\gamma_{\text{F}}} \cdot \frac{1}{\varphi} \quad (5.71)$$

Nach Messung von  $\bar{q}$ , Bestimmung von  $\varphi$  des Verbundwerkstoffes mit den üblichen Verfahren, und  $\gamma_{\text{F}}$  als gegebener Größe liegen  $t_{\text{K}}$  und  $t$  bzw.  $t_{\text{S}}$  fest.

#### 5.6.4 Orthotroper Körper

Die Transformation der Elastizitätsmatrix (5.31 a) bei einer Drehung um die 3-Achse ist im Buch von Lechnitski, S. 41 - 43, angegeben worden (Auf Schreibfehler achten!). Im Buch von Ashton/Whitney ist die Transformation ebenfalls angegeben worden, jedoch sind die Vorfaktoren, z. B. bei den  $E_{66}$ , nicht immer richtig, was wohl daran liegt, daß die Transformation tensoriell entsprechend Glg. (5.9 c)

$$\tilde{C}_{kl}^{ij} = C_{st}^{uv} \tilde{a}_u^i \tilde{a}_v^j \tilde{a}_k^s \tilde{a}_l^t$$

durchgeführt wurde, aber anschließend die Überführung der tensoriellen in technische Größen vielleicht nicht richtig war.

Da die Transformation der Elastizitätsmatrizen von Körpern sinnvollerweise numerisch durchgeführt wird, sei hier auf eine Angabe verzichtet. Bezüglich der Invarianten ist bei Lechnitski nachzulesen.

#### 5.7 Versuchstechnische Ermittlung von Grundkonstanten bzw. Elastizitätskoeffizienten

Da die theoretische Ermittlung der Grundkonstanten im allgemeinen nur Anhaltswerte über die Größe liefert, werden üblicherweise experimentelle Werte benutzt. Es ist dabei wichtig, sich möglichst Ergebnisse von solchen Proben und Prüfvorrichtungen zu besorgen oder selbst zu ermitteln, die genormt sind (ASTM oder DIN) und deren spezielle Eigenschaften sowie Einflüsse auf das Meßergebnis bekannt sind. Als Beispiel für einen solchen Einfluß sei der Schubeinfluß bei der Dreipunktbiegeprobe genannt.

Je nach der Bauteilform kann man bei der Herstellung eines Bauteils geeignete Probentypen gleich mit herstellen. UD-Proben gelingt das leicht bei ebenen bzw. zylindrischen Bauteilen. Es lassen sich dann z.B. einschichtige, ebene Proben bzw. sog. NOL-Ringe erhalten. Bei mehrschichtigen Bauteilen lassen sich manchmal direkt die bauteilachsenbezogenen Gesamtelastizitätskonstanten ermitteln.

Vogt u.a. untersuchten die bekanntesten Probentypen und kommen bei den Anforderungen an Proben und Methoden zu den folgenden Kriterien:

Die Probenauslegung muß auf gesunder, theoretischer Basis stehen, damit ausreichend gute Versuchswerte erhalten werden können.

Die ermittelten Werte sollen reproduzierbar sein.

Die Werte sollen allen Strukturanforderungen genügen und so

möglichst im ganzen Betriebsbereich Gültigkeit besitzen.

Proben- und Versuchseinrichtungskosten sollen, auf die Datenmenge bezogen, optimal sein.

Im allgemeinen können die Versuchsaufbauten darauf beschränkt werden, die Elastizitätskonstanten dünnwandiger Verbundbauteile messen zu müssen. Das liegt daran, daß die Anwendung dickwandiger Verbundschalen technisch kaum sinnvoll ist, die Herstellung schwierig und die Qualität solcher Schalen erheblich schlechter als die bei dünnwandigen Teilen sein wird.

### 5.7.1 Statische Ermittlung der Grundkonstanten

#### Zweidimensional:

Die Ermittlung der Grundkonstanten einer UD-Schicht wird mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes für die orthotrope UD-Schicht erreicht. Es gilt Glg. (5.54 a)

$$\{\epsilon_{UD}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{||} \\ \epsilon_{\perp} \\ \gamma_{\#} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{||} & s_{||\perp} & 0 \\ s_{\perp||} & s_{\perp} & 0 \\ \text{symm.} & & s_{\#} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{||} \\ \sigma_{\perp} \\ \tau_{\#} \end{Bmatrix} .$$

In Anwendung drei verschiedener Belastungsfälle auf Flachzugproben nach der Kunststoffnorm DIN 53457 (Tabelle 5.3) lassen sich die vier voneinander unabhängigen Grundkonstanten  $E_{||}$ ,  $E_{\perp}$ ,  $\nu_{\perp||}$  und  $G_{\#}$  bestimmen. Dabei werden die Dehnungen gemessen und die Kraft am Prüfgerät abgelesen.

Aus  $\sigma_{\perp} = 0$ ,  $\tau_{\#} = 0$  folgen die zwei Beziehungen, wenn  $\sigma_{||} = P/A$

$$\epsilon_{||} = s_{||} \sigma_{||} = \frac{1}{E_{||}} \sigma_{||} \quad \text{und} \quad \epsilon_{\perp} = s_{\perp||} \sigma_{||} = \frac{-\nu_{\perp||}}{E_{\perp}} \sigma_{||} = \frac{-\nu_{\perp||}}{E_{||}} \sigma_{||}$$

so daß aus der vorliegenden Spannung und den gemessenen Dehnungen

$$E_{||} = \frac{\sigma_{||}}{\epsilon_{||}} \quad \text{und} \quad \nu_{\perp||} = -\epsilon_{\perp} \frac{E_{||}}{\sigma_{||}} = \frac{-\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{||}} \quad (\nu_{\perp||} > \nu_{||\perp}!) \quad (5.72)$$

ausrechenbar sind.

Aus  $\sigma_{||} = \tau_{\#} = 0$ ,  $\sigma_{\perp} \neq 0$  ergeben sich aus den zugehörigen Meßgrößen der querbelasteten Probe

$$E_{\perp} = \frac{\sigma_{\perp}}{\epsilon_{\perp}} \quad \text{und} \quad \nu_{||\perp} = \frac{-\epsilon_{||}}{\epsilon_{\perp}} . \quad (5.73)$$

Aus dem letzten Belastungstyp  $\sigma_{\perp} = \sigma_{\parallel} = 0$ ,  $\tau_{\perp\parallel} = 0$  erhält man

$$G_{\#} = \frac{\tau_{\#}}{\gamma_{\#}} \quad (5.74)$$

Die Betti-Maxwellsche-Reziprozitätsbeziehung dient hierbei als Kontrolle

$$q_{\perp\parallel} = q_{\parallel\perp} \rightsquigarrow \frac{v_{\perp\parallel}}{v_{\parallel\perp}} = \frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}} \quad (5.75)$$

Tabelle 5.3 gibt einen Überblick über die bekanntesten, bisher eingesetzten Probenotypen und den mit ihnen gewinnbaren elastischen Grundgrößen. (Der Zusammengehörigkeit wegen sind auch die übrigen Grundgrößen in der Tabelle mit aufgeführt).

Welche Probenform am zweckmäßigsten und wirtschaftlichsten ist, hängt außer von der Form des zu erstellenden Bauteiles auch von den vorhandenen Prüfvorrichtungen ab. Wenn wir ein zylindrisches Bauteil wickeln wollen, und deswegen die zugehörigen Wickeleinrichtungen einsatzbereit sind, so eignet sich der zylindrische Wickelprobekörper in Bild 5.26 am besten. Von diesem können weiterhin sogenannte NOL-Ringe abgeschnitten und entsprechend Bild 5.26 mit relativ wenig Aufwand geprüft werden.

Nach [Greszuk, 1968], S. 142, finden wir mit dem Douglas - Ring - Test den Schubmodul

$$G_{\#} = \frac{3}{J \left( \delta_Q / Q \pi R_m^3 - 1/E_{\parallel} I \right)} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} J &= \beta a b^3 \quad (\text{Tabelle 5.4}) \\ I &= \frac{1}{12} a b^3 \end{aligned} \quad (5.76)$$

Darin ist  $\delta_Q \left( = \frac{\pi Q R_m^3}{E I} + \frac{3 \pi Q R_m^3}{G J} \right)$  die Klaffung der Ringenden unter der Scherlast  $Q$ ,  $I$  das Flächenträgheitsmoment und  $R_m$  der mittlere Radius des Verbundringes.

Wenn ein Kräftepaar  $P$  in Ringebene angebracht wird, so läßt sich ebenfalls  $E_{\parallel}$  bestimmen zu [Greszuk, 1968]

$$E_{\parallel} = \frac{\pi P R_m^3}{2 I \delta_D} \quad (5.77)$$

Die Verschiebung  $\delta_D$  ist die Veränderung im Ringdurchmesser über den Lastangriffspunkten.

An dem zylindrischen Stück kann man mit Lasten kleiner als der Beulast eine Aussage für den Elastizitätsmodul in Querrichtung auf Druck machen. Gemäß  $\sigma_{\perp} = \epsilon_{\perp} E_{\perp} = P_{\text{ax}} A$  ergibt sich nach Umformung die Beziehung

$$E_{1D} = \frac{P_{ax}}{2\pi R_m t} \epsilon_{\perp} \quad (5.78)$$

Bei entsprechender Ausbildung des Zylinderprüflings für Zugbelastung wird  $E_{1z}$  gemessen.

Eine weitere Möglichkeit den Schubmodul zu messen, bietet sich bei Ausbildung der Enden des zyl. Prüflings für einen Torsionsversuch (s. DIN - Norm für Kunststoffe).

Eine andere Möglichkeit, elastische Grundkonstanten zu erhalten, wäre die folgende Methode. Zur Herstellung der Proben wird ein Würfel, wie in Bild 5.26 bewickelt, der Verbund ausgehärtet und ~~dann werden~~ die Proben ausgeschnitten. Anschließend werden die Proben an den einzuspannenden Rändern bearbeitet, an die Spannvorrichtung angepaßt und mit Dehnmeßstreifen versehen.

Wir messen mit der in Faserrichtung herausgeschnittenen Probe wiederum

$$E_{\parallel} = \frac{P_{\parallel}}{A_{\parallel}} \frac{1}{\epsilon_{\parallel}} \quad \text{und} \quad \nu_{1\parallel} = \frac{-\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel}}$$

und mit der anderen in Querrichtung  $E_{\perp} = \frac{P_{\perp}}{A_{\perp}} \frac{1}{\epsilon_{\perp}}$ .

Wohl das einfachste Verfahren, relativ genau gleich zu drei elastischen Grundkonstanten zu kommen, ist dasjenige von Tabelle 5.5. Es wird vom Air Force Material Laboratory empfohlen und basiert auf der Kenntnis der zumeist ungefähr bekannten, nicht so sehr streuenden Querkontraktionszahl  $\nu_{1\parallel}$ .

Für einen langen und flachen Streifen mit longitudinalen Fasern ist ein Schubmodul ermittelbar, der im wesentlichen  $G_{12}$  entspricht [Cawthorne/Harris]. Dieselbe Probenform mit transversal gerichteten Fasern liefert auch eine Aussage für den transversalen Schubmodul  $G_{23}$ . Für die Messung dieses  $G_{11}$ -Schubmoduls,  $G_{23} = G_{11}$  beim UD-Körper, ist der Torsionsversuch mit einem flachen Stab (Bild 5.20) geeignet ([Czëwenka/Schnell], S. 145).

$$G_{11} = \frac{M_D}{J_D \phi} \quad \text{mit} \quad J_D = 0,35^3 a \quad \left( \frac{a}{s} = \frac{7}{1} = \frac{\text{Breite}}{\text{Dicke}} \right) \quad (5.79)$$

Die Querkontraktionszahl wird analog zu  $\nu_{1\parallel}$  jedoch an einer Querkzugprobe ermittelt

$$\nu_{11} = \frac{-\epsilon_{\perp \text{ längs}}}{\epsilon_{\perp \text{ quer}}} \quad (5.80)$$

## Dreidimensional

Manchmal ist es notwendig, alle neun Konstanten eines orthotropen Körpers vorliegen zu haben (Glg. (5.31 a)). Die Ermittlung dieser Konstanten gelingt am besten ([Lempriere]) bei geeigneter Reduktion der Meßdaten aus Versuchen mit verschiedenen Orientierungswinkeln zwischen Faser- und Belastungsrichtung, dann also, wenn die Ergebnisse von allen Koordinaten abhängen (Bild 5.27).

Bei rein einachsiger Belastung - nur  $\sigma_1 \neq 0$  - liefern die drei Dehnungen die drei Beziehungen (Glg. (5.30))

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= s_{11} \sigma_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} , \\ \varepsilon_2 &= s_{12} \sigma_1 = \frac{-\nu_{12} \sigma_1}{E_2} = \frac{-\nu_{21} \sigma_1}{E_1} , \\ \varepsilon_3 &= s_{13} \sigma_1 = \frac{-\nu_{13} \sigma_1}{E_3} = \frac{-\nu_{31} \sigma_1}{E_1} .\end{aligned}\tag{5.81}$$

Die Verhältnisse der Dehnungen in Querrichtung zu denen in Längsrichtung ergeben zwei Gleichungen für die beiden Poissonschen Konstanten

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\nu_{21} = \frac{s_{12}}{s_{11}} , \quad \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = -\nu_{31} = \frac{s_{13}}{s_{11}} .\tag{5.72}$$

Beim Übergang zu einem um die 2-Achsen gedrehten KOS  $1', 2', 3'$  erhalten wir nach Durchführung der Transformation [Lempriere, S. 366] für diesen uniaxialen Belastungsfall die Steifigkeitsziffern ( $\sin \omega = s$ ,  $\cos \omega = c$ )

$$\begin{aligned}s'_{11} &= s_{33} s^4 + (2s_{31} + s_{55}) s^2 c^2 + s_{11} c^4 \\ s'_{12} &= s_{32} s^2 + s_{12} c^2 \\ s'_{13} &= (s_{33} + s_{11} - s_{55}) s^2 c^2 + s_{13} (c^4 + s^4)\end{aligned}\tag{5.82a}$$

in Abhängigkeit vom Drehwinkel  $\omega$ . Wir können diese Gleichungen noch vereinfachen, so daß sie vorteilhafter anzuwenden sind

$$\begin{aligned}\frac{1-\nu'_{31}}{E'_1} &= s'_{11} + s'_{13} = ((s_{13} + s_{33}) + (s_{11} - s_{33}) c^2) \\ \frac{-\nu'_{21}}{E'_1} &= s'_{12} = (s_{32} + (s_{12} - s_{32}) c^2) \\ \frac{-\nu'_{31}}{E'_1} &= s'_{13} = (s_{13} + (s_{11} + s_{33} - s_{55} - 2s_{13}) s^2 c^2) .\end{aligned}\tag{5.82b}$$

Es werden nun die Wertetripel  $E'_1, \nu'_{21}$  und  $\nu'_{31}$  gemäß (5.71) für verschiedene  $\omega$ -Werte festgestellt (Tabelle 5.6) und mit ihnen sechs der neun Nachgiebigkeitsziffern bestimmt.

Die Auswertung der Versuchsergebnisse erfolgt mit dem Trick, daß Lempriere die Summen  $s'_{11} + s'_{13}$ ,  $s'_{12}$ ,  $s'_{13}$  über den trigonometrischen Funktionen linear aufträgt und so die beste Ausgleichsmethode anwendet, die es in diesem Fall gibt (Bild 5.27). Es lassen sich leicht an den Stellen  $\omega = 0^\circ$  und  $\omega = 90^\circ$  einfache Beziehungen für die Nachgiebigkeitsziffern erhalten

$$\begin{aligned} s_{33} &= 0,403 \quad , \quad s_{13} = -0,102 \quad , \quad s_{32} = -0,117 \\ s_{11} - s_{33} &= 0,111 \quad , \quad s_{12} - s_{32} = -0,041 \quad (5.82c) \\ s_{33} + s_{11} - s_{55} - 2s_{13} &= -0,240 \quad , \end{aligned}$$

aus denen sie dann selbst

$$\begin{aligned} s_{11} &= 0,394 \quad , \quad s_{33} = 0,505 \quad , \quad s_{13} = -0,102 \quad (5.83) \\ s_{12} &= -0,158 \quad , \quad s_{23} = -0,117 \quad , \quad s_{55} = 1,343 \quad ; \end{aligned}$$

und weiter die sechs Grundkonstanten berechenbar sind

$$\begin{aligned} E_1 &= 2,54 \cdot 10^6 \text{ psi} \quad , \quad E_3 = 1,98 \cdot 10^6 \text{ psi} \\ G_{13} &= 0,745 \cdot 10^6 \text{ psi} \quad , \quad \nu_{31} = 0,259 \quad (\nu_{13} = 0,202) \quad (5.84) \\ \nu_{21} &= 0,193 \quad , \quad \nu_{32} = 0,231 \quad . \end{aligned}$$

Weitere zwei der drei verbliebenen Grundkonstanten  $E_2$ ,  $G_{12}$  und  $G_{23}$  werden nach Drehung um die 1-Achse des Versuchstückes, in einer zweiten Versuchsreihe, erhalten. Die zugehörigen Messungen führen aber wieder auf sechs Koeffizienten  $s_{22}$ ,  $s_{33}$ ,  $s_{23}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{13}$  und  $s_{44}$ , von denen nur  $s_{22}$  und  $s_{44}$  neu hinzukommen. Die übrigen vier stellen somit nützliche Kontrollen der ersten Versuchsreihe dar.

Die Bestimmung von  $s_{66}$  erfolgt in der dritten Versuchsreihe.

Differenzen, die Lempriere zwischen den Zug- und Druckmessungen feststellte, waren in  $s'_{11}$  am größten und zwar für  $\omega = 0$ .

Es ist noch zu bemerken, daß die Versuchseinrichtung grundsätzlich so gestaltet sein sollte, daß die Verzerrung  $\gamma_{13}$  in der Klemmvorrichtung nicht behindert ist. Eine Korrektur, unter der Annahme  $\gamma_{13} = 0$  führte beim vorliegenden Beispiel zu kaum abweichenden Ergebnissen.

Bei einem transversal isotropen Körper, wie einer dicken UD-Probe, sind nur fünf voneinander unabhängige Konstante zu bestimmen (Glg. (5.3). Die übrigen sind bei transversaler Isotropie in der 1-2-Ebene, analog zu den Glgn. (5.33) und (5.34) durch

$$s_{22} = s_{11} \quad , \quad s_{44} = s_{55} \quad , \quad s_{13} = s_{23} \quad \text{und} \quad s_{66} = 2(s_{11} - s_{12})$$

bestimmt.



Am Beispiel von C-Fasern sollen die Grundkonstanten und die Nachgiebigkeitsziffern eines transversal isotropen Körpers vorgestellt werden: Goggin gibt dazu die schon erwähnte Tabelle 5.2 an. Die Werte darin sind teilweise gemessen, oder mit Gleichungen von Halpin/Tsai, 1969, und Meaton, 1968, gewonnen worden.

Erwähnenswert sind im Anschluß an das Vorgenannte noch die Grenzwertbetrachtungen von Brandmaier für die Nachgiebigkeitsziffern unidirektionaler Faserverbunde und von Hahn die Entwicklung der Invarianten bei orthogonaler Matrix, womit eine gewisse Überprüfung der Gültigkeit der jeweils vorliegenden EK möglich ist.

Weiter ist aus numerischen Gründen noch eine Arbeit von Kavanagh, 1973, anzuführen. In dieser werden Einflüsse von Meßfehlern, Probenvariationen Lufteinschlüssen auf die EK festgehalten. Ein 10 %-Fehler in irgendeiner Fehlerquelle, wie Misorientierung der Fasern, Temperaturänderungen, Probenungenauigkeiten, Fehler in den Lasten und ungenaue Dehnungsmeßstreifenlage, kann schon zu ungültigen Werten führen. Der Erhalt eines schlecht konditionierten Gleichungssystems zeigt nach kurzem Studium an, welchen Einfluß ein Fehler von bestimmter Größe ausüben kann.

Es ist immer von Vorteil zur Kontrolle mehr Größen zu messen als man unbedingt braucht!

### 5.7.2 Dynamische Ermittlung von Elastizitätsgrößen

Zur Ermittlung von Elastizitätsgrößen faserverstärkter Kunststoffe können auch sogenannte dynamische Meßverfahren herangezogen werden. Man teilt sie ein in Verfahren, die mit der Messung fortschreitender Wellen arbeiten und solche, die stehende Wellen bzw. Schwingungen benutzen. Der Unterschied zwischen den beiden Wellenarten ist der, daß fortschreitende Wellen zum theoretisch unendlich ausgedehnten, elastischen Kontinuum gehören, während stehende Wellen ausgezeichnete Lösungen der Bewegungsdifferentialgleichungen spezieller, endlicher Kontinua sind. Bei fortschreitenden Wellen ist nur der Lösungsansatz anders.

Die Fortpflanzung der elastischen Wellen richtet sich nach den elastischen Eigenschaften und den Abmessungen des Körpers. Ähnlich, wie in der Optik treten Reflexion, Brechung, Beugung, Streuung usw. auf, weshalb man die Wellenfortpflanzung auch häufig als Schalloptik bezeichnet [Niederstadt].

Bei flüssigen und gasförmigen Medien entstehen infolge der Volumen-

elastizität Kompressionswellen als reine Longitudinalschwingung (Bild 5.28a). In festen Körpern kann die Schallenergie durch Longitudinal- und Transversalwellen übertragen werden. In allseitig ausgedehnten Medien bilden sich Wellenformen, wie im Bild 5.28 b und 5.28 c.

In Platten und Stäben entstehen durch Grenzflächeneinflüsse, das sind veränderte Verformungsbedingungen, Dehn- und BiegeWellen, wie im Bild 5.28 d und 5.28 e.

Die dargestellten Formen stellen indessen immer die einfachsten Typen dar. Durch Überlagerung verschiedener Schwingungsformen können weitere Schwingungen höherer Ordnung entstehen.

Als Voraussetzungen für die Brauchbarkeit dieser Meßverfahren liegen vor, daß die Anisotropie des FK homogen sein soll und meistens, daß die Dichte gleich  $\rho_v$  bleibt. Im Bereich der Raumtemperatur brauchen bei den meisten FK keine Dämpfungsverluste berücksichtigt zu werden.

Wichtig für die Anwendbarkeit der dynamischen Meßverfahren ist, daß häufig ein Vergleich von FK mit Kristallen möglich ist, da beide - wie schon erwähnt - ausgezeichnete Richtungen der Elastizität aufweisen. Hierbei ist zu bemerken, daß bei der Messung der EK von kristallinen und glasigen Körpern zu statischen Untersuchungen die isothermen und zu dynamischen Untersuchungen die adiabatischen Elastizitätswerte gehören.

Als untersuchenswerte Fälle unterscheiden Schaper/Schittko zunächst drei Fälle, wenn einmal von Mattenverstärkung abgesehen wird:

- a) orthogonal verstärkte Faserlamine mit ungleichem Faservolumengehalt in Richtung der beiden Hauptachsen (hierher gehören auch unidirektional verstärkte Lamine bzw. UD-Körperproben),
- b) orthogonal verstärkte Faserlamine mit gleichem Faservolumengehalt in Richtung der beiden Hauptachsen,
- c) unter beliebigem Winkel gekreuzte Faserverstärkung, wie sie z.B. bei gewickelten Rohren vorliegt.

Im Anschluß hieran, soll der theoretische Hintergrund der Meßverfahren vorgestellt werden.

#### A. Fortschreitende Wellen

Ein Verfahren zur Ermittlung der dynamischen Moduln ist die Anwendung

von polarisiertem Ultraschall. Die Vorgehensweise bei dieser kombinierten Theorie-Versuchs-Ermittlung der EK gestaltet sich wie folgt: In den Gleichgewichtsbeziehungen (4.45) werden nach D'Alembert

$$p_x = p_1 = -\rho_v \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \quad p_2 = -\rho_v \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad , \quad p_3 = -\rho_v \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{bzw.} \quad p_k = -\rho_v \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \quad . \quad (5.85)$$

gesetzt. Als Formänderungsbeziehungen liegen die Glgn. (4.46) vor. Als Elastizitätsmatrix bei rhombischer Anisotropie gilt diejenige von Bild 5.3.

Für das vorliegende DGL-System erhalten wir mit  $x, y, z = 1, 2, 3$  und  $x^i = x_i$  beim kartesischen KOS [Tauchert/Guzelsu] die Glgn. von Beltrami/Michel

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + c_{55} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} &= \rho_v \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ c_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + c_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} &= \rho_v \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ c_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} &= \rho_v \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5.86)$$

worin die Geschwindigkeiten

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

vorkommen und als Dichte in allen Richtungen die Größe  $\rho_v$ .

Wir suchen nun für das DGL-System (5.86) eine Lösung zur Trennung der Veränderlichen, die ebene Schallwellen repräsentiert. (Das Wort eben heißt nur, daß die Wellenflächen eben sind. Es hat nichts mit einem zweidimensionalen Problem zu tun). Die Aufspaltung in zeit- und ortsabhängige Anteile erreichen wir mit Hilfe des Ansatzes für die fortschreitende Welle

$$u_k = U_k e^{\frac{2\pi i}{\lambda} (n_j x_j - ct)} \quad , \quad (5.87)$$

wobei die  $U_k$  die Komponenten der Verschiebungsamplitude sind,  $\lambda$  die Wellenlänge, die  $n_j$  Richtungscosini der Normalen zur Wellenfront und  $c$  die Wellengeschwindigkeit. Nach Einsetzen des Lösungsansatzes in die Gleichgewichtsbedingungen erhalten wir drei Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} - g_v c^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} - g_v c^2 & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} - g_v c^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.88 a)$$

worin die Abkürzungen  $\Gamma_{ij}$  gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= n_1^2 c_{11} + n_2^2 c_{66} + n_3^2 c_{55} & , & \quad \Gamma_{23} = n_2 n_3 (c_{23} + c_{44}) \\ \Gamma_{22} &= n_1^2 c_{66} + n_2^2 c_{22} + n_3^2 c_{44} & , & \quad \Gamma_{13} = n_1 n_3 (c_{13} + c_{55}) \\ \Gamma_{33} &= n_1^2 c_{55} + n_2^2 c_{44} + n_3^2 c_{33} & , & \quad \Gamma_{12} = n_1 n_2 (c_{12} + c_{66}) \end{aligned} \quad (5.88 b)$$

Für eine nichttriviale Lösung muß die Determinante eines homogenen Gleichungssystems verschwinden.

Im Sonderfall, daß die vorliegende ebene Welle in der Schallausbreitungsrichtung  $x_1$  wandert ( $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$ ) gelten

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= c_{11} & , & \quad \Gamma_{22} = c_{66} & , & \quad \Gamma_{33} = c_{55} \\ \Gamma_{23} &= \Gamma_{13} = \Gamma_{12} = 0 \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{vmatrix} c_{11} - g_v c_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{66} - g_v c_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{55} - g_v c_1^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.89)$$

Wir sehen, daß bei dieser Wellenrichtung drei verschiedene Wellen mit zugehörigen Geschwindigkeiten und aufeinander senkrecht stehenden Schwingungsrichtungen

$$c_{1I} = \sqrt{\frac{c_{11}}{g_v}}, \quad c_{1II} = \sqrt{\frac{c_{66}}{g_v}}, \quad c_{1III} = \sqrt{\frac{c_{55}}{g_v}} \quad (5.90)$$

möglich sind. Das Einsetzen dieser Wellengeschwindigkeiten (5.90) in die Glgn. (5.88 a) zeigt, daß die erste Welle longitudinal ist (bei stabförmigen, isotropen Medien  $c_{1I} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ), während die zweite und dritte transversaler Natur sind (s. auch [Schenkel]).

Wenn aber die Einschallung z.B. unter  $45^\circ$  in der  $x_2 - x_3$  Ebene erfolgt ( $n_2 = n_3 = 1/\sqrt{2}, n_1 = 0$ ), so haben wir ~~auch~~ gemischte Wellenformen mit entsprechenden Bewegungen der Teilchen vorliegen. Obwohl die Wellen dann teilweise weder rein longitudinal noch rein transversal verlaufen, so spricht man bei der schnelleren (s. Tab. 5.6) von einer quasi-longitudinalen und bei der langsameren von einer quasitransversalen Welle.

Bei den zu erfolgenden Geschwindigkeits- bzw. Laufzeitmessungen sind

die Transversalwellen wegen des kleineren EK im allgemeinen ohne Bedeutung, weil der zuerst ankommende Schallimpuls von der schneller laufenden Longitudinalwelle gegeben wird.

Für  $c_{11}$  ist der Zusammenhang mit den technischen Elastizitätskonstanten in den Glgn. (5.36) bzw. (5.31) oder (5.35) festgehalten. Bei ebenen Platten müssen die Glgn. (5.39) herangezogen werden. Beim anisotropen Stab ist  $c_{11} = E_{\parallel}$ .

Die Ermittlung der Elastizitätskoeffizienten läuft so ab: Es werden zuerst für eine Einschallrichtung die verschiedenen Geschwindigkeiten gemessen, und anschließend die Elastizitätskoeffizienten gemäß (5.88) berechnet. Analog können für die übrigen sechs Elastizitätskoeffizienten und andere Einschallrichtungen die zugehörigen Meßwerte gefunden werden. Die EK  $c_{11}$ ,  $c_{22}$  und  $c_{33}$  werden mit Hilfe von Wellen in den drei Koordinatenrichtungen 1, 2 und 3 ermittelt.

Die  $c_{44}$ ,  $c_{55}$  und  $c_{66}$  werden aus gemessenen Geschwindigkeiten der Transversalwellen erhalten. Um die  $c_{23}$ ,  $c_{13}$  und  $c_{12}$  zu erhalten, werden in den verschiedenen  $45^{\circ}$  Richtungen jedes KOS quasilongitudinale Wellen ausgesendet und ihre Geschwindigkeit gemessen ([Tauchert/Guzelsu]). Der Zusammenhang mit den technischen Elastizitätskonstanten ist durch Glg. (5.31 b) bzw. (5.38 b) für den flächigen Körper gegeben. Bezüglich der Versuchsdurchführung, der Probenform und des Versuchsaufbaues sei auf [Schaper], [Niederstadt] und [Tauchert/Guzelsu] verwiesen.

Wir sehen aus den obigen Gleichungen, daß zur Berechnung einer technischen Elastizitätskonstante ziemlich alle  $c_{ik}$  - Werte und damit auch die Schallgeschwindigkeiten in mehreren Richtungen bekannt sein müssen. Für orthotrope, flächenhafte Körper ergeben sich Vereinfachungen gegenüber dem räumlichen Körper. Es bleibt noch zu erwähnen, daß aus der Größe des Elastizitätsmoduls - bei gegebenem Laminattyp - ([Schaper], [Niederstadt]) auf den Fasergehalt geschlossen werden kann. Weiter lassen sich Abweichungen der Fasern von der vorgesehenen Orientierung aus dem Polardiagramm der Schallgeschwindigkeiten abmessen. Bild 5.29 zeigt das Polardiagramm für den Elastizitätsmodul  $\hat{E}_1(\omega)$  und den Longitudinalwellenmodul  $\hat{c}_{11}(\omega)$  eines GFK-Laminates.

Wenn die Ultraschallversuche mit hohen Frequenzen von etwa 2 MHz erfolgen, so sind die gemessenen dynamischen Werte ziemlich genau die adiabatischen. Da die zahlenmäßigen Abweichungen bei FK von z.B.  $E_{x \text{ stat}}$  gegenüber  $E_{x \text{ dyn}}$  manchmal nicht vernachlässigbar sind, sollten die Grundelastizitätskonstanten möglichst nicht aus einem Gemisch von statischen

und dynamischen Meßgrößen berechnet werden ([Schaper]).

## B) Stehende Wellen

Die Anwendung der Messung von Eigenfrequenzen schwingender, stabförmiger Proben zur Ermittlung von Elastizitäts- und Schubmodul des verwendeten Werkstoffes, ist ein schon seit langem bekanntes Verfahren [Goens]. Als Lösungsansatz ist gegenüber (5.87)

$$u_k = U_k(x_i) \cdot F(t) \quad (5.85)$$

einzusetzen, wobei die  $U_k$  Eigenfunktionen des betrachteten Kontinuums sind und den zugehörigen Randbedingungen genügen. Da die bisherigen Arbeiten sich im wesentlichen mit den Schwingungen von UD-Stäben bzw. -Balken beschäftigen, soll die Methode auch nur an einem Stab aufgezeigt werden.

Für einen langen UD-Stab, der auf zwei Stützen gelenkig gelagert ist, gilt die Schwingungs-DGL. für Biegung (s. Bild 5.30 u.  $(\dots)' = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $(\dots)'' = \frac{\partial}{\partial t}$ )

$$m \ddot{w}(x, t) + EI w^{IV}(x, t) = 0, \quad (5.86)$$

worin  $m = \rho_v A_v$  die Masse pro laufenden Meter und  $EI$  die Biegesteifigkeit darstellen. Machen wir den Lösungsansatz

$$w = w_0(x) \cdot F(t) = w_0(x) \cdot e^{i\omega t}$$

zur Trennung der Veränderlichen, so verbleibt

$$w_0^{IV}(x) - \frac{m\omega^2}{EI} w_0(x) = 0. \quad (5.87)$$

Das Einsetzen des Ansatzes

$$w_0 = W_0 \cdot \sin \lambda \frac{x}{l} \quad (5.88)$$

erfüllt sowohl die DGL, als auch die Randbedingungen  $EI w_0''(x=0) = EI w_0''(x=l) = 0$  und  $w_0(x=0) = w_0(x=l) = 0$ , wenn

$$\lambda = n\pi, \quad n = 1, 2, 3 \text{ (bis Schub einfluß bedeutend)}$$

ist. Damit sind die Eigenfrequenzen als

$$\frac{\omega}{n\pi} = \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (5.89)$$

festgelegt und es kann der E-Modul, nach Messung der Eigenfrequenzen, bestimmt werden. Auf diese Art lassen sich bei einer langen  $0^0$ -UD-Probe  $E_{II}$  und bei einer  $90^0$ -Probe  $E_I$  ermitteln.

Eine Aussage für die Schubmoduli  $G_{\#}$  oder  $G_{11}$  (Querprobe) erhält man erst durch Berücksichtigung der Rotationsträgheit des Elementes und

der Schubweichheit. Dazu muß der sog. Timoshenko - Balken herangezogen werden ([Timoshenko], [H. Schneider]). In diesem Fall wird dann die Probe kürzere Abmessungen haben, bzw. sind bei einer längeren Probe die entsprechenden Oberfrequenzen zu messen ([Cuntze]). Bei H. Schneider ist das Verfahren zum Auffinden der E- und Schubmoduli angegeben.

In jüngster Zeit sind dem Verfasser einige Arbeiten bekannt geworden, in<sup>denen</sup> Schwingungsmessungen auf die Ermittlung der elastischen Grundkonstanten von FK angewendet wurden. Es sind dies [Abarcar/Cunniff], [Dudek] und [Adams/Bacon].

Abarcar/Cunniff untersuchen einen schmalen UD-Balken unter den Faserorientierungswinkeln  $\alpha = 0,15^\circ$ ,  $30^\circ$  und  $90^\circ$ . Bei den Winkeln  $15^\circ$  und  $30^\circ$  müssen sie, weil Biegung und Torsion gekoppelt sind, die entsprechend aufwendigeren Gleichungen des Biegebalkens unter Torsion zur Bestimmung der Elastizitätswerte heranziehen.

Dudek ermittelte  $E_{\parallel}$ ,  $E_{\perp}$  und  $G_{\parallel}$  bei UD-Proben aus CFK und verglich die Werte mit statischen Versuchsergebnissen. Außerdem studierte er den Einfluß des Verhältnisses Balkenlänge zu Balkenhöhe. Die Übereinstimmung der Werte war für  $E_{\parallel}$  recht gut.

Bei allen dynamischen Versuchen ist der Einfluß der Dämpfung abzuwägen und zu entscheiden, ob er mitgenommen werden muß oder nicht. Adams/Bacon, 1973, zeigen, daß der Schub diejenige vorherrschende Spannung in einem Laminat ist, die für Dämpfung sorgt. CFK und GFK haben nur eine niedrige Dämpfung, die nicht frequenzabhängig ist. Eine Temperaturabhängigkeit wird erst nahe dem Glaspunkt gefunden.

Adams u.a. geben für CFK und GFK die Größen für  $G_{\parallel}$  und  $E_{\parallel}$  nebst zugehöriger Dämpfung als Funktion des Faservolumenanteils an.

In [Adams/Bacon, 1972] wird der Versuch und der Versuchsaufbau für die Messung des E-Moduls und der Dämpfung bei frei - freien Biegeschwingungen eines Timoshenkobalkens beschrieben. Es wurde gefunden, daß für Materialien mit niedriger Dämpfungseigenschaft der Schwingungsversuch nicht an Luft, sondern im Vakuum (kleiner 0,5 Torr) durchgeführt werden muß!

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \tau_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1112} & E_{1113} & E_{1121} & E_{1122} & E_{1123} & E_{1131} & E_{1132} & E_{1133} \\ E_{1211} & E_{1212} & E_{1213} & E_{1221} & E_{1222} & E_{1223} & E_{1231} & E_{1232} & E_{1233} \\ E_{1311} & E_{1312} & E_{1313} & E_{1321} & E_{1322} & E_{1323} & E_{1331} & E_{1332} & E_{1333} \\ E_{2111} & E_{2112} & E_{2113} & E_{2121} & E_{2122} & E_{2123} & E_{2131} & E_{2132} & E_{2133} \\ E_{2211} & E_{2212} & E_{2213} & E_{2221} & E_{2222} & E_{2223} & E_{2231} & E_{2232} & E_{2233} \\ E_{2311} & E_{2312} & E_{2313} & E_{2321} & E_{2322} & E_{2323} & E_{2331} & E_{2332} & E_{2333} \\ E_{3111} & E_{3112} & E_{3113} & E_{3121} & E_{3122} & E_{3123} & E_{3131} & E_{3132} & E_{3133} \\ E_{3211} & E_{3212} & E_{3213} & E_{3221} & E_{3222} & E_{3223} & E_{3231} & E_{3232} & E_{3233} \\ E_{3311} & E_{3312} & E_{3313} & E_{3321} & E_{3322} & E_{3323} & E_{3331} & E_{3332} & E_{3333} \end{bmatrix}$$

$$\tau_{ik} = E_{iklm} \gamma_{lm}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1123} & E_{1113} & E_{1112} \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2223} & E_{2213} & E_{2212} \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & E_{3323} & E_{3313} & E_{3312} \\ & & & E_{2323} & E_{2313} & E_{2312} \\ & & & & E_{1313} & E_{1312} \\ & & & & & E_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

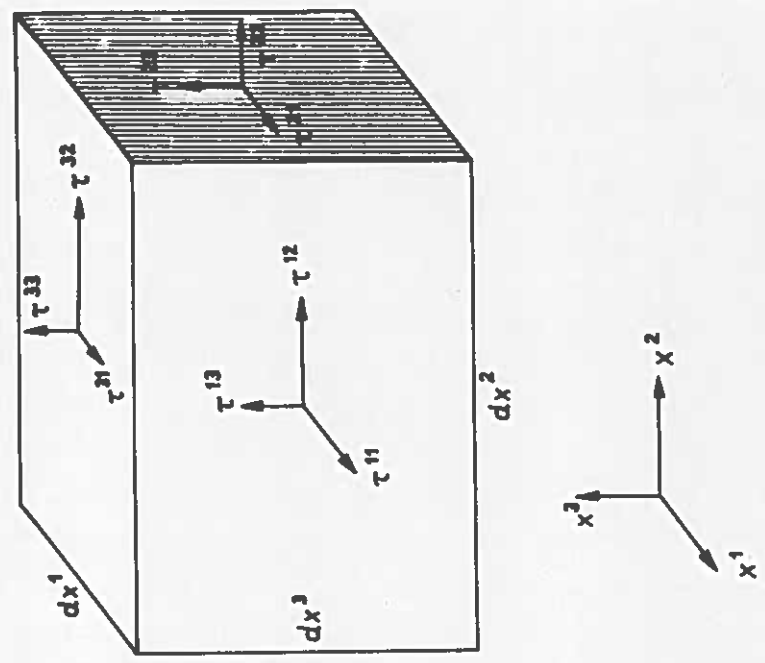


Bild 5.1: Spannungen am Elementquader

(Die Spannungen sind definiert als die durch die zugehörigen Schnittflächen geteilter Schnittgrößen eines aus einem Körper herausgeschnittenen Quaders)

Bild 5.2: Allgemeine Spannungs-Dehnungs-Beziehungen vor und nach Einführung der Reduktionen (tensorielle Form)



$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{22}$	$C_{33}$
$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{22}$	$C_{33}$
$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$
$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$
$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$
$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$
$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$
$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$
$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$
$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$
$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$
$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$
$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$
$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$
$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$
$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$
$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$
$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$
$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$
$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$
$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$
$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$
$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$
$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$
$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$
$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$
$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$
$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$
$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$
$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$
$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$
$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$
$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$
$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$
$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$
$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$
$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$
$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$
$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{11}$
$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{21}$	$C_{31}$	$C_{12}$
$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{31}$	$C_{12}$	$C_{13}$
$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$
$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{32}$

**TRIKLINE ANISOTROPIE**

$N = 21$  (16)  
 num. verschieden  
 voneinander unabhängig

symm.

**MONOKLINE ANISOTROPIE**

$N = 13$  (13)

symm.

**RHOMBISCHE ANISOTROPIE**  
 ≙ ORTHOTROPIE

$N = 9$  (9)

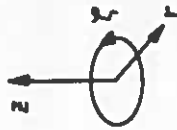
symm.

Elastische Symmetrien

Kartes. KOS



Zyl. KOS

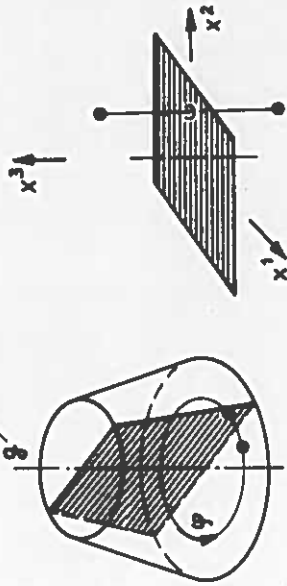


Allgemeinster Fall:  
 Beliebiges KOS. Noch kein  
 Hauptachsensystem!

Einige Beispiele sind gut mit den Jahresringen von verklebtem oder geschichtetem Holz darstellbar.

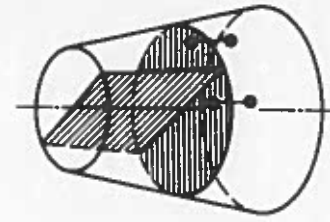
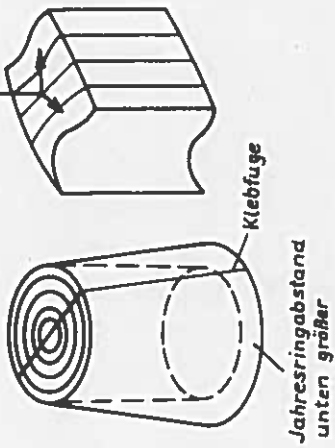
Kristallhauptachsen vorhanden!

Achse der elastischen Symmetrie



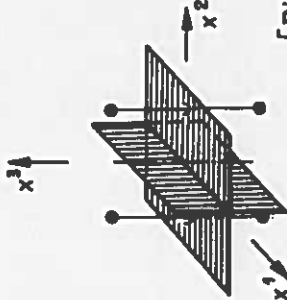
$n_3 = 2, (\zeta_3 = \pi)$

1 Ebene



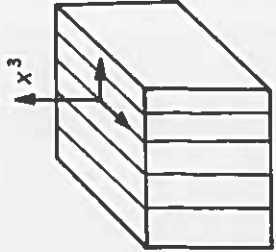
$n_2 = n_3 = 2$

2 Ebenen



aber auch  
 $n_1 = n_2 = n_3 = 2$

3 Ebenen



[DIETZ]

TETRAGONALE ANISOTROPIE

2. Abt.

$$\begin{matrix}
 C_{11}^{11} & C_{22}^{11} & C_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{11}^{11} & C_{11}^{11} & C_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{33}^{11} & C_{33}^{11} & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & C_{23}^{23} & \sigma & \sigma \\
 & & & C_{23}^{23} & \sigma & \sigma \\
 & & & & C_{12}^{12} & \sigma
 \end{matrix}$$

$N = 7 (6)$

symm.

$C_{12}^{12}$

HEXAGONALE ANISOTROPIE

TRANSVERSALE ISOTROPIE

$$\begin{matrix}
 C_{11}^{11} & C_{22}^{11} & C_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{11}^{11} & C_{11}^{11} & C_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{33}^{11} & C_{33}^{11} & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & C_{23}^{23} & \sigma & \sigma \\
 & & & C_{23}^{23} & \sigma & \sigma \\
 & & & & C_{12}^{12} & \sigma
 \end{matrix}$$

$N = 6 (5)$

symm.

$\frac{1}{2}(C_{11}^{11} - C_{22}^{11})$

ISOTROPIE

$$\begin{matrix}
 C_{11}^{11} & C_{22}^{11} & C_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{11}^{11} & C_{11}^{11} & C_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{33}^{11} & C_{33}^{11} & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & C_{12}^{12} & \sigma & \sigma \\
 & & & C_{12}^{12} & \sigma & \sigma \\
 & & & & C_{12}^{12} & \sigma
 \end{matrix}$$

$N = 3 (2)$

symm.

$\frac{1}{2}(C_{11}^{11} - C_{22}^{11})$

$\frac{1}{2}(C_{11}^{11} - C_{22}^{11})$

$\frac{1}{2}(C_{11}^{11} - C_{22}^{11})$

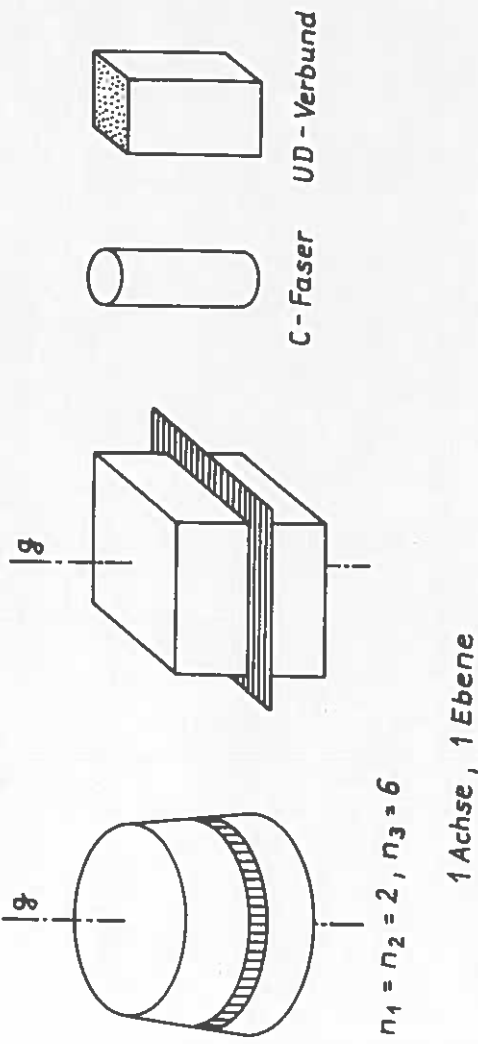
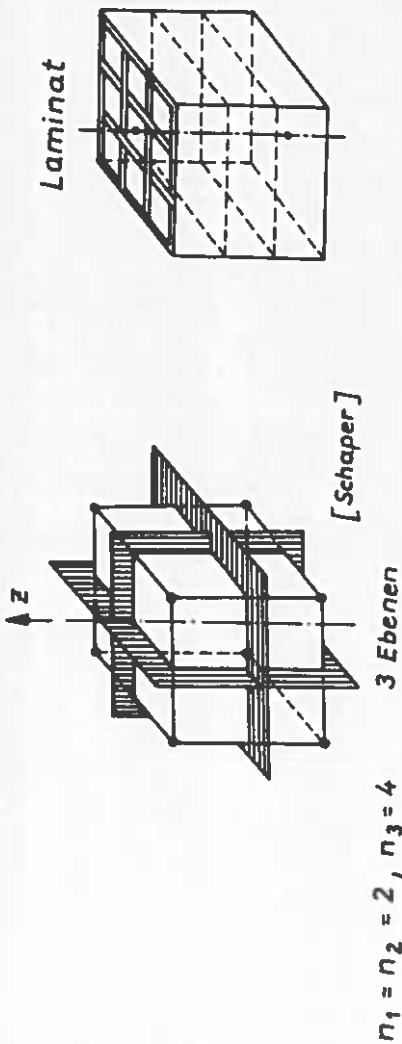


Bild 5.3 Elastizitätsmatrizen mit anschaulicher Deutung (Tensorielle Form)

$$\pi_i = \frac{1}{2} c_{uv}^{ij} e_{ij} e^{uv}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} c_{11}^{11} e_{11} e^{11} + c_{22}^{11} e_{11} e^{22} + c_{33}^{11} e_{11} e^{33} + c_{23}^{11} e_{11} e^{23} + c_{13}^{11} e_{11} e^{13} + c_{12}^{11} e_{11} e^{12} \\
 &+ \frac{1}{2} c_{22}^{22} e_{22} e^{22} + c_{33}^{22} e_{22} e^{33} + c_{23}^{22} e_{22} e^{23} + c_{13}^{22} e_{22} e^{13} + c_{12}^{22} e_{22} e^{12} \\
 &+ \frac{1}{2} c_{33}^{33} e_{33} e^{33} + c_{23}^{33} e_{33} e^{23} + c_{13}^{33} e_{33} e^{13} + c_{12}^{33} e_{33} e^{12} \\
 &+ \frac{1}{2} c_{23}^{23} e_{23} e^{23} + c_{13}^{23} e_{23} e^{13} + c_{12}^{23} e_{23} e^{12} \\
 &+ \frac{1}{2} c_{13}^{13} e_{13} e^{13} + c_{12}^{13} e_{13} e^{12} \\
 &+ \frac{1}{2} c_{12}^{12} e_{12} e^{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} c_{st}^{uv} \tilde{e}_{uv} \tilde{e}^{st} = \frac{1}{2} c_{st}^{uv} a_u^l a_v^m e_{lm} \tilde{a}_0^s \tilde{a}_p^t e^{op} \quad (\tilde{a}_k^i = \tilde{a}_k^i = \delta_k^i = 0 \text{ für } i \neq k, \text{ d.b. nur für Spiegelung}) \\
 &= \frac{1}{2} c_{11}^{11} \delta_1^1 \delta_1^1 e_{11} \delta_1^1 \delta_1^1 e^{11} + c_{22}^{11} \delta_1^1 \delta_1^1 e_{11} \delta_2^2 \delta_2^2 e^{22} + c_{33}^{11} \delta_1^1 \delta_1^1 e_{11} \delta_3^3 \delta_3^3 e^{33} + c_{23}^{11} \delta_1^1 \delta_1^1 e_{11} \delta_2^2 \delta_3^3 e^{23} + c_{13}^{11} \delta_1^1 \delta_1^1 e_{11} \delta_1^1 \delta_3^3 e^{13} + c_{12}^{11} \delta_1^1 \delta_1^1 e_{11} \delta_1^1 \delta_2^2 e^{12} \\
 &+ \frac{1}{2} c_{22}^{22} \delta_2^2 \delta_2^2 e_{22} \delta_2^2 \delta_2^2 e^{22} + c_{33}^{22} \delta_2^2 \delta_2^2 e_{22} \delta_3^3 \delta_3^3 e^{33} + c_{23}^{22} \delta_2^2 \delta_2^2 e_{22} \delta_2^2 \delta_3^3 e^{23} + c_{13}^{22} \delta_2^2 \delta_2^2 e_{22} \delta_1^1 \delta_3^3 e^{13} + c_{12}^{22} \delta_2^2 \delta_2^2 e_{22} \delta_1^1 \delta_2^2 e^{12} \\
 &+ \frac{1}{2} c_{33}^{33} \delta_3^3 \delta_3^3 e_{33} \delta_3^3 \delta_3^3 e^{33} + c_{23}^{33} \delta_3^3 \delta_3^3 e_{33} \delta_2^2 \delta_3^3 e^{23} + c_{13}^{33} \delta_3^3 \delta_3^3 e_{33} \delta_1^1 \delta_3^3 e^{13} + c_{12}^{33} \delta_3^3 \delta_3^3 e_{33} \delta_1^1 \delta_2^2 e^{12} \\
 &+ \frac{1}{2} c_{23}^{23} \delta_2^2 \delta_3^3 e_{23} \delta_2^2 \delta_3^3 e^{23} + c_{13}^{23} \delta_2^2 \delta_3^3 e_{23} \delta_1^1 \delta_3^3 e^{13} + c_{12}^{23} \delta_2^2 \delta_3^3 e_{23} \delta_1^1 \delta_2^2 e^{12} \\
 &+ \frac{1}{2} c_{13}^{13} \delta_1^1 \delta_3^3 e_{13} \delta_1^1 \delta_3^3 e^{13} + c_{12}^{13} \delta_1^1 \delta_3^3 e_{13} \delta_1^1 \delta_2^2 e^{12} \\
 &+ \frac{1}{2} c_{12}^{12} \delta_1^1 \delta_2^2 e_{12} \delta_1^1 \delta_2^2 e^{12}
 \end{aligned}$$

Bild 5.4 Zusammenstellung der Glieder des elastischen Potentials im kartesischen Ausgangs - KOS und im KOS der elastischen Symmetrieebene



$$U^{(1)} = \begin{pmatrix} C^+ & -4c^+s & 2c^+s^2 & 4c^+s^3 & -4c^+s^4 & s^5 \\ C^+s & C^+ & -C^+s + Cs^3 & -2C^+s^2 + 3C^+s^4 & -Cs^3 & -Cs^5 \\ C^+s^2 & -2Cs^3 & C^+s & -4c^+s^2 & -2C^+s + 2Cs^3 & C^+s^5 \\ C^+s^3 & -2Cs^3 & -2C^+s^2 & C^+s^3 - 2C^+s^4 & -2C^+s^2 + 2Cs^3 & C^+s^5 \\ Cs^3 & -s^5 & 3c^+s^2 - Cs^3 & -Cs^3 - 2C^+s^2 - 3c^+s^4 & -Cs^5 & -Cs^5 \\ s^4 & 4Cs^3 & 2c^+s^2 & 4c^+s^3 & 4c^+s^4 & C^+ \end{pmatrix}, \quad r^{(1)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{11} \\ C_{11}^{12} \\ C_{11}^{13} \\ C_{11}^{14} \\ C_{11}^{15} \\ C_{11}^{16} \end{pmatrix}$$

$$U^{(2)} = \begin{pmatrix} C^+ & -C^+s & -2c^+s & 2Cs^3 & Cs^4 & -s^5 \\ C^+s & C^+ & -2Cs^2 & -2c^+s & s^4 & Cs^5 \\ C^+s^2 & -Cs^3 & C^+ & -C^+s + s^3 & -C^+s & Cs^5 \\ Cs^3 & C^+s & -s^5 & -Cs^3 & -Cs^4 & -C^+s \\ Cs^4 & -s^5 & 2c^+s & -2Cs^2 & C^+ & -C^+s \\ s^4 & Cs^3 & 2Cs^3 & 2c^+s & Cs^4 & C^+ \end{pmatrix}, \quad r^{(2)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{21} \\ C_{11}^{22} \\ C_{11}^{23} \\ C_{11}^{24} \\ C_{11}^{25} \\ C_{11}^{26} \end{pmatrix}$$

$$U^{(3)} = \begin{pmatrix} C^+ & -2Cs & s^4 \\ Cs & C^+s^2 & -Cs \\ s^4 & 2Cs & C^+ \end{pmatrix}, \quad r^{(3)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{31} \\ C_{11}^{32} \\ C_{11}^{33} \end{pmatrix}$$

$$U^{(4)} = \begin{pmatrix} C^+ & -2Cs & s^4 \\ Cs & C^+s^2 & -Cs \\ s^4 & 2Cs & C^+ \end{pmatrix}, \quad r^{(4)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{41} \\ C_{11}^{42} \\ C_{11}^{43} \end{pmatrix}$$

$$U^{(5)} = \begin{pmatrix} C & -s \\ s & C \end{pmatrix}, \quad r^{(5)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{51} \\ C_{11}^{52} \end{pmatrix}$$

$$U^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad r^{(6)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{61} \end{pmatrix}$$

Schema der (Spalten-) Vektoren  $\alpha_i$

Symmetrische

Elast.-Koeff. $\alpha_{kl}^{ij}$	2-stufig $\gamma_2 = \frac{2}{r}$						3-stufig $\gamma_3 = \frac{2}{r^2}$						4-stufig $\gamma_4 = \frac{2}{r^3}$						6-stufig $\gamma_6 = \frac{2}{r^5}$														
	Mr.	1	2	3	4	5	Mr.	1	2	3	4	5	Mr.	1	2	3	4	5	Mr.	1	2	3	4	5	Mr.	1	2	3	4	5			
11 11	1	1					1	1				1	1					1	1				1	1									
11 22	2		1				2		1			2		1				2		1			2		1								
11 23	3			1			3			1		3			1			3			1		3			1							
12 12	4				1		4				1	4				1		4				4			1								
12 23	5					1	5					5						5				5				1							
22 22	6						6					6						6				6				4	1						
11 13							5					1																					
11 23							6					1																					
12 13							7					1																					
12 23							8					-1																					
22 13							9					-1																					
22 23							10					-1																					
11 11	Mr.	7	8	9	10	11	12	13	Mr.	4	5	6	7	Mr.	1	2	3	4	5	6	7	Mr.	1	2	3	4	5	Mr.	1	2	3	4	5
11 22	7	1							11	2				7	1										5	1							
12 23	8		1						12		1			8		1									6	1							
22 23	9			1					13			1		9			1								7	1							
13 13	10				1				14					10				1							8	1							
13 23	11					1			15					11											9	1							
23 23	12						1																										
13 33																																	
23 33																																	
33 33	13								1	15				1											9	1							

$$r^{(k)} = \sum_{q=1}^k \lambda_q \alpha_q^{(k)}$$

Tabelle 5.1

Lösungsschema zur Auffindung der Besetzung von Elastizitätsmatrizen elastischer Körper, in denen elastische Symmetrien vorkommen (aus [Heimeshoff, 1969])

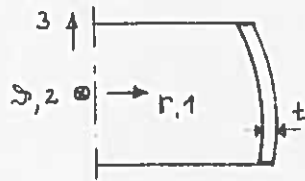
	Type 1	Type 2
Elastische Grundkonstanten der Fasern		
$E_3 = E_F^*$	$38,5 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$	$23,2 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$
$E_1 = E_2 = E_{1,F}$	$2,8 \cdot 10^4 \text{ "}$	$2,8 \cdot 10^4 \text{ "}$
$G_{23} = G_{13}$	$2,67 \cdot 10^4 \text{ "}$	$2,67 \cdot 10^4 \text{ "}$
$\nu_{13}$	$0,5 (0,53)$	$0,5 (0,45)$
$\nu_{12}$	$0,28 (0,35)$	$0,28 (0,35)$
$G_{12}$	$0,57 (s_{11} - s_{12})$	-- -- --
Nachgiebigkeitskoeffizienten (in $10^6 \frac{\text{mm}^2}{\text{N}}$ )		
$s_{33}^*$	$2,6 (2,5)$	$4,7 (4,3)$
$s_{22} = s_{11}$	$36,3 (116)$	$36 (64)$
$s_{55} = s_{44}^*$	$38,3 (73)$	$38 (42)$
$s_{12}$	$-10,2 (-62)$	$-10,2 (-30)$
$s_{13}$	$-1,3 (0,86)$	$-2,4 (-1,5)$
$s_{66}$	$-(357)$	$-(182)$



\* Gemessene Werte

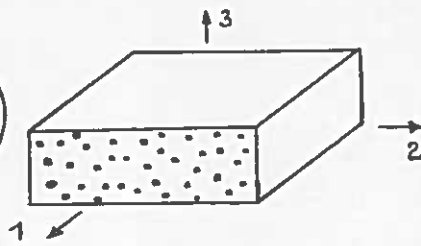
Tabelle 5.2 Gemessene und theoretisch gewonnene Elastizitätsgrößen von zwei Kohlenstofffasern. Beispiel eines transversal isotropen Körpers. (aus [Goggin], in Klammern aus [Dean/Turner]).

1



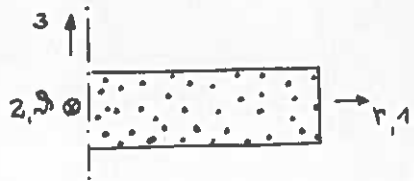
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ 0 \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & y \\ & x & x \\ & & y \\ & & & x \\ & & & & x \\ & & & & & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2



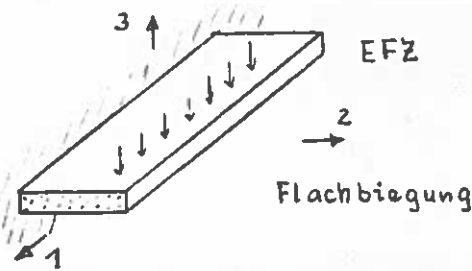
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ & x & x \\ & & x \\ & & & x \\ & & & & x \\ & & & & & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

3



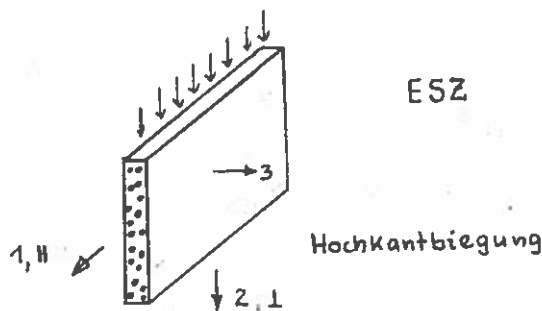
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ 0 \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ & x & x \\ & & x \\ & & & x \\ & & & & x \\ & & & & & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

4



$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \tau_{23} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ & x & x \\ & & x \\ & & & x \\ & & & & x \\ & & & & & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

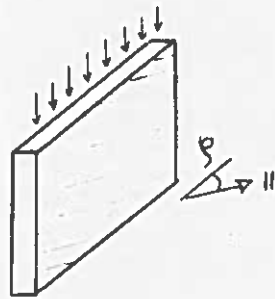
5



$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ & x & x \\ & & x \\ & & & x \\ & & & & x \\ & & & & & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\{\epsilon\} = [S] \{\sigma\}$$

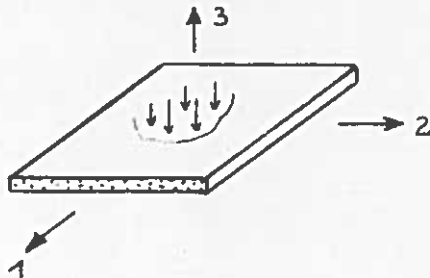
6



ESZ

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times \\ & & & & & \times \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

7

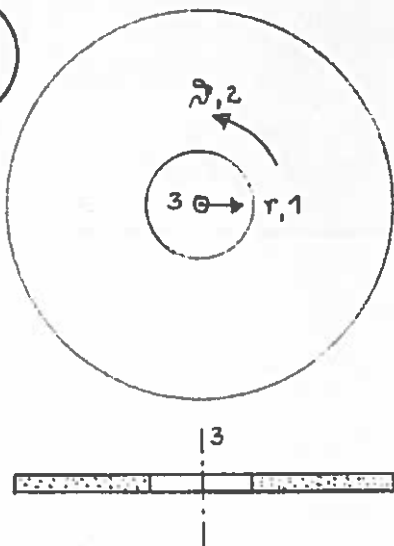


ESZ

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & * & | & | & | \\ & \times & \times & | & | & | \\ - & - & \times & | & | & | \\ - & - & & \times & | & | \\ - & - & & & * & | \\ - & - & & & & \times \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

$\tau_{23}$  und  $\tau_{13}$  nur im  $\sigma$ - $\epsilon$ -Gesetz Null gesetzt, aber nicht beim Gleichgewicht.

8



$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & * & | & | & | \\ \times & \times & \times & | & | & | \\ \times & \times & \times & | & | & | \\ - & - & & * & | & | \\ & & & & \times & | \\ - & - & & & & * \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{13} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

In Umfangsrichtung gewickelte Scheibe. Gln (5.35).  $1,3 \equiv \perp$ ,  $2 \equiv \parallel$ .

Bild 5.6 Elastizitätsgesetze verschiedener Schichtkörper



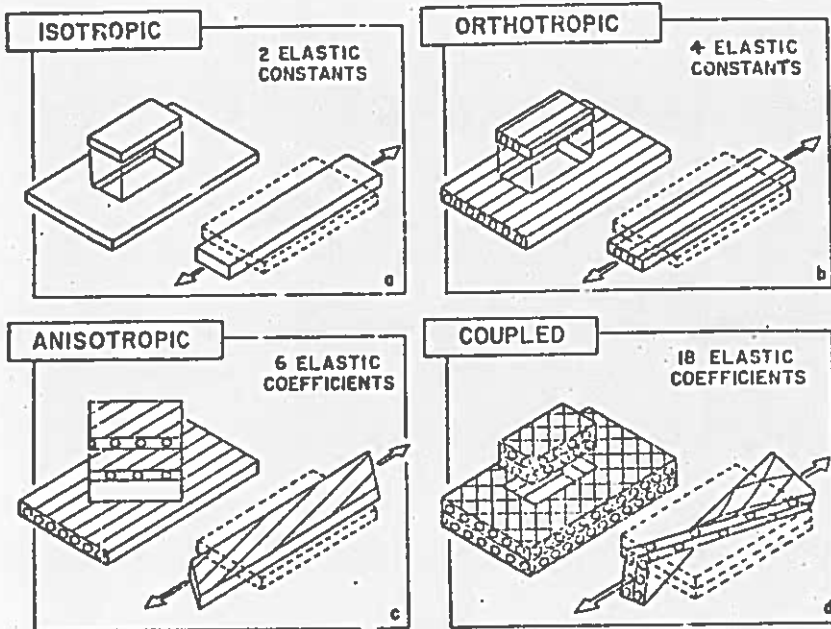


Bild 5.8  
Verformungen einer UD-Schicht bei verschiedenen elastischen Eigenschaften [Halpin u.a., S. 38]

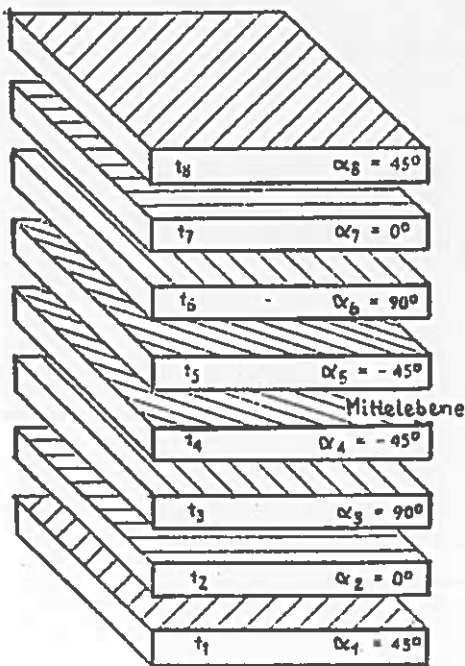


Bild 5.7  
Beispiel für symmetrischen Aufbau eines Laminates

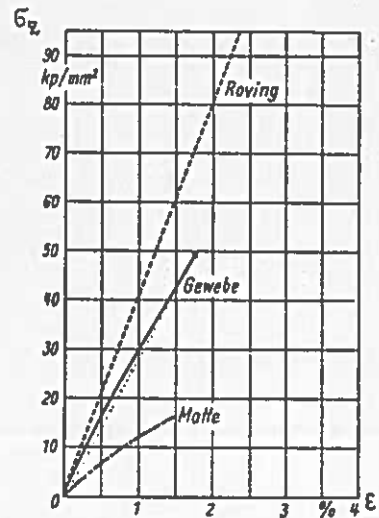


Bild 5.9  
GFK Spannungs-Dehnungs-Verlauf [Haferkamp]

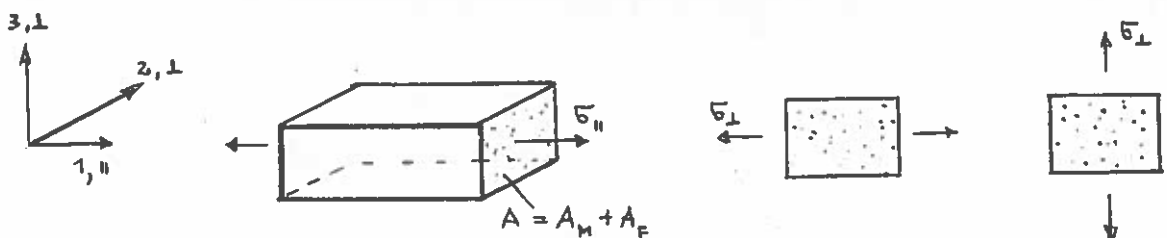


Bild 5.10 Der unidirektionale Faserverbundkörper

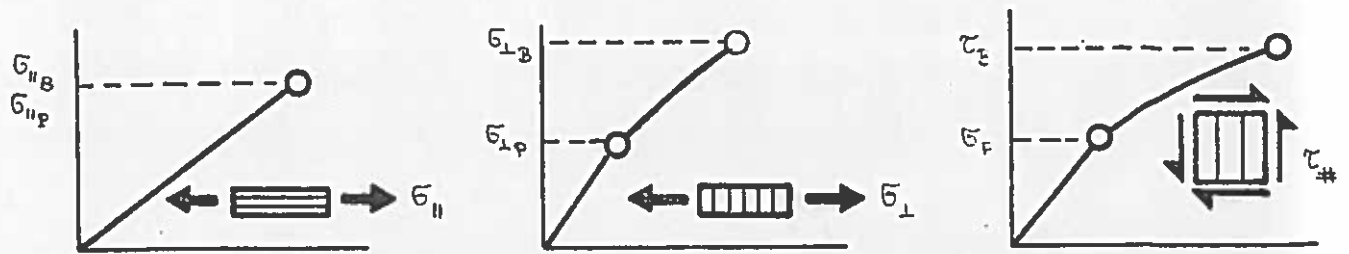


Bild 5.11 Formale Darstellung der Spannungs-Dehnungs-Verläufe der UD-Schichtspannungen

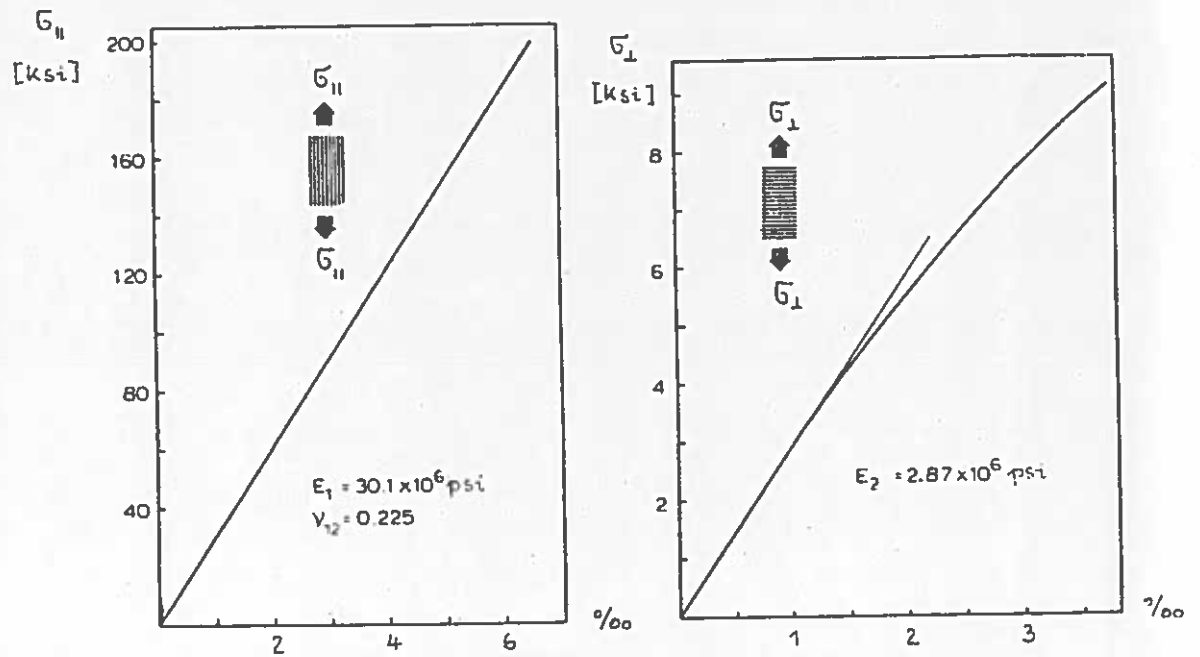
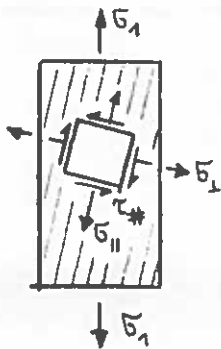
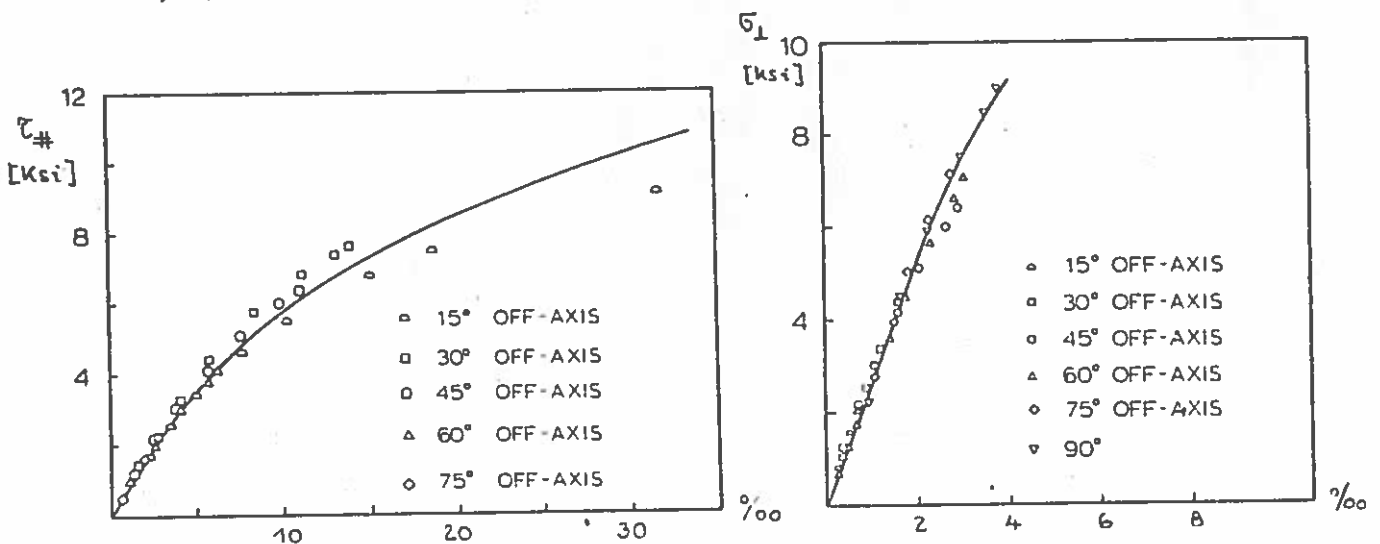


Bild 5.12 Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für Bor/Epoxidharz, Narmco 5505 [Hahn/Tsai]



$$1 \text{ ksi} = 6,93 \text{ N/mm}^2 = 1000 \text{ psi}$$



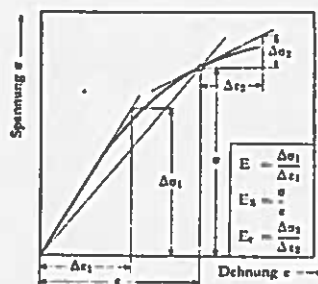


Bild 5.13 Zur Definition von Elastizitätsmodul  $E$ , Sekantenmodul  $E_s$  und Tangentenmodul  $E_t$  [Puck/Wurtinger<sup>8</sup>]

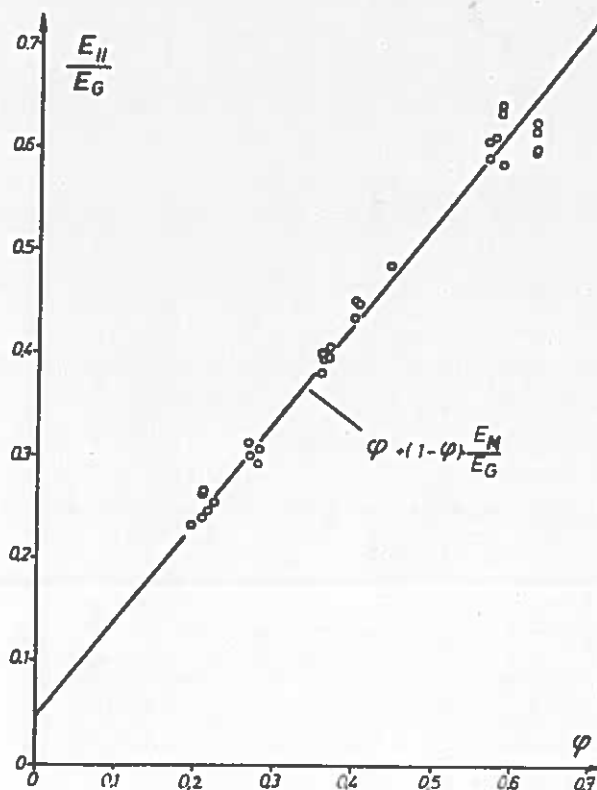


Bild 5.14 Meßwerte und theoretischer Verlauf für den E-Modul  $E_{II}$  bei Längsbelastung in Abhängigkeit vom Faservolumenanteil  $\varphi$  (GFK). [Puck, Diss.]

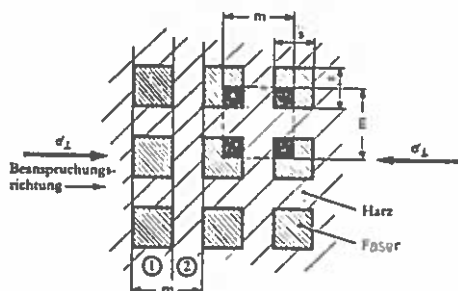


Bild 5.15 Idealisieretes Ersatzbild für in eine Matrix eingebettete Fasern (Federschaltung) [Puck/Wurtinger]

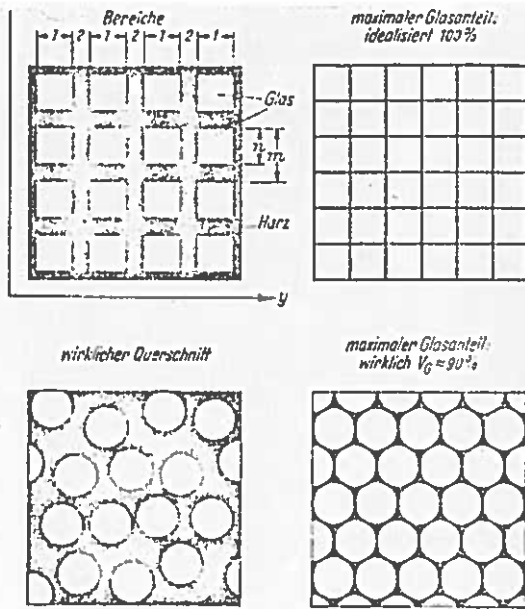


Bild 5.16

Idealisierte Faserpackung in einem Faserkunststoff [Wiedemann, S. 78]

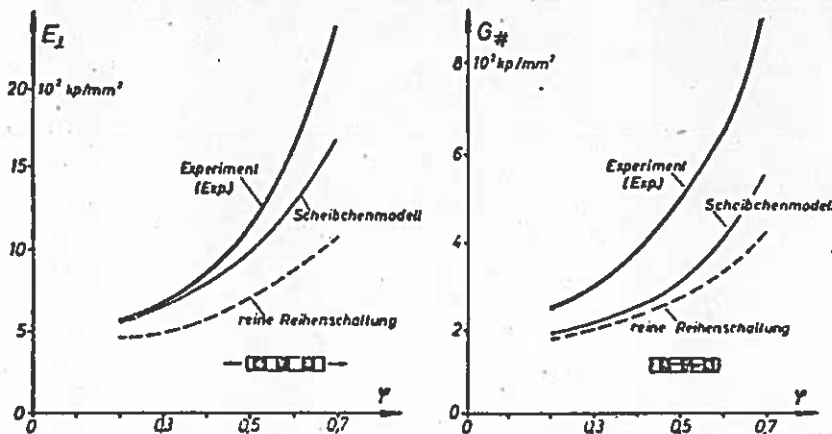


Bild 5.17

Vergleich zwischen Theorie und Experiment bei  $E_L$  und  $G_{\#}$  in Abhängigkeit vom Faservolumenanteil  $\varphi$  (Diss. Puck)

Theorie: 
$$E_L = E_{0M} \frac{1 + 0,85 \varphi^2}{(1 - \varphi)^{1,25} + \varphi E_{0M}/E_G}$$

$$G_{\#} = G_M \frac{1 + 0,85 \sqrt{\varphi}}{(1 - \varphi)^{1,25} + \varphi G_M/G_G}$$

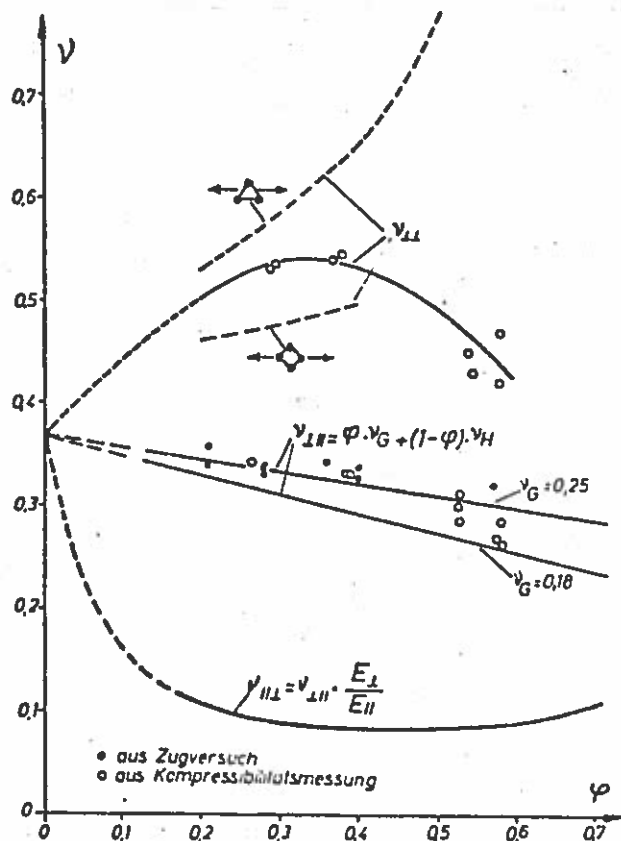
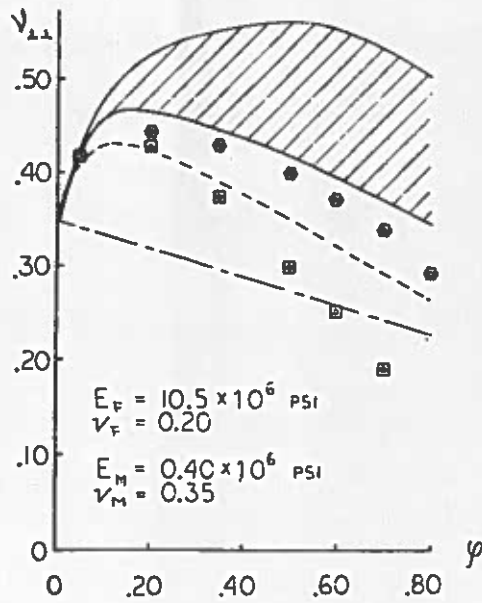


Bild 5.18

Vergleich zwischen Theorie und Experiment bei den Querkontraktionszahlen  $\nu_{LH}$  und  $\nu_{LL}$  in Abhängigkeit vom Faservolumenanteil  $\varphi$ . GFK. (aus Diss. Puck.  $\Delta, \square$  = Packungsarten)



— Whitney / Riley  
 - - - Foye, 1972  
 □ Hashin / Rosen, 1964

Bild 5.19

Vergleich verschiedener, theoretisch ermittelter Querkontraktionszahlen  $\nu_{\perp\perp}$  mit Versuchswerten, CFK.  
 (nach [Foye, 1972])

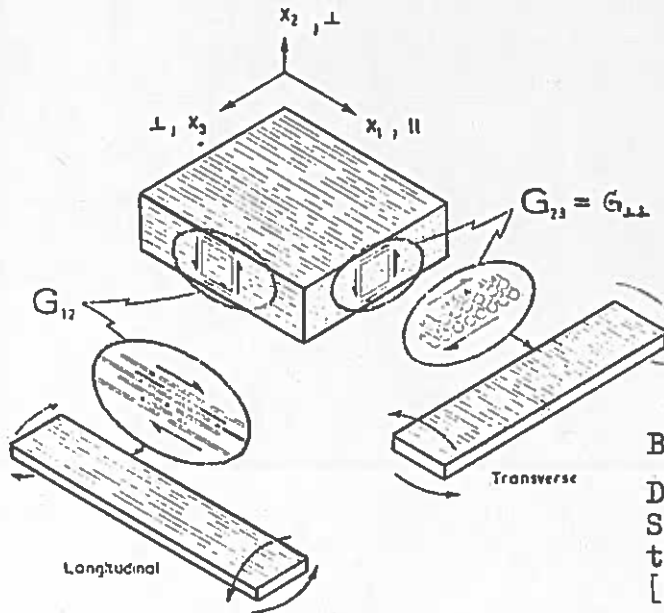


Bild 5.20

Darstellung der Wirkebenen der Schubmoduli in einem unidirektionalen Verbundkörper [Cawthorne/Harris]

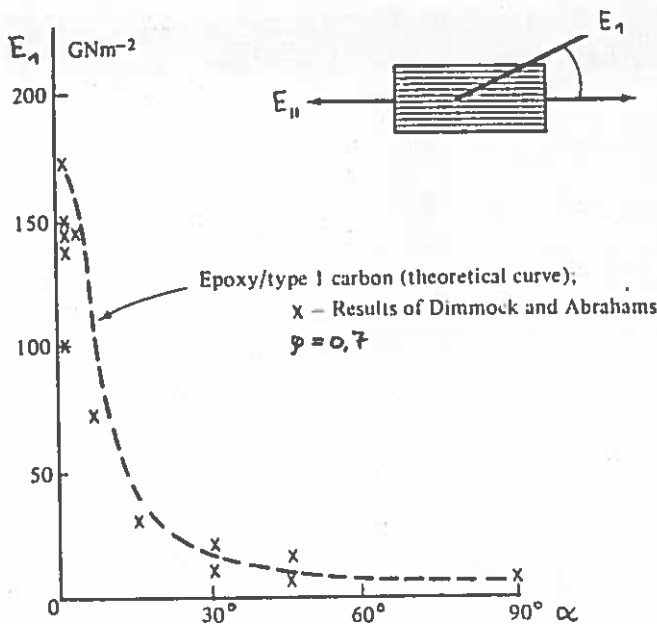


Bild 5.22

Vergleich der theoretischen Kurve des E-Moduls  $E_1$  mit gemessenen Werten in Abhängigkeit vom Faserorientierungswinkel [Dimmock/Abrahams]

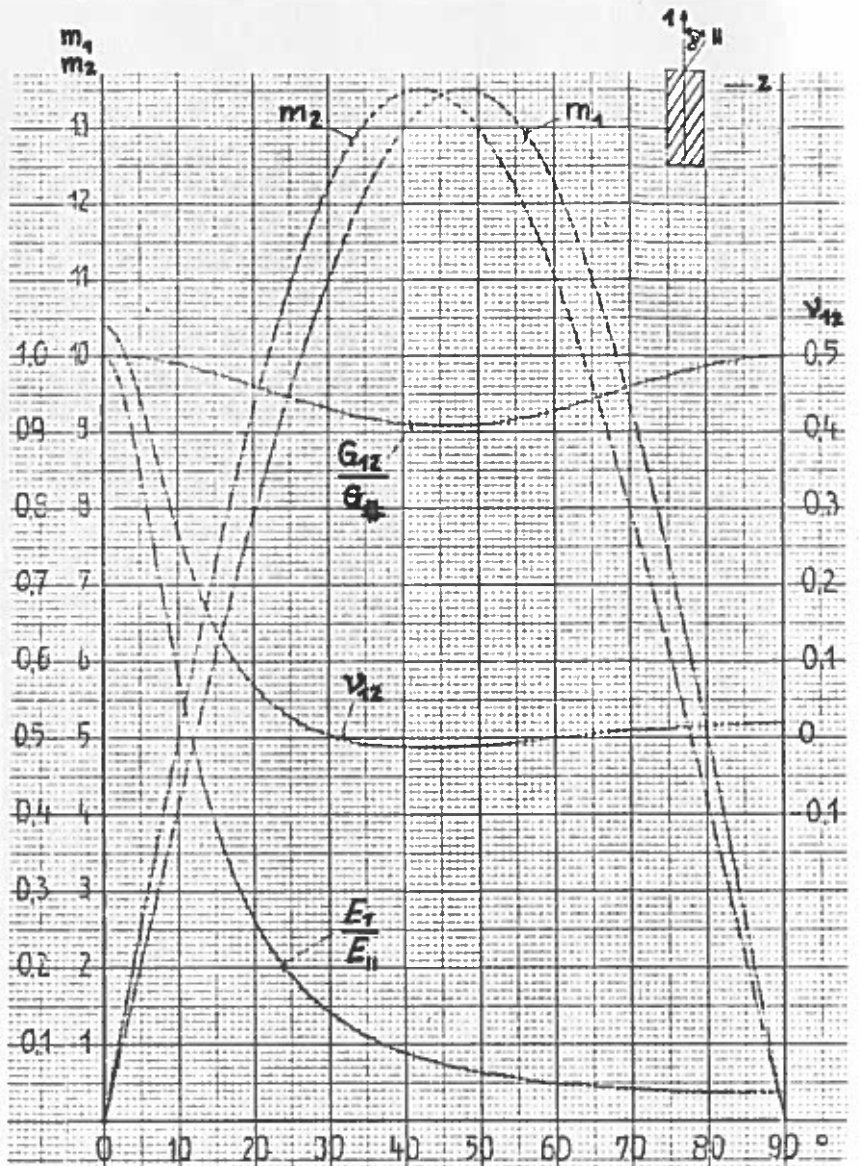
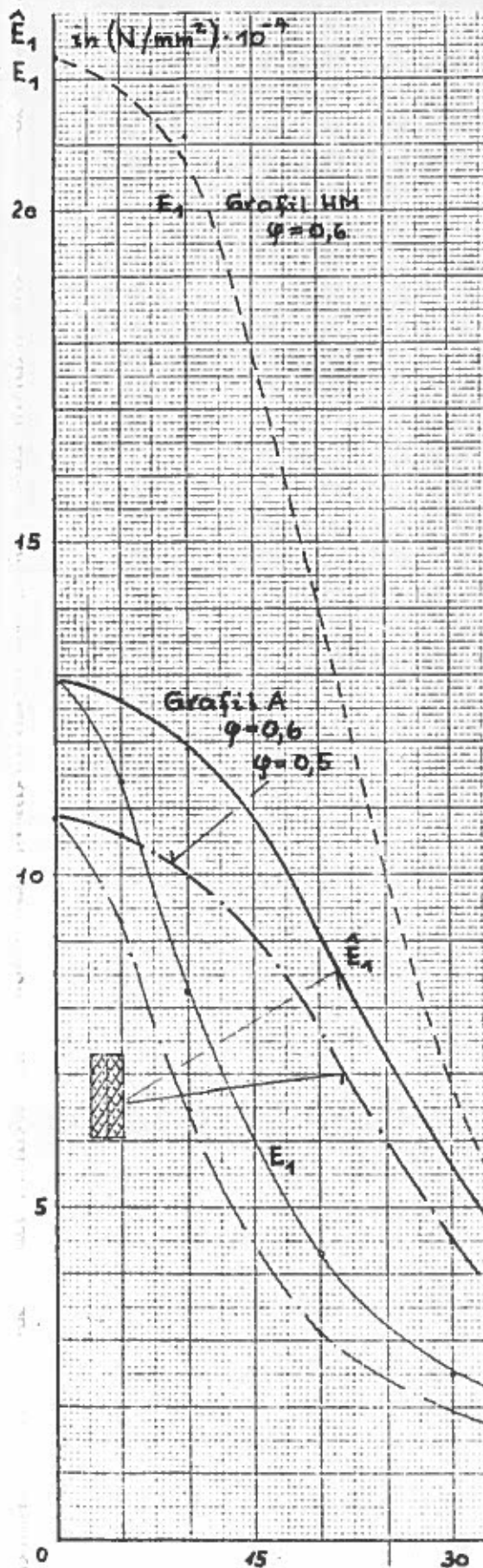


Bild 5.21

Technische Elastizitätsgrößen des UDV  
 in Abhängigkeit vom Faserorientierungs-  
 winkel  $\alpha$   
 $(E_{11} = 14,3 \cdot 10^4 N/mm^2, E_2 = 0,514 \cdot$   
 $10^4 N/mm^2, G_{\#} = 0,528 \cdot 10^4 N/mm^2, \nu_{11}$   
 $= 0,539; \text{Zahlenbeispiel aus [Dietz]})$

Bild 5.23 Technische Elastizitätsgrößen  $\hat{E}_1$  von AWF in Abhängigkeit vom Faserorientierungswinkel  $\alpha$

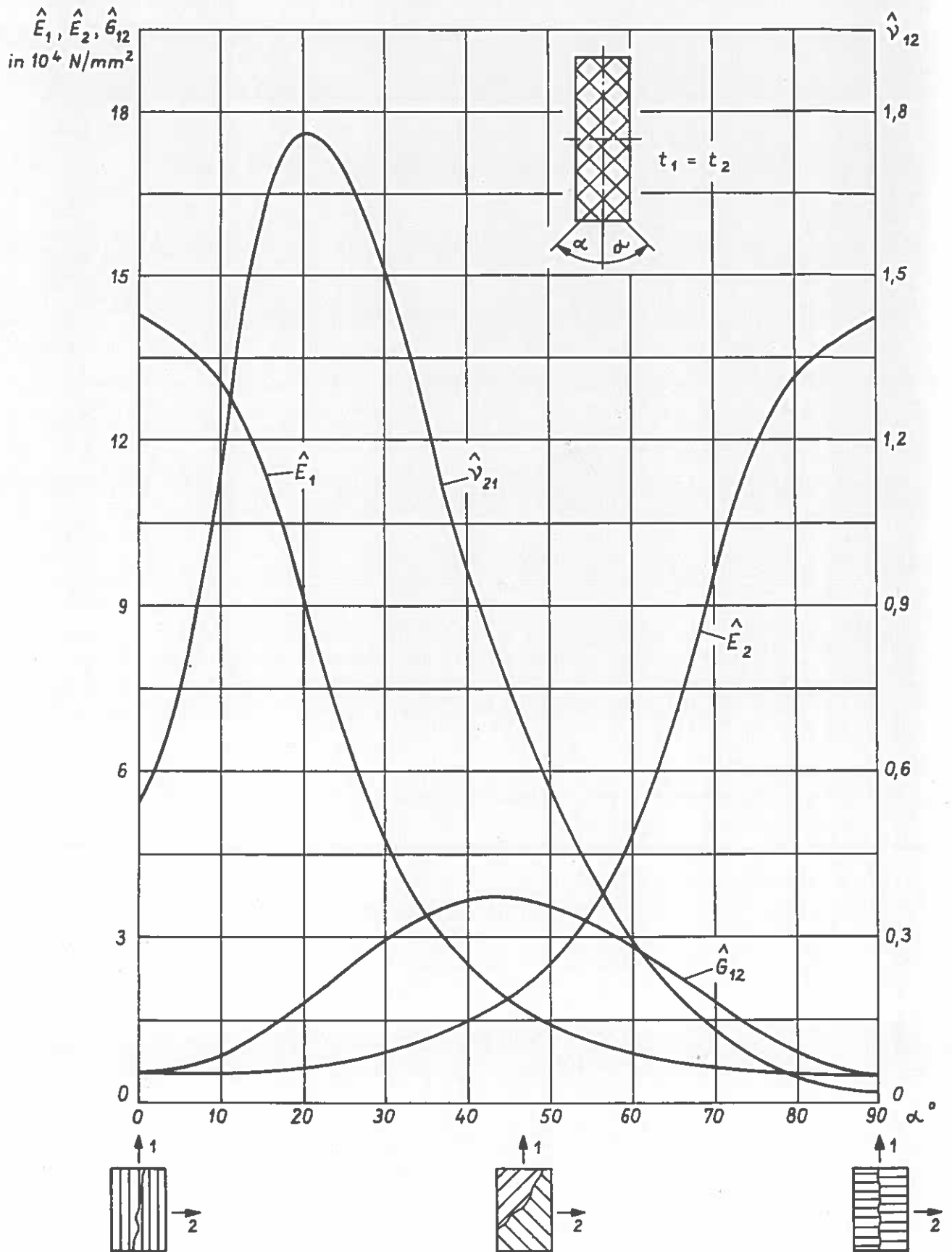


Bild 5.24 Elastizitätsgrößen eines ausgeglichenen Winkelverbunds in Abhängigkeit vom Faserorientierungswinkel  $\alpha$

$$\begin{aligned}
 (E_{\parallel} &= 14,3 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2; E_{\perp} = 0,514 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2; \\
 G_{\#} &= 0,528 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2; \nu_{\perp\parallel} = 0,539)
 \end{aligned}$$

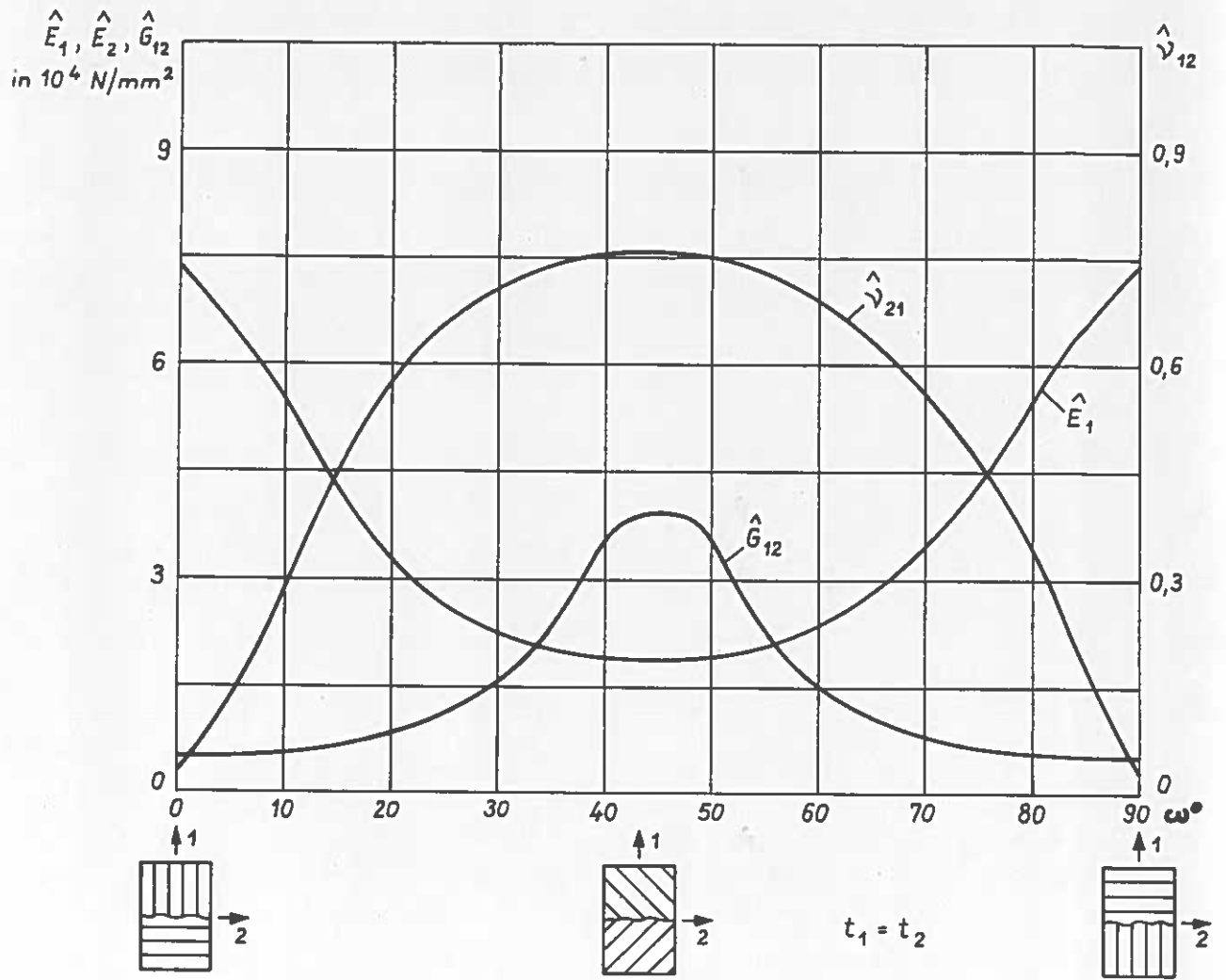








Bild 5.25 Elastizitätsgrößen eines Kreuzverbundes



Herstellende Struktur	UD - Rohr			Strangzugprobe	Flachzugproben		
zu messende Größe							
$\sigma_{  zB}$ ( $\sigma_{  dB}$ )		x		x	x		
$\sigma_{\perp zB}$ ( $\sigma_{\perp dB}$ )			x			x	
$\tau_{*B}$			x				
$\epsilon_{  zB}$ ( $\epsilon_{  dB}$ )				x	x		
$\epsilon_{\perp zB}$			x			x	
$\epsilon_{\perp dB}$			$\approx$ x				
$\delta_{*B}$			$\approx$ x				
$E_{  z}$					x		x
$E_{  d}$							
$E_{\perp z}$			x			x	x
$E_{\perp d}$			x				
$G_{*}$	x		x				x
$\nu_{\perp  }$					x		
$\rho$							
$\varphi$							

**Tabelle 5.3** Ermittlung von Grundgrößen unidirektionaler Verbunde mittels relativ einfacher Proben

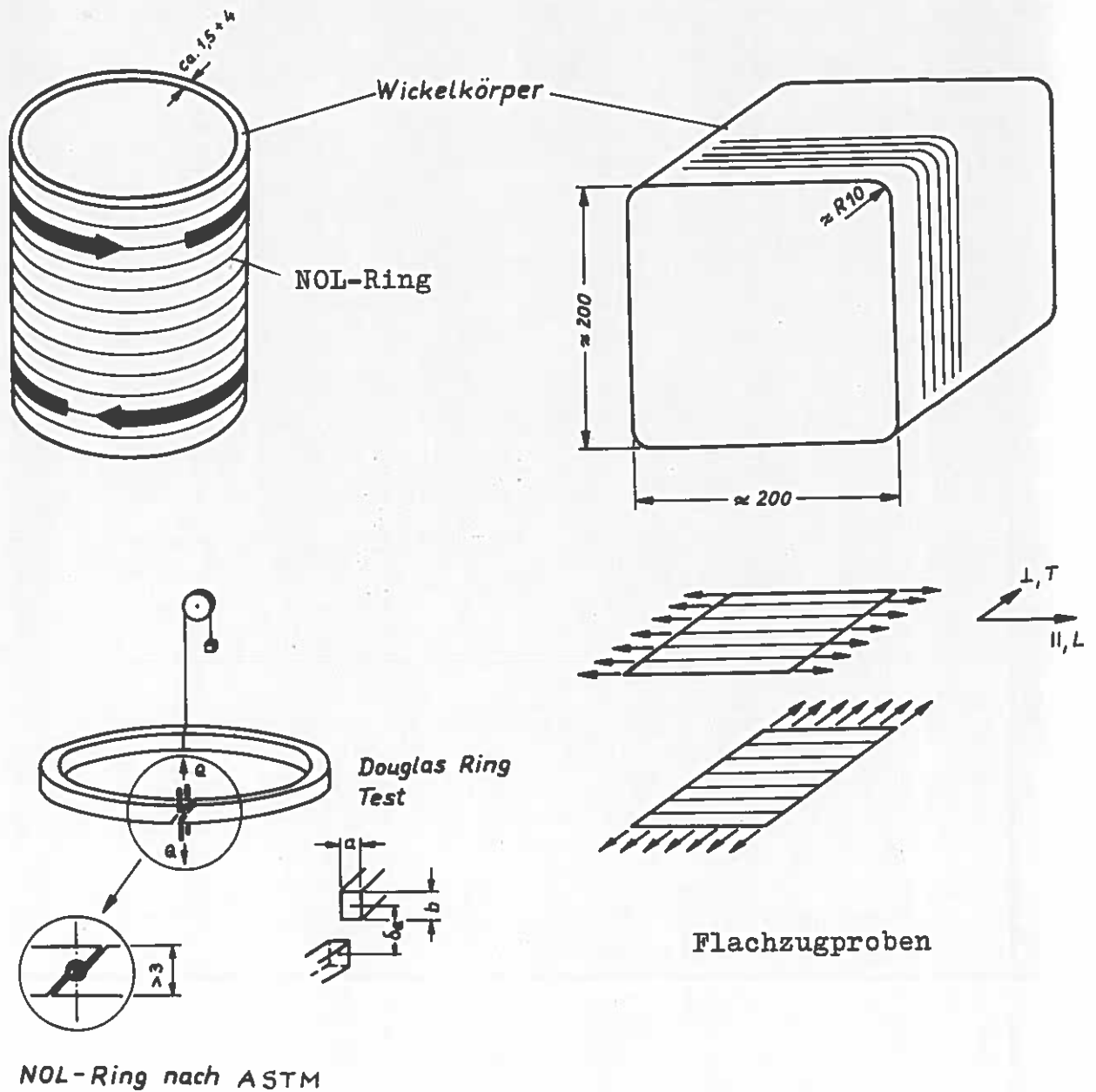


Bild 5.26 Probenherstellung für die Ermittlung unidirektionaler Verbundwerte. Nol-Ring-Testvorrichtung.

a/b	1.0	1.2	1.5	1.75	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	6.0	8.0	10.0	∞
$\beta$	0.141	0.166	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.299	0.307	0.313	0.333

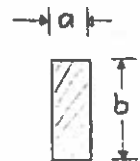
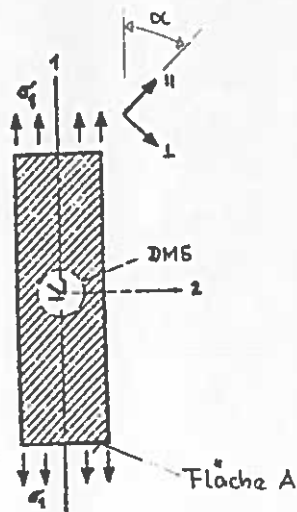


Tabelle 5.4 Querschnittsparameter  $\beta$  für Ringe mit Rechteckquerschnitt ([Greszuk])

1. Abschätzung von  $\nu_{\perp\parallel}$  aus der Mischungsregel.
2. Messung von  $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C, \sigma_1$  an einer Probe mit einem Faserorientierungswinkel zwischen  $20^\circ$  und  $30^\circ$  weil in diesem Bereich der Einfluß eines Fehlers von  $\nu_{\perp\parallel}$  kleiner als 5 % sein dürfte (lt. AFML-TR 66-274, S. 107).
3. Einsetzen der Meßwerte in die Beziehungen

$$m_A = \epsilon_A / \sigma_1, \quad m_B = \epsilon_B / \sigma_1, \quad m_C = \epsilon_C / \sigma_1$$

a) Für beliebiges  $\alpha$

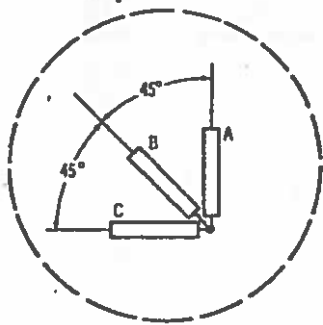


$$\sigma_1 = \frac{P}{A}$$

$$E_{\parallel} = \frac{(1 - \nu_{\perp\parallel} \tan^2 \alpha)}{m_A + m_C \tan^2 \alpha - (2m_B - m_A - m_C) \tan \alpha}$$

$$E_{\perp} = \frac{1}{m_A + m_C \cot^2 \alpha + (2m_B - m_A - m_C) \cot \alpha + \frac{\nu_{\perp\parallel}}{E_L} \cot^2 \alpha}$$

$$G_{\perp\parallel} = \frac{1}{2(m_A - m_C) + (2m_B - m_A - m_C) (\cot \alpha - \tan \alpha)}$$



DMS - Anordnung

b) Für  $\alpha = 30^\circ$  wird vereinfachend  $\tan \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{3}$ ,  $\cot \alpha = \sqrt{3}$ . Kleinster Fehlerbereich.

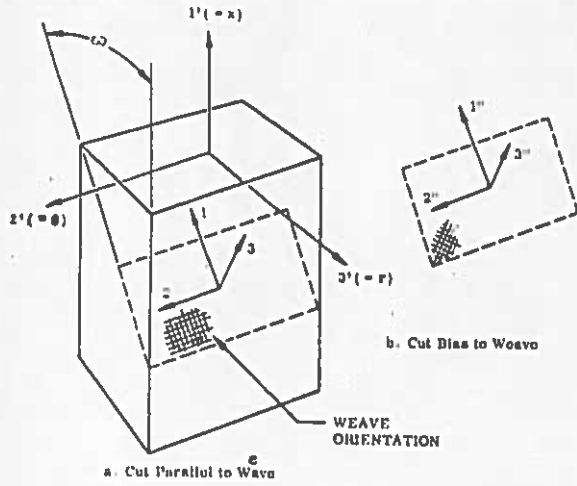
c) Für  $\alpha = 45^\circ$  wird  $\tan \alpha = \cot \alpha = 1$

$$E_{\parallel} = \frac{1 - \nu_{\perp\parallel}}{2(m_A - m_B + m_C)}$$

$$E_{\perp} = \frac{1}{2 \left[ m_B + \frac{\nu_{\perp\parallel}}{1 - \nu_{\perp\parallel}} (m_A - m_B + m_C) \right]}$$

$$G_{\perp\parallel} = \frac{1}{2(m_A - m_C)}$$

Tabelle 5.5 Vorschlag für ein relativ schnelles Verfahren zur Erfassung der elastischen Grundkonstanten einer UD-Schicht (nach [Greszuk]).

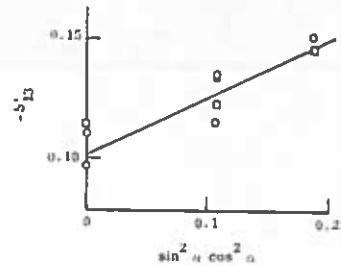
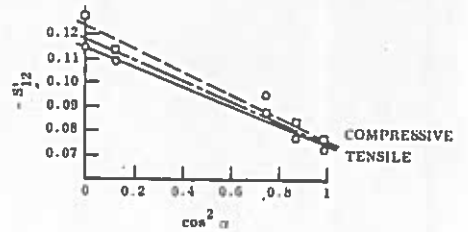
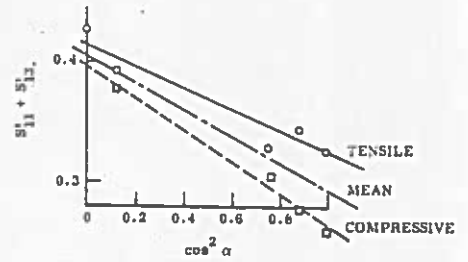


KOS des Werkstoffes (1,2,3)  
und der Proben (1',2',3')

Bild 5.27

Ermittlung der Elastizitätskoeffizienten eines dreidimensionalen Faserverbundes (Verfahren und Beispiel aus [Lempriere, 1968])

Lineare Darstellung  
der Meßwerte



$\alpha^\circ$	0	20	30	70	90	
$E_1$	2.36	2.09	2.08	1.97	1.86	tensile
	2.65	2.41	2.22	1.98	2.06	
$\nu_{21}$	0.170	0.160	0.196	0.212	0.213	tensile
	0.201	0.202	0.193	0.223	0.251	compressive
$\nu_{31}$	0.232	0.285	0.317	0.229	0.206	tensile
	0.314	0.326	0.324	0.224	...	compressive

}  $\times 10^4$  psi

$\cos^2 \alpha$	1	0.883	0.750	0.117	0	
$\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$	0	0.103	0.188	0.103	0	
$S'_{11} + S'_{12}$	0.325	0.342	0.329	0.392	0.427	tensile
	0.250	0.279	0.304	0.378	...	compressive
$-S'_{12}$	0.072	0.077	0.094	0.108	0.114	tensile
	0.076	0.084	0.087	0.113	0.127	compressive
$-S'_{13}$	0.098	0.136	0.152	0.116	0.111	tensile
	0.118	0.135	0.146	0.126	...	compressive

\* All compliances  $\times 10^{-4}$  psi<sup>-1</sup>.

Meßwerte für CP 109/5055  
unter veränderlichem Belastungswinkel

Test data obtained by L. Cohen of the General Electric Company for the properties of carbon phenolic CP 109/5055

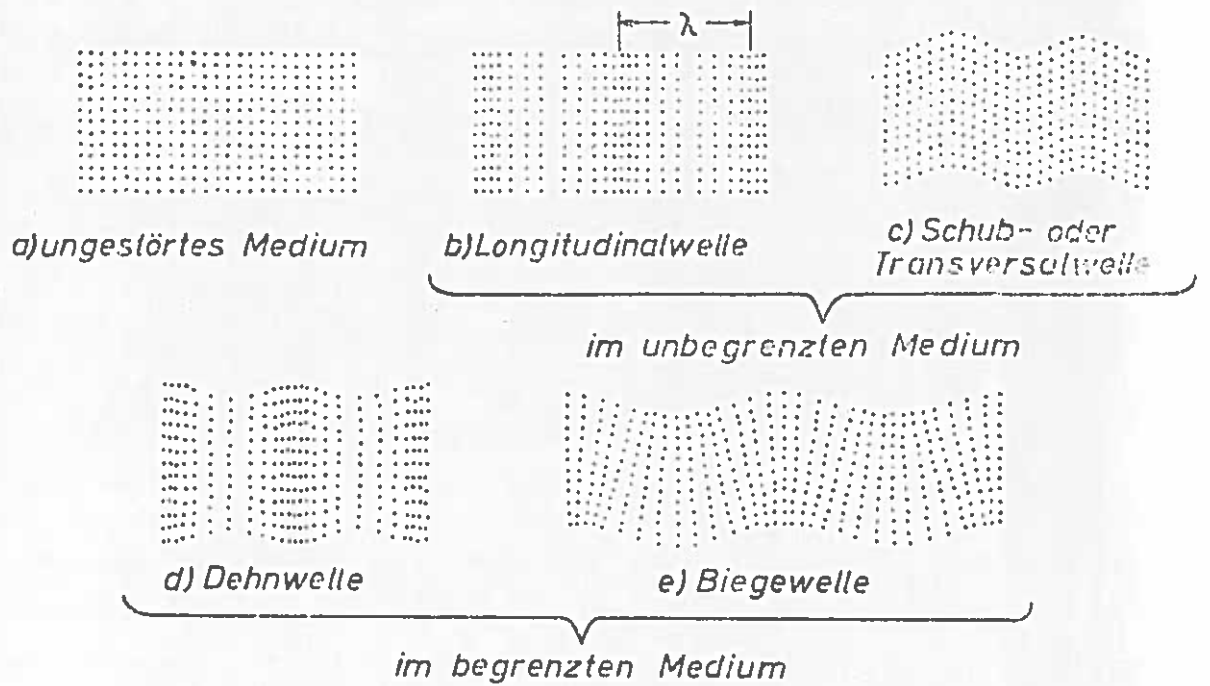
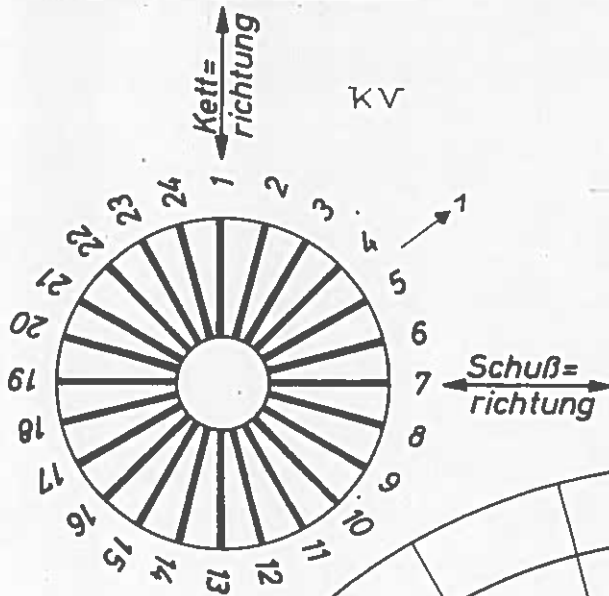


Bild 5.28 Wellenformen in festen isotropen Medien (aus [Niederstadt, 1962])

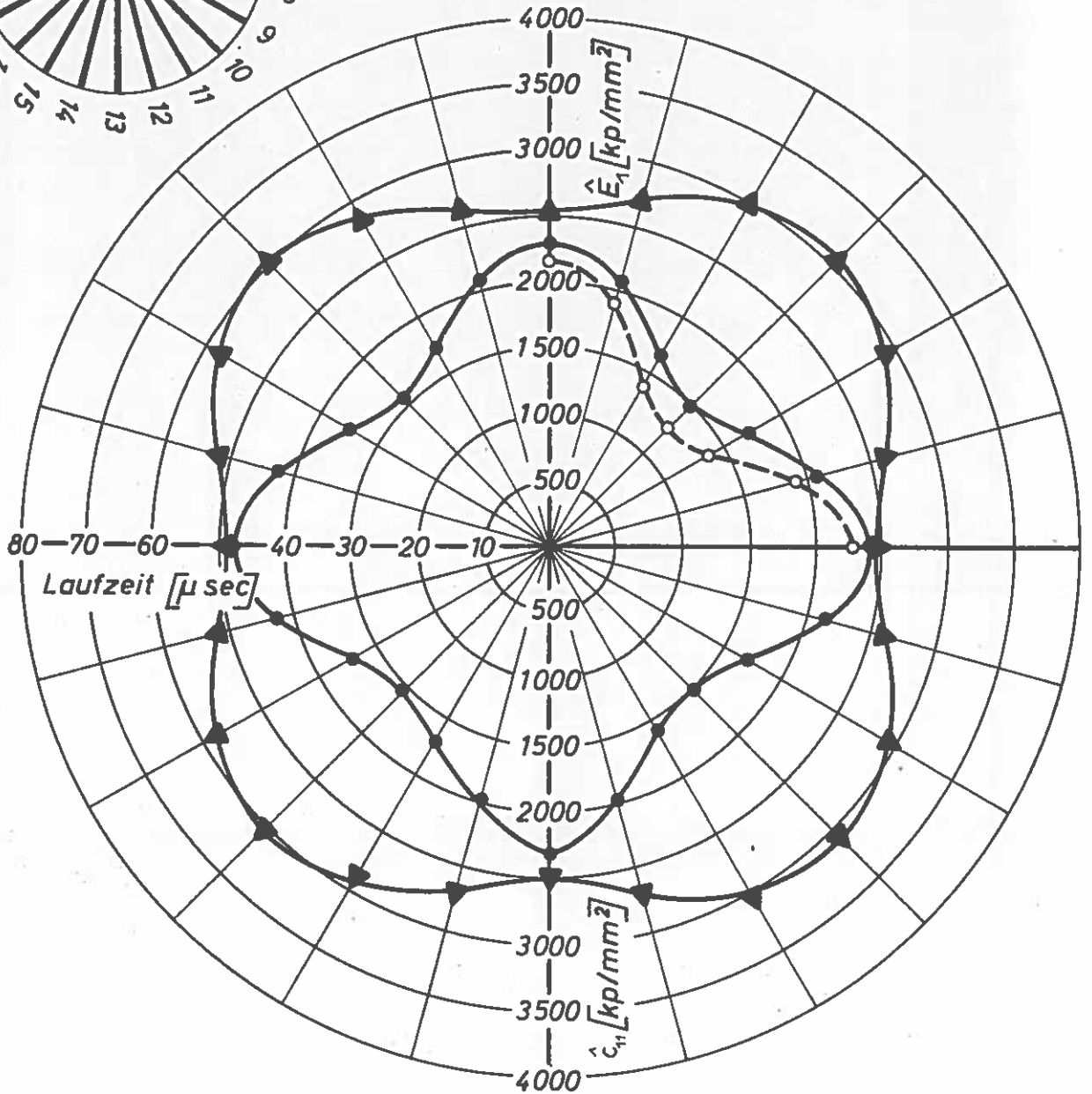
Richtung der Ultraschallwelle	Bewegung der Teilchen	Wellentyp	Bestimmung der EK
$n_1 = 1$ $n_2 = n_3 = 0$	$x_1$ $x_2$ $x_3$	$L \hat{=} \parallel$ $T \hat{=} \perp$ $T \hat{=} \perp$	$C_{11} = \rho_V c^2$ $C_{66} = \rho_V c^2$ $C_{55} = \rho_V c^2$
$n_2 = 1$ $n_1 = n_3 = 0$	$x_1$ $x_2$ $x_3$	$L$ $T$ $T$	$C_{22} = \rho_V c^2$ $C_{66} = \rho_V c^2$ $C_{44} = \rho_V c^2$
$n_3 = 1$ $n_1 = n_2 = 0$	$x_1$ $x_2$ $x_3$	$L$ $T$ $T$	$C_{33} = \rho_V c^2$ $C_{55} = \rho_V c^2$ $C_{66} = \rho_V c^2$
$n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $n_1 = 0$	$x_2 x_3$ -Ebene $x_1$	$QL, QT$ $T$	$C_{23} = \left( \sqrt{(C_{22} + C_{44} - 2\rho_V c^2)} \cdot \sqrt{(C_{33} + C_{44} - 2\rho_V c^2)} - C_{44} \right)$ $C_{55} + C_{66} = 2\rho_V c^2$

Tabelle 5.6 Zusammenhänge zwischen den Elastizitätskoeffizienten und den Wellengeschwindigkeiten in einem orthotropen Körper (n.Tauchert/Guzelsu)

Lage der Probekörper

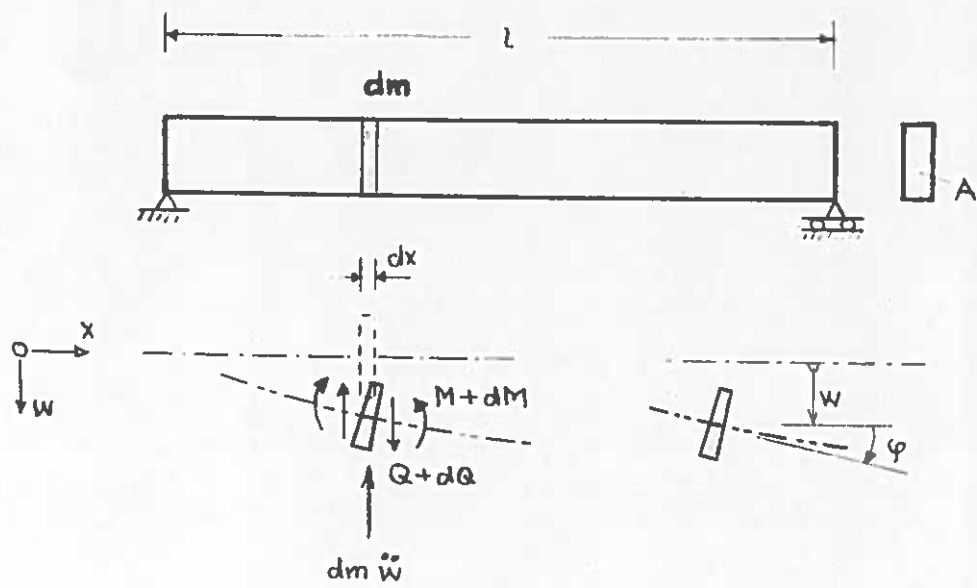


○ — — — — ○  $\hat{E}_1$  = Elastizitätsmodul  
 ● — — — — ●  $\hat{c}_{11}$  = Longitudinalwellenmodul



▲ — — — — ▲ Laufzeitmessung — [ S | S ] S = Schallköpfe

**Bild 5.29** Polardiagramm eines Laminates aus 32Lagen Glasgewebe Typ Interglas 91155 und 28Gewichtsanteilen Leguval W41 (aus [Niederstadt, 1962])



DGLn:

1.  $dQ - dm \ddot{w} = 0$
2.  $dM - Q dx = 0$
3.  $M = -EI w''$
4.  $dm = q A dx = m dx$

Bild 5.30 Herleitung der Bewegungsgleichungen des schwingenden Balkens (ohne Schubeinfluß)

## 6. Einfluß der Temperatur

Von großer Bedeutung für die Auslegung von Faserverbundkonstruktionen ist die genaue Kenntnis des Wärmeausdehnungsverhaltens. Es wird hier an Wärmedehnungen im Auhärteofen erinnert, oder an kryotechnische Anwendungen, bei denen außer an die elektrischen Eigenschaften auch bestimmte Anforderungen wegen der großen Temperaturdifferenzen an die thermische Kontraktion gestellt werden. Ein besonders interessantes Anwendungsgebiet liegt bei Parabolspiegeln vor, die auch bei Temperatureinwirkung verzerrungsfrei bleiben müssen. Um Eigenspannungen zu vermeiden, sollten bei Verwendung verschiedenartiger Materialien deren Wärmeausdehnungskoeffizienten (WAK) etwa gleich groß sein.

Anders als bei isotropen Werkstoffen bietet sich hier die Möglichkeit, die thermische Kontraktion und die Wärmespannungen zielgerecht durch Wahl des Aufbaus eines Laminates zu steuern. Ähnliches gilt für die Wärmeleitfähigkeit in Laminaten [Knappe/Martinez]. Ein Laminat mit sehr kleinem WAK, der fast unabhängig von einer betrachteten Richtung  $\omega$  ist, zeigt Bild 6.15 (Kurve C).

Die Werte des WAK und der Wärmeleitfähigkeit eines Laminates hängen zum Teil stark vom Temperaturbereich ab. Der WAK nimmt in diesem Bild mit tiefer werdender Temperatur betragsmäßig ab. Bei isotropen Werkstoffen liegen im allgemeinen keine solche Veränderungen im betrachteten Temperaturbereich vor.

Von Faserverbunden ist weiterhin bekannt, daß der lineare WAK eines Laminates vom Orientierungswinkel der Faser im Laminat abhängig ist. Unter Orientierungswinkel bzw. Faserablegewinkel versteht man den Winkel zwischen der Faserrichtung und einer angenommenen Achse.

Es soll Ziel dieses Kapitels sein, das Wärmeverhalten von Faserverbunden theoretisch zu erfassen und durch Beispiele zu erläutern, die möglichst versuchsmäßig belegt sind. Damit sollte weiterhin angeregt werden, immer noch vorhandene Unterschiede zwischen Versuchskurven und analytischen Kurven aufzuklären.

### 6.1 Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für die Schicht

Liegen temperaturbedingte Anfangsverzerrungen vor, so lautet die Spannungs-Dehnungs-Beziehung für den räumlichen Fall gemäß (5.21 c)



$$\sigma_{qr} = c_{qr} (\epsilon_r - \epsilon_r^{\Delta T}) \quad (q, r = 1, 2, \dots, 6)$$

bzw. in Matrizenform  $\{\sigma\} = [C] (\{\epsilon\} - \{\epsilon^{\Delta T}\})$  (6.1)

und für den ebenen Fall gemäß (5.38 a) formal ähnlich

$$\sigma_q = q_{qr} (\epsilon_r - \epsilon_r^{\Delta T}) \quad (q, r = 1, 2, 6 \text{ für ESZ}) \quad (6.2a)$$

bzw.  $\{\sigma\} = [Q] (\{\epsilon\} - \{\epsilon^{\Delta T}\})$ .

In ausgeschriebener Form wird daraus das Gleichungssystem

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{16} \\ & q_{22} & q_{26} \\ \text{(symm.)} & & q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \epsilon_1^{\Delta T} \\ \epsilon_2^{\Delta T} \\ \gamma_{12}^{\Delta T} \end{pmatrix} \quad (6.2b)$$

mit den Steifigkeitskoeffizienten ( $q, r = 1, 2, 6$ ).

$$q_{qr} = c_{qr} - \frac{c_{q3} c_{r3}}{c_{33}} \quad (6.3)$$

Geht man von den Gleichungen (6.2 b) auf den UDV über, so werden die Elastizitätskoeffizienten  $q_{16}$  und  $q_{26}$  zu Null.

Es ist weiter für den räumlichen Fall bei einem Temperaturunterschied als Vektor der Dehnungen

$$\{\epsilon^{\Delta T}\} = \Delta T [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0]^T \quad (6.4)$$

anschreibbar. Beim Übergang zum ebenen Spannungszustand (ESZ) wird daraus

$$\{\epsilon^{\Delta T}\} = \Delta T [\alpha_1, \alpha_2, 0]^T \quad (6.5)$$

Wenn wir auf die  $k$ 'te Einzelschicht eines ebenen MSV übergehen, wird aus (6.5)

$$\{\epsilon^{\Delta T}\}_k = \Delta T_k [\alpha_1, \alpha_2, 0]_k^T \quad (6.6)$$

Für die spätere Rechnung ist es erforderlich, die Temperaturdehnungen des UDV in Hauptachsenrichtung durch die Größen in Orthotropierichtung der Schicht auszudrücken. Dieses gelingt mit (4.160) und führt zu

$$\{\epsilon^{\Delta T}\}_k = [T_\epsilon]_k \{\epsilon_{UD}^{\Delta T}\}_k = [T_\epsilon]_k \Delta T_k \{\alpha_{UD}\}_k \quad (6.7)$$

bzw. für  $\Delta T_k = \Delta T$  zu

$$\Delta T \{ \alpha \}_k = [T_\epsilon]_k \Delta T \{ \alpha_{UD} \}_k .$$

Die WAK lauten dann

$$\{ \alpha \}_k = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \Gamma_{12} \end{Bmatrix}_k = [T_\epsilon]_k \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ 0 \end{Bmatrix}_k = [T_\epsilon]_k \{ \alpha_{UD} \}_k . \quad (6.8)$$

Zur Verdeutlichung der vorstehenden Gleichung sei zum Schluß für zwei CFK-Verbundschichten in Bild 6.1 die Abhängigkeit des WAK  $\alpha_1$  vom Orientierungswinkel angegeben. Leider ist das Harzsystem nicht angegeben (für das Celanese Produkt vermutlich das Harz 350 A). Die verformte Figur zeigt an, welche Gleitung infolge  $\Gamma_{12}$  bei Erwärmung eines UDV auftreten kann.

Für jede UD-Schicht (k) gibt es laut Glg. (6.8) drei mögliche Verformungen. Diese Verformungen ergeben sich aus der Überlagerung von Wärmedehnungen  $\{ \epsilon^{\Delta T} \}_k$  und Dehnungen durch \* . Für jede Einzelschicht müssen in der 1-2 Ebene zwei WAK und ein Schubverformungskoeffizient bestimmt werden. Sie lassen sich durch Winkeltransformation aus den Wärmeausdehnungskoeffizienten in den Orthotropieachsenrichtungen,  $\alpha_{11}, \alpha_{12}$ , mit den Glgn. (6.8) berechnen. Der Schubverformungskoeffizient  $\Gamma_{12,k}$  ist als Maß für die Schubverformung der UD-Schicht ausschließlich der Wärmeausdehnung und nicht den Wärmespannungen zuzuschreiben.

## 6.2 Wärmeausdehnungskoeffizienten-Berechnungsformeln

Infolge der unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten von Fasern und Matrix ergeben sich für Faserverbunde richtungsabhängige Wärmeausdehnungskoeffizienten. In [Schneider, 1973] wird für einen solchen Faser-Matrix-Verbund ein Modell vorgestellt, das es gestattet, die Wärmeausdehnungskoeffizienten zu berechnen. Im folgenden Absatz wird im wesentlichen aus dieser grundlegenden Arbeit zitiert.

### 6.2.1 UD-Schicht

Im Fall der UD-Schicht unterscheidet man die Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_{11}$  in Längsrichtung und  $\alpha_{12}$  in Richtung quer zur Faser. Diese Koeffizienten werden in der vorgenannten Literatur unter folgenden vereinfachenden Annahmen ermittelt:

\* Spannungen infolge Dehnungsbehinderung und äußere Belastung.

- Die Fasern werden als ideal gerade, parallel laufend und in der Matrix gleichmäßig verteilt angenommen.
- Zwischen Faser und Matrix besteht vollkommene Haftung.
- Ideal elastisches Verhalten für Fasern und Matrix wird vorausgesetzt.
- Bei seiner Aushärtetemperatur sei der Faser/Matrix-Verbund spannungsfrei; Schrumpfspannungen durch Volumenschwund werden nicht berücksichtigt.
- Der Faser/Matrix-Verbund besteht ausschließlich aus Fasern und Matrix. Zusatzstoffe wie Schlichte und Haftvermittler, Lufteinschlüsse und sonstige Fremdkörper werden nicht berücksichtigt.
- Die Faser ist isotrop.
- Das Modell soll eine hexagonale Faseranordnung von zylindrischen Fasern in einem konzentrischen Matrixmantel beinhalten.

Unter Zugrundelegung dieses idealen Modells für eine UD-Schicht, entwickelt W. Schneider die Gleichungen für  $\alpha_{||}$  und  $\alpha_{\perp}$ . Dabei entsprechen die gefundenen Wärmespannungsgleichungen denen eines Hohlzylinders bzw. Vollzylinders unter Innen- und Außendruck. Verwendet wurden als Gleichungen die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen von Matrix und Faser und die Kompatibilitätsbedingungen zwischen Matrix und Faser.

Nach Auflösung des Gleichungssystems nach den  $\alpha_{||}$  und  $\alpha_{\perp}$  und der Einführung des tatsächlichen Faservolumenanteils  $\varphi$  werden relativ unbequeme Formeln für  $\alpha_{||}$  und  $\alpha_{\perp}$  erhalten. Bei Einführung der Vereinfachungen

$$E_{F\perp} \approx E_F, \quad \nu_M \approx \nu_F, \quad (1 - \nu_F)/E_F \approx 0, \quad 2\nu_M^2/E_F = 0$$

deren Fehler unter 1 % sein sollen, erhält man für

$$\alpha_{\perp} = \alpha_M - (\alpha_M - \alpha_F) \left[ \frac{2(\nu_M^2 - \nu_M - 1)1,1\varphi}{1,1\varphi(2\nu_M^2 + \nu_M - 1) - (1 - \nu_M)} - \frac{\nu_M \frac{E_M}{E_F}}{\frac{E_F}{E_M} + \frac{1 - 1,1\varphi}{1,1\varphi}} \right] \quad (6.9)$$

Für  $\alpha_{||}$  ergäbe sich eine ähnlich komplizierte Formel. Begnügt man sich allerdings mit einem Fehler (der komplizierteren Formel gegenüber) von 5 %, so reicht die folgende einer Federschaltungsrechnung entstammende Formel

$$\alpha_{||} = \alpha_F + \frac{\alpha_M - \alpha_F}{\frac{\varphi}{1 - \varphi} \cdot \frac{E_F}{E_M} + 1} \quad (6.10)$$

aus.

In Bild 6.2 sind für spezielle GFK-UDV die WAK in Abhängigkeit vom Faservolumenanteil aufgetragen. Zu ersehen ist eine erhebliche Abhängigkeit des WAK von GFK von dem Glasfasergehalt und der Faserorientierung. Das rührt daher, daß der WAK der Glasfasern etwa um eine Größenordnung kleiner ist als der der Harzmatrix. Selbst bei einer nur unidirektional faserverstärkten Schicht treten wegen dieser sehr unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten bei einer Temperaturänderung des Verbundwerkstoffs Spannungen zwischen Fasern und Matrix auf.

Für CFK-UDV würde sich zeigen, daß wegen des großen  $E_F/E_M$ -Verhältnisses  $\alpha_{||}$  praktisch allein von der Faser bestimmt wird. In der Querrichtung ist der Einfluß ähnlich groß.

Der WAK  $\alpha_{\perp}$  ist ziemlich abhängig von der Faseranordnung in der Matrix. Außerdem hängt er von den wirklichen Faser-Querelastizitätsmoduln ab, die leider bei anisotropen Fasern (quasiisotrop) wie der Kohlenstofffaser unbekannt sind. Bei der Berechnung von  $\alpha_{\perp}$  wird deshalb bei CFK der Längswert  $E_F$  auch in Querrichtung angesetzt.

### 6.2.2 Mehrschichtenverbund

Für die Ermittlung der WAK eines mehrschichtigen Verbundes bzw. Laminates aus den Schichtanteilen wird von der Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Laminates unter Wärmedehnung bzw. Wärmebelastung ausgegangen. Es gilt dann für ebene Belastung

$$\begin{aligned} \{\hat{\epsilon}\} &= [\hat{S}] \{\hat{\sigma}\} + \{\hat{\epsilon}^{\Delta T}\} \\ [\hat{S}] &= [\hat{Q}]^{-1}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Der Spannungsvektor

$$\{\hat{\sigma}\} = \{N/t\} = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} \{\sigma\}_k \quad (6.12)$$

drückt darin den Zusammenhang zwischen Schichtspannungen und Laminatspannungen unter äußerer Belastung aus. Wenn man hierzu analog bei der Wärmebelastung vorgeht, so kommt man über

$$\{\hat{\epsilon}^{\Delta T}\} = [\hat{S}] \{\hat{\sigma}^{\Delta T}\} \quad (6.13)$$

(Schreibweise von W. Schneider,  $\hat{\sigma}^{\Delta T} \equiv \Delta T \hat{\sigma}^T$ ) schließlich zu

$$\{\hat{\sigma}^{\Delta T}\} = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} \{\sigma^{\Delta T}\}_k \quad (6.14)$$

Letzterer Spannungsausdruck hängt entsprechend den Schichtbeziehungen (s. auch Glg. (6.5)) mit den Dehnungen

$$\{\hat{\epsilon}\} = \{\epsilon\}_k = [S]_k \{\sigma\}_k + \{\epsilon^{\Delta T}\}_k = [S]_k \left( \{\sigma\}_k + \{\sigma^{\Delta T}\}_k \right), \quad (6.15)$$

da  $[S]_k^{-1} = [Q]_k$ , in folgender Weise zusammen

$$\{\sigma^{\Delta T}\}_k = [Q]_k \{\epsilon^{\Delta T}\}_k. \quad (6.16)$$

Durch Einsetzen von Glg. (6.16), (6.14) und (6.13) in (6.11) erhält man

$$\begin{aligned} \{\hat{\epsilon}\} &= [\hat{S}] \left( \{\hat{\sigma}\} + \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} \{\sigma^{\Delta T}\}_k \right) \\ &= [\hat{S}] \left( \{\hat{\sigma}\} + \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} [Q]_k \{\epsilon^{\Delta T}\}_k \right) = [\hat{S}] \{\hat{\sigma}\} + \{\hat{\epsilon}^{\Delta T}\}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Für die Bestimmung des belastungsunabhängigen WAK des Laminates ist die äußere Belastung  $\{\hat{\sigma}\}$  gleich Null zu setzen, so daß  $\{\hat{\epsilon}\} = \{\hat{\epsilon}^{\Delta T}\}$  wird. Als Berechnungsformel dient dann, wenn alle Schichten gleiche Temperatur haben (vgl. Abschnitt 5.4.2)

$$\begin{aligned} \{\hat{\epsilon}^{\Delta T}\} &= [\hat{S}] \left( \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} [Q]_k \{\epsilon^{\Delta T}\}_k \right) = [\hat{S}] \left( \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} [Q]_k [T_\epsilon]_k \{\epsilon_{UD}^{\Delta T}\}_k \right) \\ \{\hat{\epsilon}^{\Delta T}\} &= [\hat{S}] \left( \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} [T_\sigma]_k [Q_{UD}]_k [T_\epsilon]_k^{-1} [T_\epsilon]_k \{\epsilon_{UD}^{\Delta T}\}_k \right) \\ \Delta T \{\hat{\alpha}\} &= [\hat{S}] \left( \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} [T_\sigma]_k [Q_{UD}]_k \{\epsilon_{UD}^{\Delta T}\}_k \right), \end{aligned} \quad (6.18)$$

und die Formel für die WAK des gleichförmig erwärmten Laminates lautet schließlich

$$\{\hat{\alpha}\} = \begin{Bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_{12} \end{Bmatrix} = [\hat{S}] \left( \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} [T_\sigma]_k [Q_{UD}]_k \begin{Bmatrix} \alpha_{||} \\ \alpha_{\perp} \\ 0 \end{Bmatrix}_k \right). \quad (6.19)$$

Es folgen nun einige versuchsmäßig belegte Anwendungen der vorstehenden Formel.

In Bild 6.3 sind die WAK von GFK-UDV und GFK-AWV (jeweils  $\varphi = 0,55$ ) aufgetragen, wie sie sich nach Glg. (6.19) ergeben. Einige experimentelle Werte ergänzen die theoretischen Kurven. Der Vergleich experimenteller Ergebnisse mit rechnerisch ermittelten Kurven soll Abschnitt 6.4 vorbehalten bleiben.

Es zeigt sich, daß im Bereich kleiner Winkel  $\alpha$  der Wärmeausdehnungs-

koeffizient  $\hat{\alpha}_x$  des mehrschichtigen Verbundes wesentlich kleiner ist als der Wärmeausdehnungskoeffizient der UD-Schicht. Dies ist auf die Verformungen durch Wärmespannungen zurückzuführen. Diese Verformungen können bei sehr großen Verhältnissen  $E_F/E_M$  und  $\alpha_M/\alpha_F$  so stark anwachsen, daß der Wärmeausdehnungskoeffizient des ausgeglichenen Winkelverbunds im Bereich von  $15^\circ < \alpha < 45^\circ$  sogar negativ wird.

Bild 6.4 zeigt die WAK von GFK-AWV in Abhängigkeit vom Faserorientierungswinkel  $\alpha$  und vom Faservolumenanteil  $\varphi$ . Man sieht, daß der Einfluß von  $\varphi$  bis  $\alpha = 35^\circ$  sehr gering ist, für größere Winkel aber schnell zunimmt [Schneider, 1973].

Beim AWV fallen die Orthotropieachsen der einzelnen Schichten mit denen des Verbunds nicht zusammen. Daher stellt sich bei den unverklebten Einzelschichten eine entgegengesetzt gleichgroße Schubverformung infolge Wärmedehnung ein ( $\Gamma_{xy_1} = -\Gamma_{xy_2}$ ). Die verklebten Schichten des Verbunds können sich aber nicht gegeneinander verschieben. Sie behindern sich gegenseitig, so daß keine Schubverformung des Verbunds auftritt ( $\hat{\Gamma}_{xy} = 0$ ). Demnach entstehen in den UD-Schichten entgegengesetzt gleichgroße Schubspannungen.

Für jeden Mehrschichtenverbund aus  $n$  UD-Schichten gibt es mindestens einen speziellen Aufbau [Schneider, 1973], für den die WAK in zwei zueinander senkrechten Richtungen gleich sind und auch die Beanspruchung aller UD-Einzelschichten infolge Temperaturänderung gleich ist. Dies ist der optimale Aufbau für gleichzeitigen Zwischenfaserbruch in allen Schichten, wenn nur Wärmebelastung vorliegt. Für den Sonderfall des Kreuzverbundes gilt dies beim Schichtdickenverhältnis  $t_2/t_1=1$ . (s. auch Abschnitt 8)

Für den ausgeglichenen Winkelverbund ist unabhängig vom Wickelwinkel jede Schicht gleichwertig belastet, jedoch sind gleiche WAK in 1- und 2- Richtung nur für  $\alpha = 45^\circ$  gewährleistet. Bei dreischichtigen Verbunden ( $\pm \alpha^\circ/90^\circ$ ), gibt es für jeden Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $45^\circ$  einen Aufbau (Schichtdickenanteil  $t_3$ ), der gleichmäßige Belastung aller Schichten zuläßt, und zwar ist dies dann der Fall, wenn die Schubspannungen in den Schichten 1 und 2 Null werden.

In der Praxis ist vor allem die Axialdehnung von Rohrleitungen interessant, da geringe Verlängerungen bei Erwärmung Kosten sparen (Ausgleichsbögen). Unter diesem Gesichtspunkt bietet sich das AWV-Rohr, [Schneider, S. 933], an, da es für jede Belastung durch Innendruck und Temperatur jeweils einen Wickelwinkel gibt, für den die Axial-

dehnung gleich Null ist.

Diese Eigenschaft läßt sich laut zuvor genannter Literatur vorteilhaft dann ausnützen, wenn Rohre axial fest eingespannt sind (z.B. Wärmetauscher mit festen Böden). Wird ein AWV-Rohr nur durch Innendruck beansprucht, so ergeben sich bei  $\alpha = 50^\circ$  keine Axialdehnungen. Soll dieses Rohr im Betrieb erwärmt werden, so muß ein kleinerer Winkel, soll es abgekühlt werden, so muß ein größerer Winkel gewählt werden.

Für zwei CFK-MSV geben [Fahmy/Ragai] für die Werte  $E_{II} = 32,4 \cdot 10^4$  N/mm<sup>2</sup>;  $E_I = 0,49 \cdot 10^4$  N/mm<sup>2</sup>;  $\nu_{II} = 0,25$ ;  $G_{II} = 0,85 \cdot 10^4$  N/mm<sup>2</sup> in Bild 6.5 a die WAK in Abhängigkeit vom Orientierungswinkel  $\alpha$  an. Als lineare Wärmeausdehnungskoeffizienten wurden die Versuchswerte  $\alpha_{II} = -1,3 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$  und  $\alpha_I = 75 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$  bei der Berechnung der theoretischen Kurven verwendet. Die nachgerechneten theoretischen Kurven decken sich beim AWV. Beim dreischichtigen MSV fehlte in der Literatur eine Angabe der Schichtdicken, weshalb die Variationen von Bild 6.5 b durchgeführt wurden.

Zur Abrundung seien zum Schluß dieses Abschnittes noch die theoretischen WAK von GFK-KV in Bild 6.6 bei Berücksichtigung verschiedener Faservolumenanteile angegeben.

### 6.2.3 Matte und Gewebe

#### Matte:

Um die WAK von Matten zu berechnen, ist theoretisch ein großer Aufwand notwendig. Man weiß aber [Schneider, 1973], daß man bei einer statistischen Verteilung der Fasern im Verbundquerschnitt davon ausgehen kann, daß der Traganteil in beliebiger Richtung 0.5 ist, wenn die Belastung in Mattenebene erfolgt. Das bedeutet aber nichts weiter, als daß die Matten einen Elastizitätsmodul besitzen, der sich aus einem aus zwei gleich dicken UD-Schichten bestehenden KV ermitteln läßt (Abschnitt 5). Analog zu dieser Überlegung werden die WAK der Matte aus denen des KV ermittelt (Bild 6.7).

Für die quasihomogenen Matten aus statistisch regellos verteilten Kurzfasern heißt deswegen die Formel für den WAK nach [Schneider, 1973, Glg. 20]

$$\hat{\alpha}_{1_{KV}} = \hat{\alpha}_{2_{KV}} = \alpha_{II} + (\alpha_I - \alpha_{II}) \left( \frac{-1}{a+b} \left( \frac{b}{\alpha E_{II}} - \frac{\nu_{II}}{E_I} \right) + \frac{1}{\alpha E_{II}} \right) \quad (6.20)$$

worin als Abkürzungen

$$a = \frac{1}{E_{II}} + \frac{1}{E_I} \quad , \quad b = 2 \frac{\nu_{II}}{E_I}$$

vorliegen.

#### Gewebe:

Weil zumindest für GFK-MSV aus UD-Einzelschichten die Versuchswerte sich mit errechneten Werten recht gut decken (Bild 6.7), wird in der vorgenannten Literatur die UDV-Berechnungsmethode auch auf Gewebe angewendet. Dazu müssen vorher die Schichtdickenverhältnisse ermittelt werden.

Beispielsweise für die Gewebe ( $92125/k = 0,5$ ;  $92150/k = 0,577$ : Fa. Interglas, Ulm) wurden die WAK in Kett- und Schußrichtung mit den nach Gleichung (5.70) ermittelten Schichtdickenverhältnissen berechnet über Glg. (6.19), wobei von vornherein  $\hat{\Gamma}_{xz} = 0$  bei dem hier vorliegenden orthotropen Kreuzverbund gesetzt werden kann.

$$\begin{Bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\Gamma}_{xz} \end{Bmatrix} = [\hat{S}] \left( \sum_{k=1}^2 \frac{t_k}{t} [T_{\epsilon}]_{k} [Q_{UD}]_{k} \begin{Bmatrix} \alpha_{II} \\ \alpha_I \\ 0 \end{Bmatrix}_k \right) . \quad (6.21)$$

Da die Orthotropieachsen der einzelnen UD-Schichten mit den Orthotropieachsen des Verbunds zusammenfallen, ergibt sich aus Symmetriegründen keine Schubverformung infolge Wärmedehnung für die einzelnen Schichten und damit auch keine Schiebung des Verbundes ( $\hat{\Gamma}_{xy} = 0$ ). Dies bedeutet, daß auch keine Schubspannungen  $\tau_{xz}$  in den Einzelschichten entstehen können. Es sind also nur noch Normalspannungen in den einzelnen Schichten möglich. Im Fall des Kreuzverbunds treten nur Spannungen parallel ( $\sigma_{II}$ ) und senkrecht ( $\sigma_I$ ) zu den Fasern auf.

In Bild 6.8 sind die berechneten WAK eingetragen.

Inwieweit die verschiedenen Webarten und die unterschiedliche Fadendicke sich auf die WAK und die Wärmespannungen auswirken, muß speziellen Untersuchungen vorbehalten bleiben.

#### 6.2.4 Wärmeausdehnungskoeffizienten in Dickenrichtung eines MSV

Im allgemeinen ist es notwendig, bei Berechnungen der Wärmespannungen und Dehnungen eines Rotationskörpers auch ~~ein~~ gekrümmte Schalenstück(z.B. <sup>die</sup> Böden) miteinzubeziehen. Da die Berechnungen meistens mit numerischen Berechnungsverfahren (Finite Element Methoden etc.) durchgeführt werden und häufig nur ein Programm zur Verfügung steht,



das sogenannte Körperelemente enthält, ist aus Eingabegründen die Kenntnis der WAK Dickenrichtung notwendig.

Beim Übergang vom Rotationskörper zur dünnen Schale werden  $\hat{\sigma}_3, \hat{\tau}_{23}, \hat{\tau}_{13}$  Null gesetzt. Aus der Gleichung  $\hat{\sigma}_3 = 0$  läßt sich daher eine Beziehung für  $\hat{\alpha}_3$  herleiten. Als Berechnungsformel wird bei [Fahmy/Ragai, 1974] angegeben

$$\hat{\alpha}_3 = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} \left[ \alpha_{\perp} - \nu_{11} (\hat{\alpha}_1 - \alpha_{11}) - \nu_{11} (\hat{\alpha}_2 - \alpha_{\perp}) \right]_k \quad (6.22)$$

mit  $\hat{\alpha}_1$  und  $\hat{\alpha}_2$  aus Glg. (6.19).

Die Auswertung für einen AWV ( $t_1 = t_2, +\alpha/-\alpha$ ) für CFK aus Celion-Fasern ( $\phi 2 \mu\text{m}$ ) für die Meßwerte  $E_{11} = 18,9 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ ;  $E_{\perp} = 0,95 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ ;  $\nu_{11} = 0,293$ ;  $\nu_{\perp 1} = 0,657$ ;  $G_{\perp 1} = 0,85 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ ;  $\alpha_{11} = 1,0 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ;  $\alpha_{\perp} = 54 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$  zeigt Bild 6.9. In Glg. (6.22) steht bei Fahmy/Ragai entsprechend ihrer Bezeichnungsweise  $\nu_{11}$ . Laut unserer Definition ist aber  $\nu_{\perp 1}$  die größere Querkontraktionszahl. Sie wird in Querrichtung ( $\perp$ ) infolge einer Spannung in Längsrichtung (Faserichtung  $\parallel$ ) gemessen. Wie sich bei der Auswertung der Formel (6.22) zeigte, gilt diese nur bis  $\alpha = 45^{\circ}$ . Die Kurve kann jedoch als symmetrisch zu  $\alpha = 45^{\circ}$  angenommen werden.

Leider gaben Fahmy/Ragai nicht an, welche Annahmen sie bei der Aufstellung der Gleichungen getroffen haben. Es wird hier deshalb noch über eine vollständig vorliegende Unterlage berichtet.

In dem Bericht von Moore, 1975, wird von der Elastizitätsmatrix  $[C_{ub}]$  einer orthotropen Schicht (Glg. (5.35)) ausgegangen. Es werden die den Glgn. (4.163) und (4.166) entsprechenden Transformationsmatrizen der dreidimensionalen orthotropen Schicht

$$[T_{\sigma}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -sc & sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, [T_{\epsilon}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2sc & 2sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

mit  $s = \sin \alpha$  und  $c = \cos \alpha$  verwendet und die auf die Bauteilhauptachsen bezogene Elastizitätsmatrix der k'ten Schicht (vgl. Glg. (5.54)

$$[C]_k = [T_{\sigma}]_k [C_{ub}]_k [T_{\sigma}]_k^T$$

ermittelt.

Nun werden in diesem Bericht folgende Annahmen gemacht:

1.  $\sigma_{3k} = 0$  (In jeder Schicht ist die Spannung in Dickenrichtung Null),
2.  $\varepsilon_{1k} = \hat{\varepsilon}_1$ ,  $\varepsilon_{2k} = \hat{\varepsilon}_2$ ,  $\sigma_{23k} = \hat{\sigma}_{23}$ ,  $\gamma_{13k} = \hat{\gamma}_{13}$ ,  $\sigma_{12k} = \hat{\sigma}_{12}$   
 (Das bedeutet, die Kompatibilität der Verzerrungen von Schichten und Laminat ist bei  $\varepsilon_{3k}$  verlassen worden).

Damit sind durch die 1. Annahme  $k$  Gleichungen für die unbekanntes  $\varepsilon_{3k}$  gegeben worden. Es lauten die Beziehungen für jede Schicht (vgl. Glg. (6.26))

$$\{\varepsilon\}_k = [S]_k \{\sigma\}_k + \{\varepsilon^{\Delta T}\}_k,$$

wobei nun die  $\{\varepsilon\}_k$  nach 2) durch Laminatgrößen ersetzt werden

$$\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \varepsilon_3 \\ \hat{\varepsilon}_4 \\ \hat{\varepsilon}_5 \\ \hat{\varepsilon}_6 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & s_{45} & 0 \\ & & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ \sigma_4 \\ \varepsilon_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_k + \Delta T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_k. \quad (6.24)$$

Für das Laminat läßt sich

$$\{\hat{\varepsilon}\}_k = [\hat{S}] \{\hat{\sigma}\} + \{\hat{\varepsilon}^{\Delta T}\}$$

anschreiben.

Der weitere Weg ist so wie bei der Entwicklung der Glg. (6.19). Das mit diesem Matrizenverfahren erhaltene Ergebnis ist in Bild 6.9 gestrichelt eingetragen.

## 6.3 Schnittgrößen der mehrschichtigen Verbundschale

### 6.3.1 Allgemeiner Fall

Bei den zu berechnenden Flächentragwerken wird entsprechend (Glg. (4.170 b)) zweckmäßigerweise wieder auf die Schnittgrößen übergegangen. Es folgt damit gemäß Abschnitt 5.4.2 das Gleichungssystem

$$\begin{Bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \Delta T = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon} \\ -\hat{\chi} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon} \\ -\hat{\chi} \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

aus welchem (nun rein matriziell geschrieben) die Beziehungen

$$\{\bar{N}\} = \{N\} + \{N^{\Delta T}\} = \int_{-t/2}^{+t/2} \{\sigma\} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \{\sigma\}_k dz \quad (6.26a)$$

und

$$\{\bar{M}\} = \{M\} + \{M^{\Delta T}\} = \int_{-t/2}^{+t/2} \{\sigma\} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \{\sigma\}_k z dz \quad (6.26b)$$

resultieren.

In die vorstehenden Gleichgewichtsbedingungen ist die Annahme von Bernoulli (vgl. Glg. (4.171 b)) einzusetzen

$$\{\epsilon_z\} = \{\epsilon\} + z\{-\chi\} \quad (6.27)$$

so daß für MSV, weil

$$\{\epsilon\} = \{\hat{\epsilon}\} \quad \text{und} \quad \{\chi\} = \{\hat{\chi}\}$$

$$\{\epsilon_k\} = \{\hat{\epsilon}\} + z\{-\hat{\chi}\} \quad (6.28)$$

folgt, bezogen auf die Schalenmittelfläche des MSV als Bezugsfläche. Wird dieser Zusammenhang in die Spannungs-Dehnungsbeziehung Glg. (5.40)

$$\{\sigma\}_k = [Q]_k (\{\epsilon\}_k - \{\epsilon^{\Delta T}\}_k) = [Q]_k (\{\hat{\epsilon}\} + z\{-\hat{\chi}\} - \{\epsilon^{\Delta T}\}_k) \quad (6.29)$$

eingefügt, bekommen wir

$$\begin{aligned} \{N\} + \{N^{\Delta T}\} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q]_k (\{\hat{\epsilon}\} + z\{-\hat{\chi}\}) dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q]_k \{-\epsilon^{\Delta T}\}_k dz \\ \{M\} + \{M^{\Delta T}\} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q]_k (\{\hat{\epsilon}\} + z\{-\hat{\chi}\}) z dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q]_k \{-\epsilon^{\Delta T}\}_k z dz \end{aligned} \quad (6.30)$$

Eine anschauliche Darstellung der Gesamtdéhnung und der Temperaturdéhnung zeigt Bild 6.10.

Die Temperaturanteile berechnen sich aus

$$\begin{aligned} \{N^{\Delta T}\} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q]_k \{-\epsilon^{\Delta T}\}_k dz = \sum_{k=1}^n [Q]_k (h_k - h_{k-1}) \{-\epsilon^{\Delta T}\}_k \\ &= t \sum_{k=1}^n [Q]_k \frac{t_k}{t} \{-\epsilon^{\Delta T}\}_k \end{aligned} \quad (6.31)$$

und

$$\{M^{\Delta T}\} = \sum_{k=1}^n [Q]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \{-\epsilon^{\Delta T}\}_k \quad (6.32)$$

Damit sind  $\{N^{\Delta T}\}$  und  $\{M^{\Delta T}\}$  bekannt, ebenso wie die Lastgrößen in  $\{N\}$  und  $\{M\}$ .

Durch Kehrerung der sogenannten Steifigkeitsmatrix  $[K]$  werden  $\{\hat{\epsilon}\}$  und  $\{-\hat{\chi}\}$  erhalten

$$\begin{Bmatrix} \hat{\epsilon} \\ -\hat{\chi} \end{Bmatrix} = [K]^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{Bmatrix} \quad (6.33)$$

Wie mögliche Lagerungsbedingungen in (6.33) einzuarbeiten sind, wird erst Abschnitt 10 vermitteln. Wir können diese Gleichungen hier vorerst als Feldgleichungen ohne Randeinfluß betrachten.

Mit bekannten  $\{\hat{\epsilon}\}$  und  $\{-\hat{\chi}\}$  ist über (6.29) der Vektor  $\{\sigma\}_k$  ermittelbar. Daraus sind schließlich die Spannungen (vgl. auch (6.11) bis (6.19))

$$\{\sigma_{\nu\sigma}\}_k = [T_\sigma]_k^{-1} \{\sigma\}_k \quad (6.34)$$

der einzelnen Schichten berechenbar, und der Festigkeitsnachweis kann durchgeführt werden.

Ein MSV wird sich [Schneider, 1971] im allgemeinen unter thermischer Belastung nicht nur in der Schichtebene verformen, sondern er wird sich außerdem verwölben (Krümmung und Verwindung). Die Dehnungen und damit die Spannungen einer Einzelschicht werden somit auch von der Ortskoordinate  $z$  abhängen. Eine Verwölbung des MSV unter thermischer Beanspruchung ist jedoch auszuschließen, wenn es sich um einen zur Mittelebene symmetrischen Verbund handelt.

Da die Festigkeiten parallel zur Faser meist weit über den Festigkeiten senkrecht zur Faser und über der Schubfestigkeit liegen, [Schneider, 1973], können bei den meisten in der Praxis vorkommenden Belastungsfällen die Wärmespannungen parallel zur Faser vernachlässigt werden.

Zwischenfaserbruch der UD-Schicht, d.h. Matrixbruch oder Grenzflächenbruch, wird durch Zugspannungen  $\sigma_1$  mehr beeinflusst als durch Schubspannungen  $\tau_{\#}$  oder Druckspannungen  $\sigma_1$ . Da bei den betrachteten GFK-Verbunden Erwärmung stets Druckspannungen und Abkühlung stets Zugspannungen senkrecht zur Faser hervorruft, erweist sich die Abkühlung eines GFK-Verbunds als die kritische Temperaturbeanspruchung. Dieser Umstand wird jedoch dadurch gemildert, daß mit sinkender Temperatur auch die Wärmeausdehnungskoeffizienten von Glas und Harz abnehmen und dadurch die Wärmespannungen ebenfalls kleiner werden. Für andere Verbunde ändern sich diese Aussagen im wesentlichen nur quantitativ.

Bild 6.11 zeigt normierte Wärmespannungen in einem GFK-AWV in Abhängigkeit von Faserorientierungswinkel  $\alpha$ .

### 6.3.2 Elastische Symmetrie zur Laminatmittelebene, Biegeschale

Im Falle der elastischen Symmetrie verschwinden die Koppelglieder  $B_{ij}$ , und das kombinierte Platten-Scheiben-Problem wird entkoppelt, wie man in Glg. (6.25) bzw. (6.35) sieht [Whitney/Ashton, 1971]

$$\begin{bmatrix} A & | & 0 \\ \hline 0 & | & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N^{\Delta T} \\ M^{\Delta T} \end{Bmatrix} \quad (6.35)$$

Bei Erwärmung um  $\Delta T$  eines sogenannten symmetrischen Laminates mit gleich dicken Schichten der Orientierungen  $(+\alpha / -\alpha / -\alpha / +\alpha)$  wird also eine Erwärmung im ungestörten Bereich der Schale nur Normalspannungen hervorrufen.

### 6.3.3 Elastische Symmetrie zur Laminatmittelebene, Membranschale

Für die Membranschale oder die Scheibe aus MSV verschwinden bei elastischer Symmetrie zur Laminatmittelebene die Momente und die Verwölbungen in Glg. (6.25). Es verbleibt

$$[A] \{\hat{\epsilon}\} = \{N\} + \{N^{\Delta T}\} \quad (6.36)$$

Wenn, wie bei der Membranschale üblich, statt mit den Schnittgrößen mit den Laminat(mittel)spannungen gerechnet wird, dann lautet die vorstehende Gleichung

$$[A] \{\hat{\epsilon}\} = \frac{1}{t} (\{\hat{\sigma}\} + \{\hat{\sigma}^{\Delta T}\}) \quad (6.37a)$$

oder mit den Temperaturdehnungen

$$[A] \{\hat{\epsilon}\} = \frac{1}{t} \{\hat{\sigma}\} + [A] \{\hat{\epsilon}^{\Delta T}\} \quad (6.37b)$$

\* In Glg. (6.37 a) ist  $\{\hat{\sigma}\}$  durch die äußere Belastung bekannt. Die Matrix  $t \cdot [A]$  entspricht der Steifigkeitsmatrix  $[\hat{Q}] = [\hat{S}]^{-1}$ , die sich laut Abschnitt 5 aus den Schichtanteilen

$$\frac{1}{t} [A] = [\hat{Q}] = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} [Q]_k = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} [T\sigma]_k [Q_{\text{unb}}]_k [T\sigma]^T \quad (6.38)$$

errechnet.

Die Matrix  $\{\hat{\epsilon}^{\Delta T}\}$  ergibt sich aus Glg. (6.18). Hiermit ist die Gesamtdehnung  $\{\hat{\epsilon}\}$  berechenbar. Über die Kompatibilitätsbedingung  $\{\hat{\epsilon}\} = \{\epsilon\}_k$

können -wie schon getan- die Schichtdehnungen errechnet werden. Aus diesen sind dann die hauptachsen-bezogenen Schichtspannungen mit Glg. (6.28) ermittelbar

$$\{\sigma\}_k = [Q]_k (\{\epsilon\}_k - \{\epsilon^{\Delta T}\}_k) = [T_\sigma]_k \{\sigma_{ud}\}_k \quad (6.39)$$

und schließlich mit Hilfe der Spannungs-Dehnungsbeziehungen und einer Beziehung aus Abschnitt 5.6.1 die Schichtspannungen in den jeweiligen Orthotropierichtungen

$$\begin{aligned} \{\sigma_{ud}\}_k &= [T_\sigma]_k^{-1} [Q]_k (\{\epsilon\}_k - \{\epsilon^{\Delta T}\}_k) = [T_\sigma]_k^{-1} [Q]_k (\{\hat{\epsilon}\} - \{\epsilon^{\Delta T}\}_k) \\ &= [T_\sigma]_k^{-1} [T_\sigma]_k [Q_{ud}]_k [T_\sigma]_k^T (\{\hat{\epsilon}\} - \{\epsilon^{\Delta T}\}_k) \\ &= [Q_{ud}]_k [T_\sigma]_k^T (\{\hat{\epsilon}\} - \{\epsilon^{\Delta T}\}_k). \end{aligned} \quad (6.40)$$

#### 6.3.4 Elastische Unsymmetrie zur Laminatmittelebene

Bei unsymmetrischen Laminaten, aber auch bei antimetrischen, wie z.B. den Schichtorientierungen  $(+90^\circ, -\alpha, +\alpha, -90^\circ)$ , werden (s. [Whitney/Ashton])  $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = 0$ .

Als Kopplungsglieder verbleiben  $B_{16}$  und  $B_{26}$ .

Für gleichförmige Wärmeausdehnung in jeder der Schichten werden  $N_{12}^{\Delta T} = M_1^{\Delta T} = M_2^{\Delta T} = 0$ .

Wenn keine äußeren Scheibenkräfte wirken, erhalten wir

$$N_1^{\Delta T} = -N_1, \quad N_2^{\Delta T} = -N_2 \quad \text{und} \quad N_{12} = 0.$$

#### 6.3.5 Temperaturunterschied zwischen den einzelnen Schichten

Ist die Temperatur über der Schalendicke veränderlich oder muß angenommen werden, daß sich nur eine Außenschicht erwärmt (Temperaturschock), so ist statt der Glg. (6.5) die Glg. (6.6) anzuwenden.

Bei diesem Temperaturlastfall kommt es auch bei vorhandener elastischer Symmetrie zur Laminatmittelebene zu einer Verwölbung unter dem im Laminat vorliegenden Eigenspannungszustand.

### 6.4. Experimentelle Ermittlung von Wärmeausdehnungskoeffizienten

#### 6.4.1 Harz- und Faserwerte

Wesentliche Eingangsgröße zur Ermittlung der WAK des Verbundes ist

die Kenntnis der in den Komponenten Faser und Matrix vorliegenden Werte. Wie diese Werte bestimmt werden, soll nicht Gegenstand dieses Kapitels sein, sondern die Angabe einer Tabelle, in welchem Bereich die WAK der normalerweise verwendeten Harze und Fasern liegen.

Die Werte in Tab. 2.1 und Tab. 2.4 zeigen, daß die dort aufgeführten Faserwerte im Raumtemperaturbereich deutlich unter den Harzwerten liegen. Es ist hier aber noch zu bemerken, daß der jeweils vorliegende Temperaturbereich -in dem im allgemeinen mit einem linearisierten WAK gerechnet wird- großen Einfluß auf Betrag und auch Vorzeichen des WAK nimmt.

#### 6.4.2 Versuchsbeschreibung für Verbundproben

Am Beispiel von CFK-Laminat-Proben soll eine Beschreibung der Probenherstellung und der Messung angeführt werden [Althof]. Mit Fasern und Harzen werden im Wickelverfahren Prepregs hergestellt, bestehend aus einer Lage getränkter Kohlenstoffäden. Diese Prepregs werden in einer Preßform in der gewünschten Orientierungsrichtung übereinandergeschichtet und in einer beheizten Presse zu mehrschichtigen Platten gepreßt. Die Preßzeit beträgt ca. 2 h bei + 160° C. Nach dem Pressen werden die Platten für weitere 15 h bei + 180° C nachgehärtet. Aus den Platten werden Streifen geschnitten, die mit Hilfe des Laminierharzes zu den endgültigen <sup>unterschiedlichen</sup> Verbundproben verklebt werden.

Der Fasergehalt der Verbundproben wird durch Veraschen des Harzes zu ca. 60 Vol. % ermittelt. Die Aufheizung findet unter langsamer Wärmezufuhr in einem Ofen statt. Die Längenänderung wird in einem Quarzglas-Dilatometer gemessen.

Aus den Versuchsdiagrammen werden bei bestimmten Temperaturen die Längenänderungen  $\Delta L$  der Probekörper abgegriffen und daraus die Dehnung bei bestimmter Temperatur

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\Delta L(\Delta T)}{L_0(\tau_0)} \quad (6.41)$$

berechnet. Dabei ist  $L_0$  die Ursprungslänge bei bestimmter Anfangstemperatur  $T_0$ .

Der Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha(T)$  des Probekörpers errechnet sich dann für einen Temperaturbereich  $\Delta T$  zu (aus [Althof])

$$\alpha(\Delta T) = \frac{\varepsilon(\Delta T)}{\Delta T} + \alpha_a \quad (6.42)$$

Hierin ist  $\alpha_a$  der Wärmeausdehnungskoeffizient des Dilatometer-Quarzrohres; er beträgt nach vorgenannter Literatur für den Temperaturbereich von Raumtemperatur bis  $+150^\circ\text{C}$  im Mittel

$$\alpha_a = 0,55 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}.$$

### 6.4.3 Versuchsergebnisse und theoretische Werte für CFK-Lamine

Vor der experimentellen Bestimmung der Laminatgrößen in [Althof] werden die WAK der Harzmatrix ermittelt.

Für eine Epoxid-Harzmatrix sind Dehnung und Temperatur für den geprüften Temperaturbereich zwischen  $20^\circ\text{C}$  und  $150^\circ\text{C}$  in Bild 6.12 eingetragen. Aus den Anfangs- und Endwerten für diese Temperaturen errechnete sich der WAK zu

$$\alpha_M = 66,55 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C} \quad (\text{Im Bereich } 20^\circ\text{C bis } 150^\circ\text{C}).$$

Der Wert stammt aus den Messungen zweier Probekörper.

In Bild 6.13 sind für jeweils eine geprüfte unidirektionale Schicht die ermittelten Dehnungen im Temperaturbereich zwischen Raumtemperatur und  $+180^\circ\text{C}$  eingetragen. Die  $0^\circ$ -Lamine zeigen negative Dehnung; bei  $20^\circ$ -Orientierung ist die Dehnung jedoch bereits positiv und wird größer mit zunehmendem Orientierungswinkel.

Von besonderer Bedeutung ist, daß das Verhältnis  $d\varepsilon/dT$  mit Ausnahme der  $0^\circ$ -Orientierung nicht konstant ist. Die Unproportionalität wächst mit zunehmendem Orientierungswinkel.

Bei der Berechnung der Wärmeausdehnungskoeffizienten der einzelnen Lamine wurden wegen der beobachteten Unproportionalität nur die Meßwerte bei Ausgangstemperatur und bei  $+150^\circ\text{C}$  verwendet. Der ermittelte Wärmeausdehnungskoeffizient ist somit ein "Sekanten-Wert".

In Bild 6.14 sind die ermittelten Dehnungen bidirektionaler Lamine in Abhängigkeit von der Temperatur eingetragen. Bei  $\pm 10^\circ$ -,  $\pm 20^\circ$ - und  $\pm 30^\circ$ -Laminen ist die Dehnung negativ, bei  $\pm 45^\circ$ -,  $\pm 60^\circ$ - und  $\pm 75^\circ$ -Laminen jedoch positiv.

Wiederum ist eine Unproportionalität zwischen Dehnung und Temperatur festzustellen, die allerdings bei den  $\pm 10^\circ$ -,  $\pm 20^\circ$ - und  $\pm 45^\circ$ -Laminen vernachlässigbar klein ist.



Außerdem ist bei  $\pm 60^\circ$ - und  $\pm 75^\circ$ -Laminaten ein kleiner Unterschied zwischen den ansteigenden und abfallenden Meßwerten zu beobachten.

Bild 6.15 zeigt die Wärmedehnungen der geprüften multidirektionalen Lamine. Alle Lamine haben negative Dehnung und vernachlässigbar kleine Unproportionalität von Temperatur und Dehnung. Der Unterschied zwischen ansteigenden und abfallenden Temperaturen ist ebenfalls klein.

Bei uni- und bidirektionalem CFK mit Lagenorientierungen <sup>größer</sup>  $45^\circ$  zur Längsachse besteht keine Proportionalität zwischen Temperatur- und Dehnungsänderung. Da dies auch beim unverstärkten Matrixharz der Fall ist, nehmen <sup>wohl</sup> Lamine mit großem Orientierungswinkel diese Eigenart an [Althof].

Bei multidirektionalen Laminaten mit  $0^\circ$ -Einlagen, sowie bei uni- und bidirektionalen mit Orientierungswinkeln <sup>kleiner</sup>  $45^\circ$  ist im geprüften Temperaturbereich zwischen  $+ 20$  und  $+ 180^\circ$  C die Wärmeausdehnung jedoch konstant und wird vornehmlich durch den kleinen Wärmeausdehnungskoeffizienten der Kohlenstofffaser bestimmt.

Bild 6.16 zeigt zusammenfassend die ermittelten Wärmeausdehnungskoeffizienten für den Temperaturbereich zwischen  $+ 20$  und  $+ 150^\circ$  C in Abhängigkeit vom Faserorientierungswinkel. Sie liegen zwischen den Grenzen  $\hat{\alpha}_1 = - 5 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$  für  $\pm 30^\circ$ -Lamine und  $\hat{\alpha}_1 = + 50 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$  für  $90^\circ$ -Lamine. Der Laminataufbau (des schwarzen Quadrates) der Proben C ist z.B.  $[+ 20/0/- 20/0/ +20/0/- 20/0 \ 0/ - 20/0/ + 20/0/ - 20/0/ + 20]$ , wobei alle Schichten gleich dick sind.

Im Anschluß an diese rein experimentellen Untersuchungen sollen noch die Versuchsergebnisse besprochen werden, die zum Vergleich in die theoretischen Ergebnisbilder eingetragen werden, hier für CFK und im nächsten Abschnitt für GFK.

Eine ebenfalls gute Übereinstimmung ist für CFK-AWV [Fahmy/Ragai, 1974] in Bild 6.9 für  $\hat{\alpha}_3$  zu verzeichnen. Man sieht in diesem Fall, daß der WAK in Dickenrichtung für den betrachteten AWV bei  $\alpha = 45^\circ$  um ca. 80 % höher liegt als für die symmetrischen Werte  $0^\circ$  und  $90^\circ$ .

In [Fahmy/Ragai, 1970] wurde für CFK-MSV im Temperaturbereich  $+ 20^\circ$  C bis  $+ 180^\circ$  C der WAK  $\hat{\alpha}_1$  für  $100^\circ$  C festgestellt. Bild 6.5 zeigte

rechts die Versuchsergebnisse für CFK-AWV. Wesentlich ist, daß  $\hat{\alpha}_1(\alpha)$  in Bild 6.5 a ebenfalls negativ bleibt bis zu Winkeln von  $30^\circ$  und bei  $15^\circ$  sein Minimum erreicht. Diese Gegebenheit wird von anderen Autoren ebenfalls gefunden z.B. von Hartwig bei der Untersuchung quellender FK infolge Feuchtigkeitsaufnahme.

Die vorstehenden Bilder wurden mit den Werten  $E_{||} = 46 \cdot 10^6$  psi,  $E_{\perp} = 0,7 \cdot 10^6$  psi,  $G_{\#} = 1,2 \cdot 10^6$  psi,  $\nu_{||} = 0,25$  ermittelt, wobei allerdings nur  $E_{||}$  und  $\nu_{||}$  relativ zuverlässig sind. Der Unterschied zwischen gemessenen und berechneten Kurven wird von Fahmy/Ragai mit möglichen ungenauen Werten  $E_{\perp}$  und  $G_{\#}$  erklärt, was sich besonders beim dreischichtigen Verbund bemerkbar machte.

Bei den Versuchen wurden von Fahmy/Ragai außerdem bei MSV ein leichter Hystereseeffekt festgestellt, jedoch nicht bei UDV. Dieser Effekt verschwindet nahezu nach dem ersten Temperaturzyklus. Die Werte wurden deswegen als Durchschnittswerte erst nach diesem ersten Zyklus für Aufheizen und Abkühlen ermittelt. Es wird von ihnen vermutet, daß der Hystereseeffekt nicht durch Spannungsrelaxation in, sondern zwischen den einzelnen Schichten bewirkt wird.

Der Wert in Dickenrichtung wurde in Bild 6.9 für  $\alpha = 0^\circ$  für einen UDV aus Chemstrandfasern experimentell zu  $\hat{\alpha}_3 = 55 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$  gefunden, was praktisch  $\alpha_{\perp}$  entspricht.

In [Mc Neill] wurden für die  $0^\circ$  und  $90^\circ$ -Richtungen von CFK-UDV die WAK  $\alpha_{||}$  und  $\alpha_{\perp}$  aus den Längenänderungswerten ermittelt. Der Meßbereich lag zwischen  $-320^\circ\text{F}$  und  $+350^\circ\text{F}$ . Es errechnet sich nach Bild 6.17 für den Bereich  $77^\circ\text{F}$  ( $+22^\circ\text{C}$ ) bis  $175^\circ\text{F}$  ( $+79^\circ\text{C}$ )

$$\alpha_{\perp} (= \alpha_{90^\circ}) = \frac{\Delta \epsilon}{\Delta T} = \frac{+22 \cdot 10^{-4}}{+99^\circ\text{F}} = 22,2 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{F} = 12,7 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$$

Als spezieller Verbund wurde von Mc Neill das Hercules 2002 M Laminat mit den Werkstoffwerten  $E_{||} = 17,6 \cdot 10^4$  N/mm<sup>2</sup>,  $E_{\perp} = 0,70 \cdot 10^4$  N/mm<sup>2</sup>,  $G_{\#} = 0,46$  N/mm<sup>2</sup> und  $\nu_{||} = 0,30$  untersucht.

Bei thermischen Größen (und wie hier nicht gezeigt auch bei der elektrischen Leitfähigkeit) ist bei CFK z.B. bis zu Faserablageabweichungen von  $11^\circ$  die Differenz gegenüber den Longitudinalwerten kleiner 4 %. Ebenfalls umgekehrt zu den Elastizitätsgrößen ist der Einfluß in Querrichtung [Knibbs/Morris] recht groß.

#### 6.4.4 Versuchsergebnisse und theoretische Kurven für einige GFK-Lamine

Das Aufsuchen der WAK von GFK-Laminaten geschieht wie zuvor bei den CFK.

Für die neben Bild 6.2 angegebenen Werkstoffwerte ist von W. Schnei-

der der rechnerische Verlauf von  $\alpha_{11}$  und  $\alpha_{12}$  über dem Fasergehalt  $\varphi$  ermittelt worden. Die Meßpunkte beziehen sich auf UD-Lamine aus E-Glas-Rovings und Epoxidharz. Im Glasgehaltsbereich technisch üblicher UD-GFK-Lamine (30 % bis 75 %) besteht eine gute Übereinstimmung zwischen berechneten und gemessenen Werten. Für Bereiche geringen Glasvolumenanteils ist zu vermuten, daß die gemessenen Werte unter der theoretischen Kurve liegen, da die Glasfaserverteilung mit sinkendem Glasvolumenanteil  $\varphi$  immer mehr von der hexagonalen Anordnung abweicht, ein Zusammenbacken einzelner Rovingstränge erfolgt, und somit die Verformungen von Faser und Matrix durch Wärmespannungen kleiner werden.

Die WAK von GFK-UDV und -AWV in Abhängigkeit vom Faserorientierungswinkel  $\alpha$  für dieselben Werkstoffe wie in Bild 6.2 sind in Bild 6.3 (aus [Schneider, 1971]) zu finden. Es zeigt sich, daß für  $\varphi = 0,55$  bei AWV die Meßergebnisse sich erheblich von den rechnerischen Werten unterscheiden. Der Grund könnte in dem grundsätzlich nicht-symmetrischen Aufbau eines AWV liegen ( $+\alpha / -\alpha$ ), aber nicht z.B. ( $+\alpha / -\alpha / -\alpha / +\alpha /$ ), in dem dann von der Ortskoordinate  $z$  abhängige Schubverformungen auftreten die eine Verwölbung des Querschnittes bewirken.

Einen Zusammenhang des WAK  $\hat{\alpha}_{11}$  für AWV veränderlicher Orientierungswinkel und unterschiedliche Fasergehalte zeigt Bild 6.4. Auch hier liegen wieder größere Unterschiede zu den Meßwerten vor. Zu beachten ist, daß für die untersuchten Faservolumenanteile bei  $\alpha = 30^\circ$  der WAK  $\hat{\alpha}_{11}$  sehr stark ansteigt, und zwar um so mehr, je größer der Harzanteil ist.

In Bild 6.18, [Hartwig], wurden die WAK des Epoxidharzsystems Araldit X 183/2476; HY 905; DY 062 im Verhältnis 100:130:2 Gewichtsteile und der Glasfaser-Rovings Typ OCF 859 - 8.85 tex der Fa. Owens Fiberglass aufgetragen. Dabei kann der Wert der Glasfaser nur indirekt über eine GFK-Probe gemessen werden. Seine Abhängigkeit von der Temperatur wird aus der Kontraktion der GFK-Probe mit Faserichtung parallel zur Meßrichtung bestimmt. Bei bekannter Ausdehnung des Matrixmaterials kann dann aus Glg. (6.10) die Ausdehnung der Glasfasern bestimmt werden. Als wesentliches Ergebnis ist aus den Kurven der Abfall der WAK auf Null für  $0^\circ \text{ K}$  abzulesen.

In Bild 6.19 sind die WAK für UDV bei zwei verschiedenen Temperaturen über dem Faserorientierungswinkel aufgezeichnet. Es zeigt sich, daß durch Variation des Winkels der WAK um den Faktor drei verändert werden kann.

Die thermische Kontraktion von GFK-AWV bei unterschiedlichen Winkeln, symmetrisch zur Meßrichtung und bei verschiedenen Glasfaseranteilen gemessen, zeigt Bild 6.20. Der WAK nimmt mit tiefer werdenden Temperaturen ab und erreicht bei Heliumtemperatur asymptotisch den Wert Null. Die Übereinstimmung mit theoretischen Rechnungen ist gut.

Beim Vergleichen von Versuchsergebnissen mit denselben Harzen ist es wegen des Einflusses der Vernetzung wichtig zu wissen, welchem Härungszyklus das Harz unterworfen wurde.

#### 6.4.5 Versuchsergebnisse für ChFK (Kevlar 49-I)-UDV

Von Hoggatt wurden die Ausdehnungskoeffizienten von UDV in Faserichtung und quer dazu gemessen. Als Proben dienten für die Längsmessungen Stäbe der Abmessungen 2" x 0,1" x 0,1" und für die Quermessungen 0,25" lang, 0,25" breit 0,1" dick.

Bild 6.21 zeigt den Verlauf der Meßwerte der durchschnittlichen Dehnungen. Die WAK wurden für den Temperaturbereich - 252° C bis + 149° C ermittelt und in Tabelle 6.1 festgehalten. Wie nach den vorhergehenden Abschnitten zu erwarten ist, beeinträchtigt die Harzsorte das Laminat nur wenig, wenn der  $\alpha_{||}$ -Wert ermittelt wird, für  $\alpha_{\perp}$  ist hingegen der Einfluß erheblich.

Als Harzsysteme wurden verwendet: 1. ERLA 4617/CI (27 Gewichtsteile) und 2. Epon 828/DSA/EMPOL-1040/BDMA (im Gewichtsverhältnis 100/115,9 / 20/1,0 Gewichtsteile). Die beim Wickeln verwendeten Wickelzüge betragen minimal 0,8 N/Ende (zur Gewährleistung einer gerade noch ausreichend guten Ablage) und maximal 2,7 N/Ende (sonst Faserschädigung). Die Faserkennwerte waren  $E_F = 15,5 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ ,  $\epsilon_{\text{max}} = 1,4 \%$ ; Durchmesser 11 $\mu\text{m}$ ; 240 Filaments pro Ende;  $\rho_f = 1,44 \text{ g/cm}^3$ .

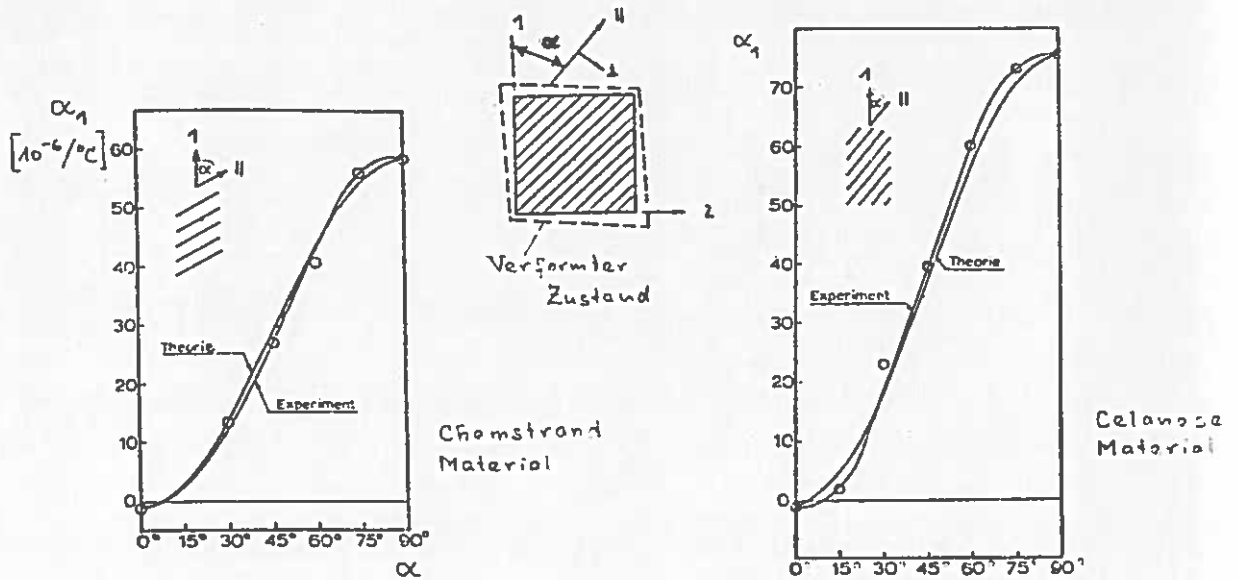


Bild 6.1 WAK für CFK-UDV in Abhängigkeit vom Faserorientierungswinkel ([Fahmy-Ragai], Meßbereich + 20°C bis 160°C; Wertangabe für + 100°C; = 0,65)

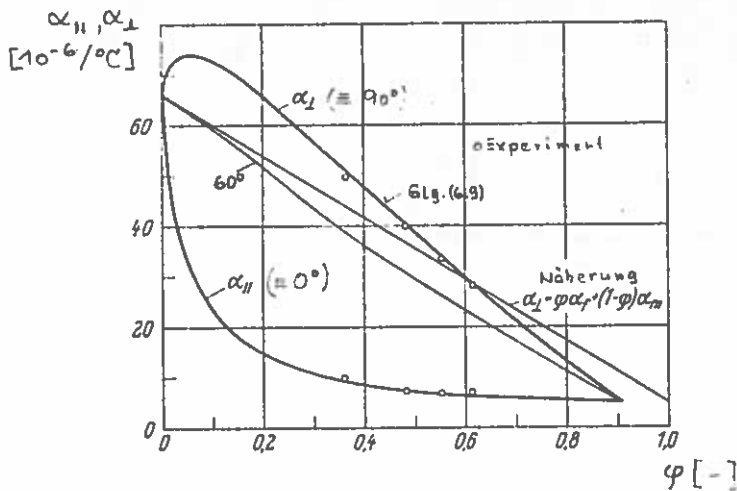


Bild 6.2

WAK  $\alpha_{11}$  und  $\alpha_1$  von GFK-UDV in Abhängigkeit vom Faservolumenanteil ([Schneider, 1971], Temperaturbereich -30°C bis +50°C)

Epoxidharz: Araldit E (CY 232), Härter HY 951, (Ciba-Geigy AG, Basel).  
 Härtung 24 h/50°C.  
 $E_m = 320 \text{ kp/mm}^2$ ,  $\nu_m = 0,4$ ,  $\alpha_m = 66 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ .  
 Roving: ES 9 - 360 x 21 - K 43 (Gevetex GmbH, Düsseldorf)  
 $E_f = 7300 \text{ kp/mm}^2$ ,  $\nu_f = 0,25$ ,  $\alpha_f = 4,8 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ .

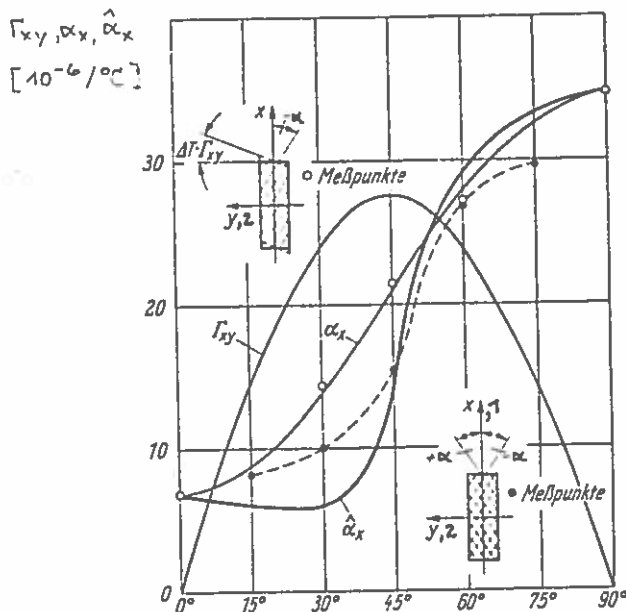


Bild 6.3

WAK von GFK-UDV und GFK-AWV in Abhängigkeit vom Faserorientierungswinkel ([Schneider], 1973,  $\nu = 0,55$ ; Temperaturbereich -30°C bis +50°C, Material wie in Bild 6.2)

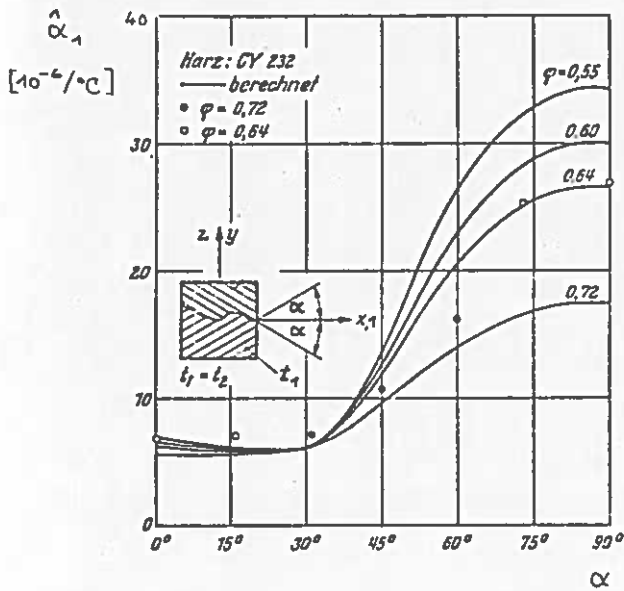


Bild 6.4

WAK von GFK-AWV in Abhängigkeit vom Faserorientierungswinkel  $\alpha$  und vom Faservolumenanteil  $\varphi$  ([Schneider, 1971], Material wie in Bild 6.2)

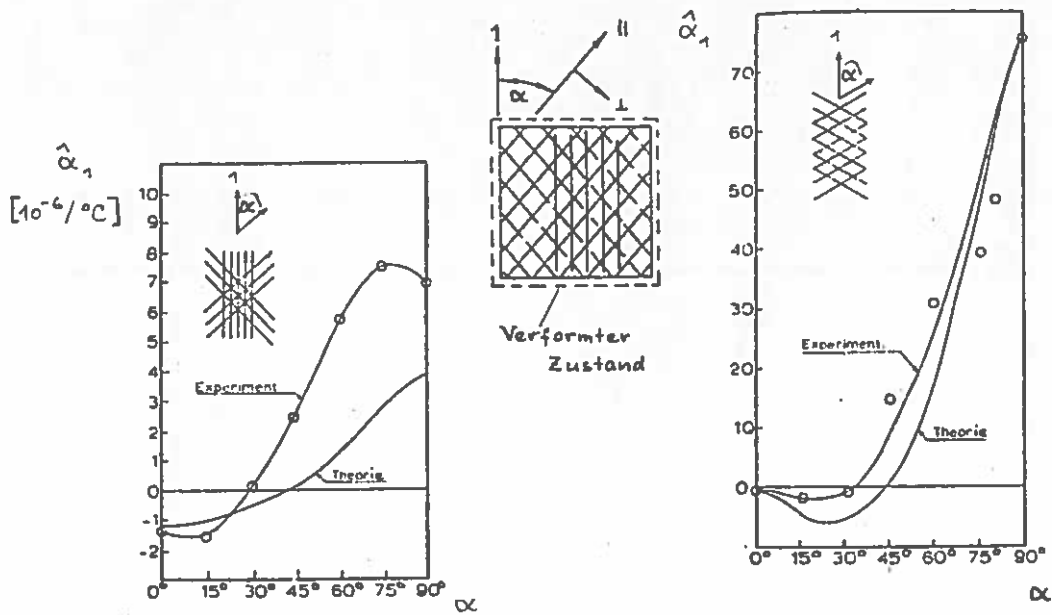


Bild 6.5a WAK für CFK-MSV in Abhängigkeit vom Faserorientierungswinkel  $\alpha$  ([Fahmy, 1970], Meßbereich  $+20^{\circ}\text{C}$  bis  $+180^{\circ}\text{C}$ , Wertangabe für  $+100^{\circ}\text{C}$ ,  $\varphi = 0,65$ ,  $E_{\parallel} = 46 \cdot 10^6 \text{ psi}$ ,  $E_{\perp} = 0,7 \cdot 10^6 \text{ psi}$ ,  $G_{\#} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ psi}$ ,  $\nu_{\perp\parallel} = 0,25$ ,  $\alpha_{\perp} = 75 \cdot 10^6 / ^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha_{\parallel} = -1,3 \cdot 10^{-6} / ^{\circ}\text{C}$ )

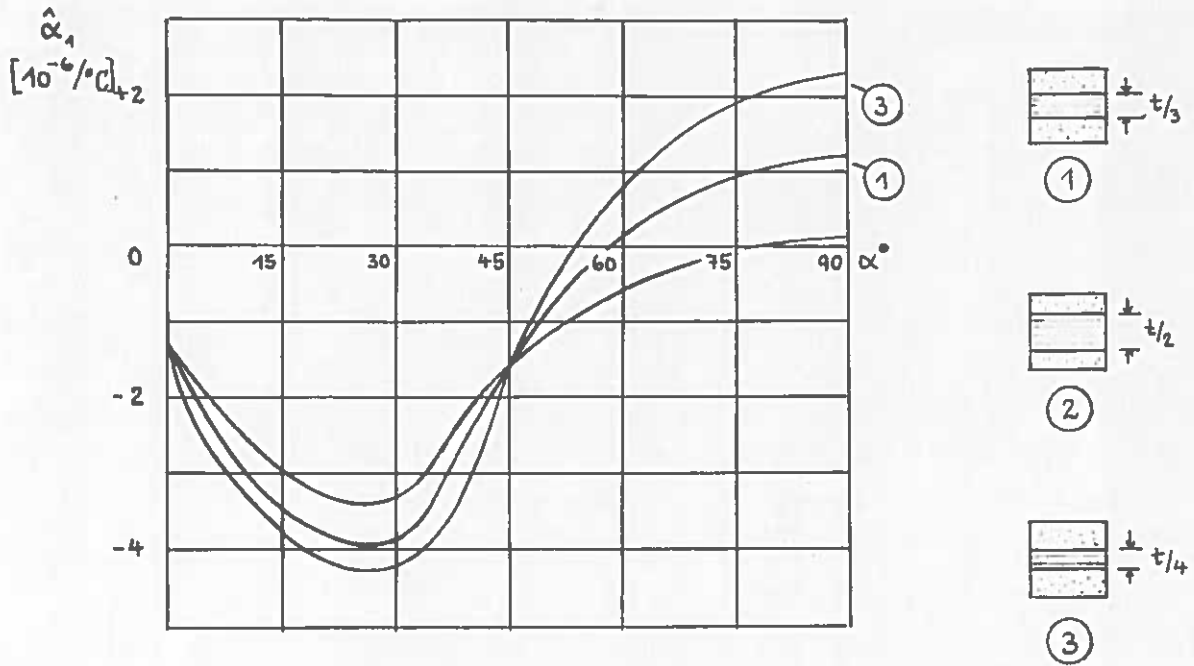


Bild 6.5b Wärmeausdehnungskoeffizient  $\hat{\alpha}_1$  eines 3-schichtigen MSV in Abhängigkeit vom Orientierungswinkel (Werte und Aufbau nach Bild 6.5 a)

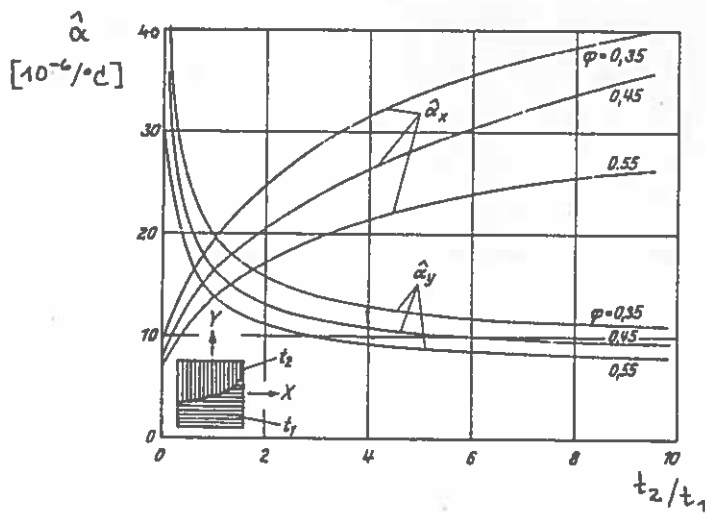


Bild 6.6

WAK von GFK-KV in Abhängigkeit vom Schichtdickenverhältnis [Schneider, 1973]

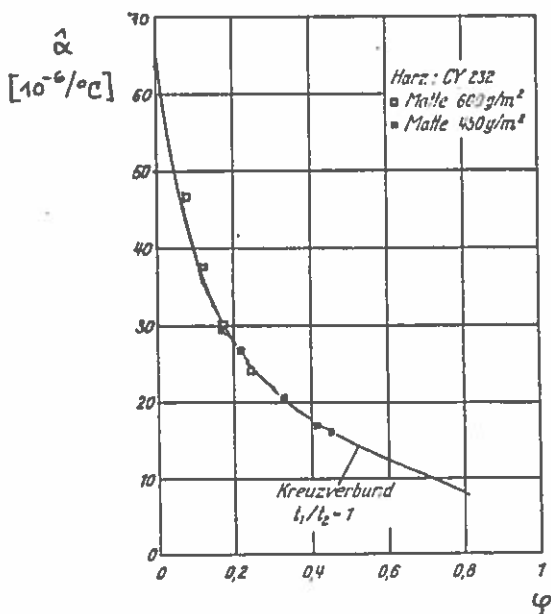


Bild 6.7

WAK von GFK-Matten bzw. GFK-KV in Abhängigkeit vom Faservolumenanteil  $\varphi$  [Schneider, 1973]

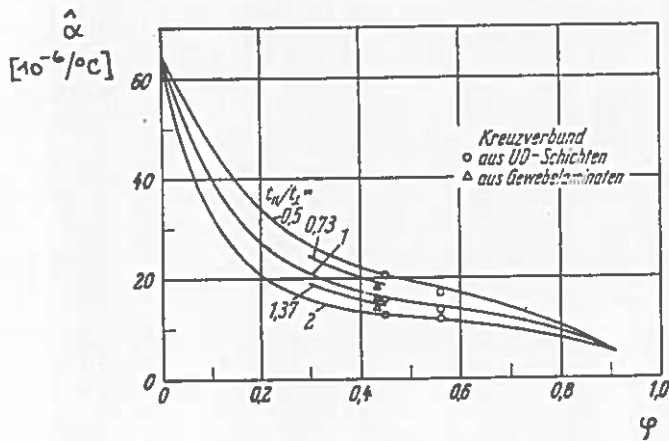


Bild 6.8

WAK von GFK-KV in Abhängigkeit ([Schneider, 1971], Temperaturbereich  $-30^{\circ}\text{C}$  bis  $+50^{\circ}\text{C}$ ) vom Faservolumenanteil

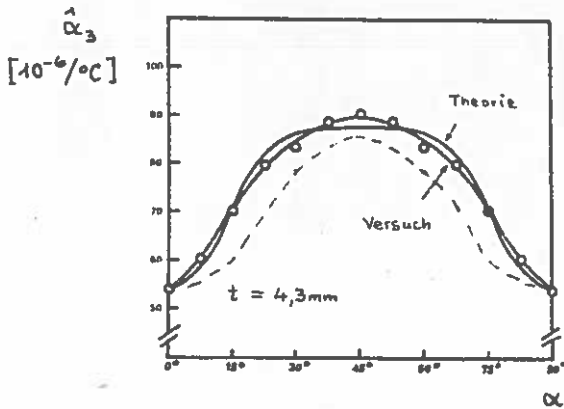


Bild 6.9

WAK in Dickenrichtung eines CFK-AWV in Abhängigkeit vom Faserorientierungswinkel [Fahmy, 1974]

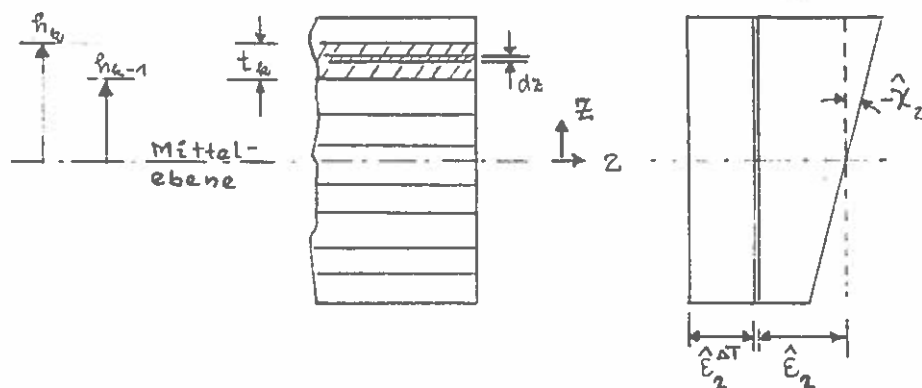


Bild 6.10 Überblick über die Dehnungen bei Temperatur (Bernoulli)



Bild 6.11

Normierte Wärmespannungen im GFK-AWV  
 in Abhängigkeit vom Faserorientierungswinkel  $\alpha$  ([Schneider, 1973]  
 $\psi = 0,55$ ; Temperaturbereich  $-30^{\circ}\text{C}$   
 bis  $50^{\circ}\text{C}$ )

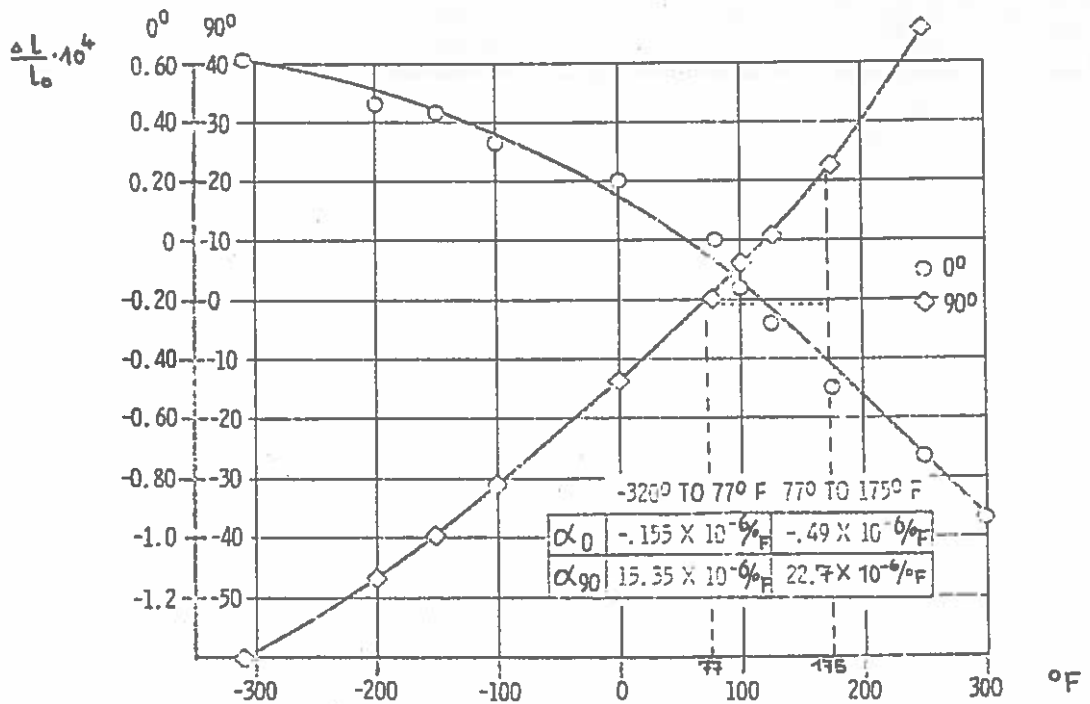
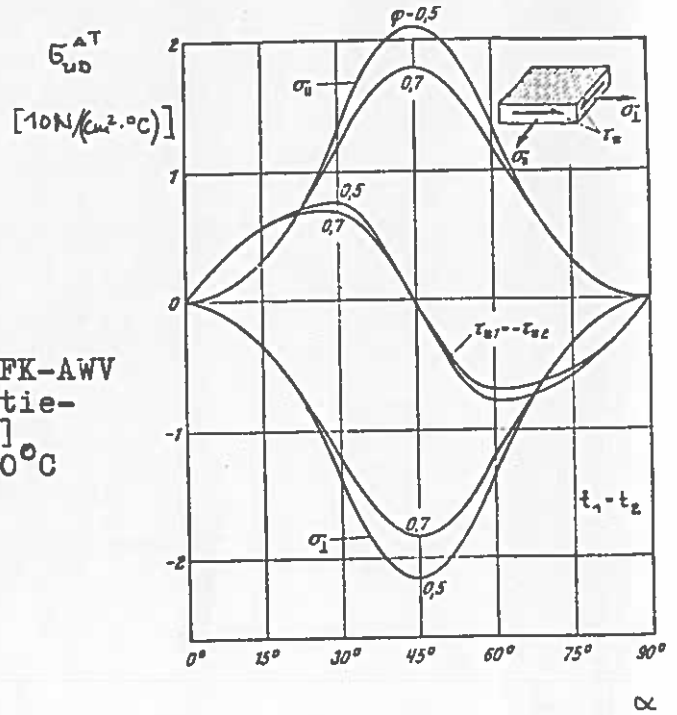


Bild 6.17 Temperaturdehnungen von CFK-UDV  
 ([Mc Neill];  $\psi = 0,51$ ; Hercules 2002 M Laminat,  
 HM-S Faser und BP-907 Harz)

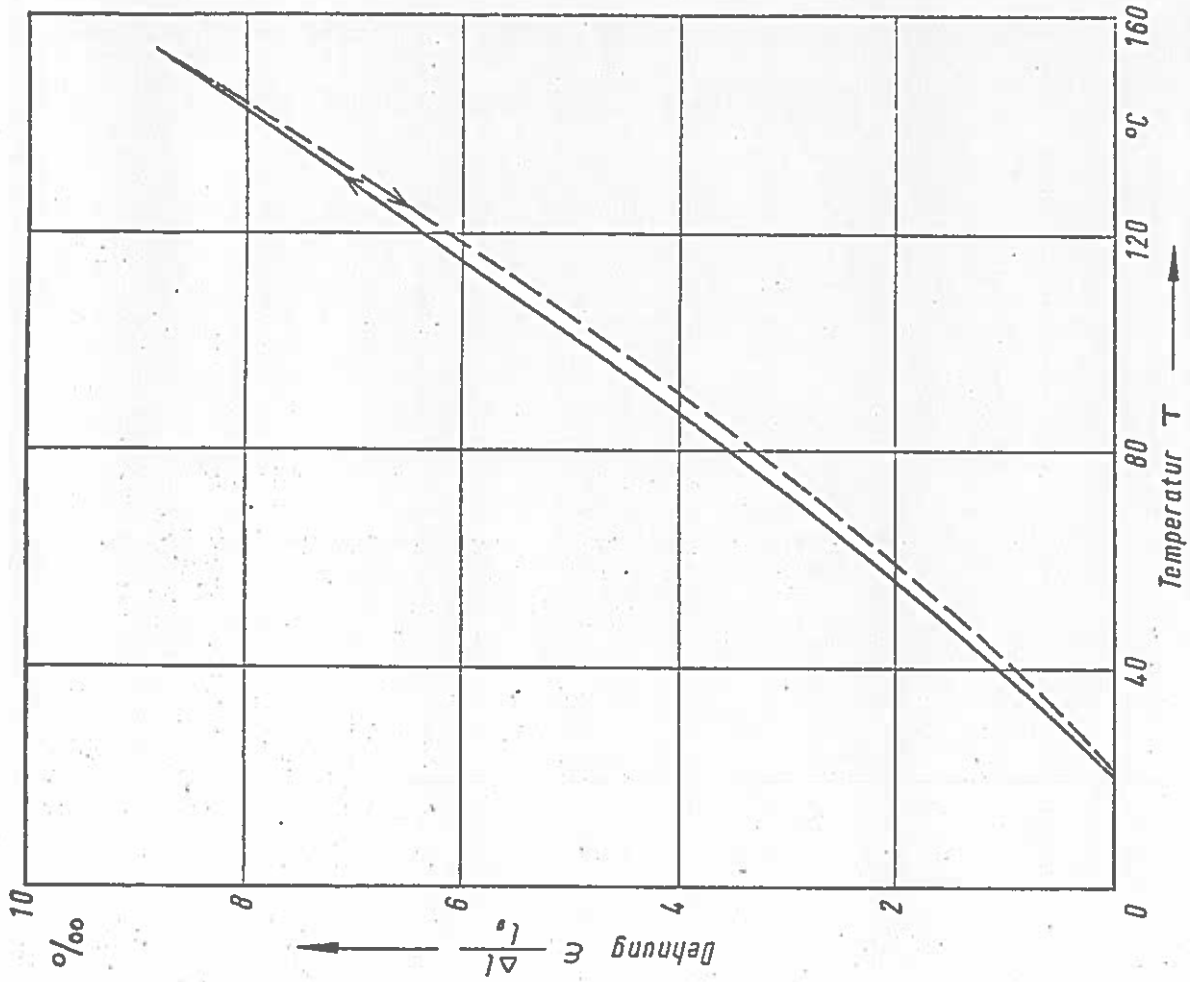


Bild 6.12 Wärmedehnung des Epoxid-Novolak-Matrixharze: [Althof]

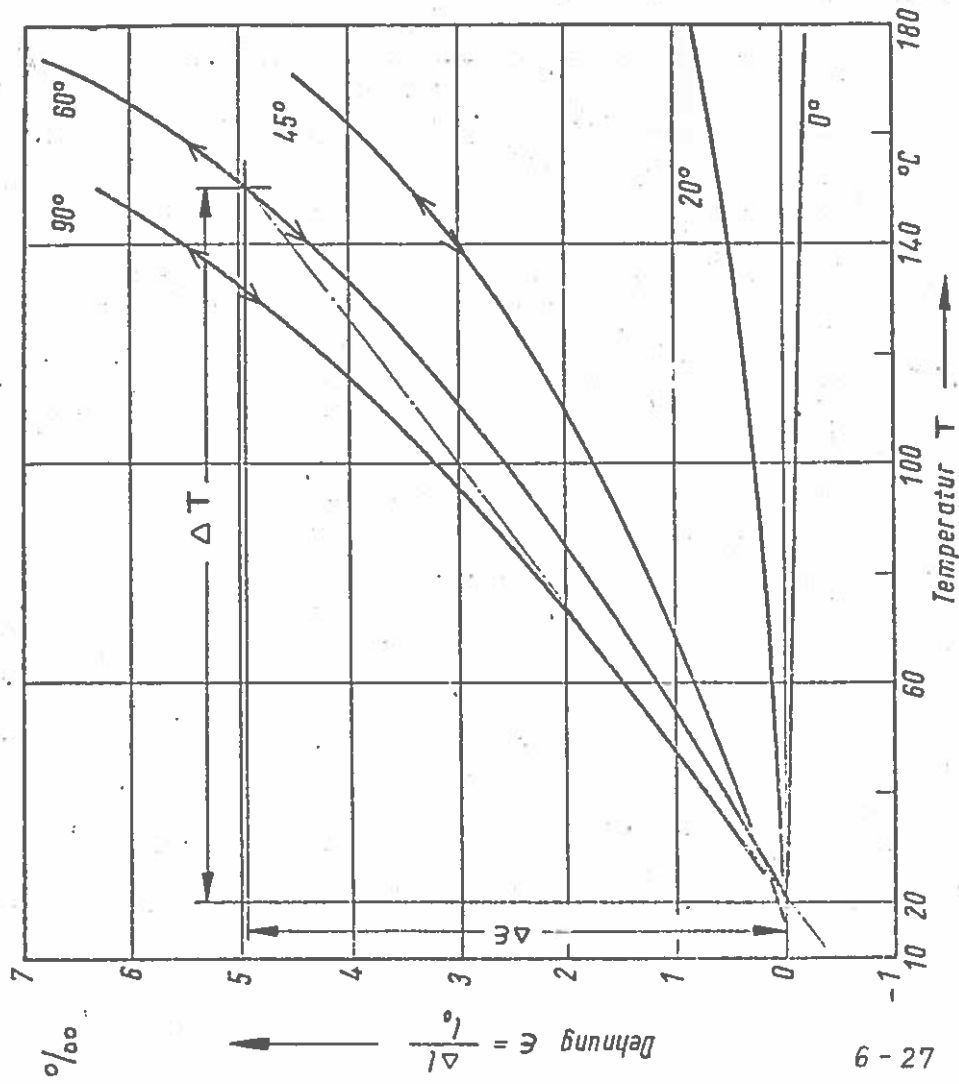


Bild 6.13 Wärmedehnung von CFK-UDV [Althof]

Bild 6.14  
 Wärmedehnung von  
 CFK-AWV [Althof]

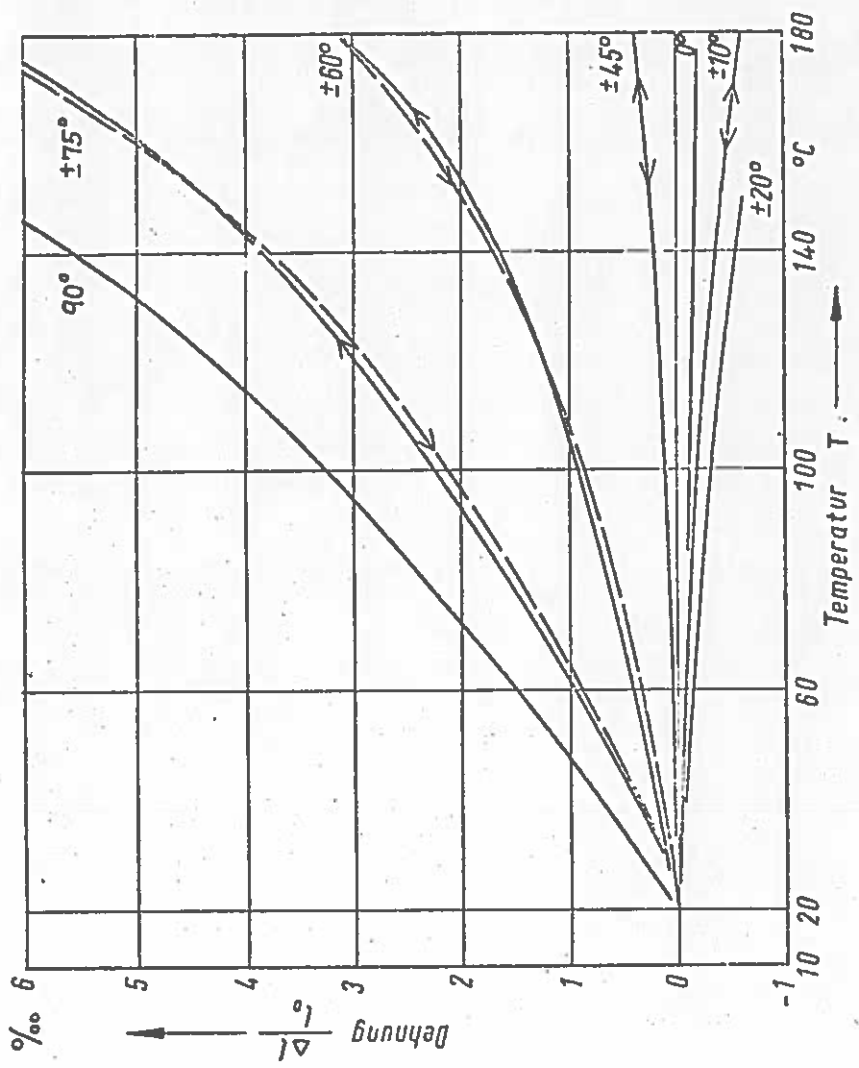
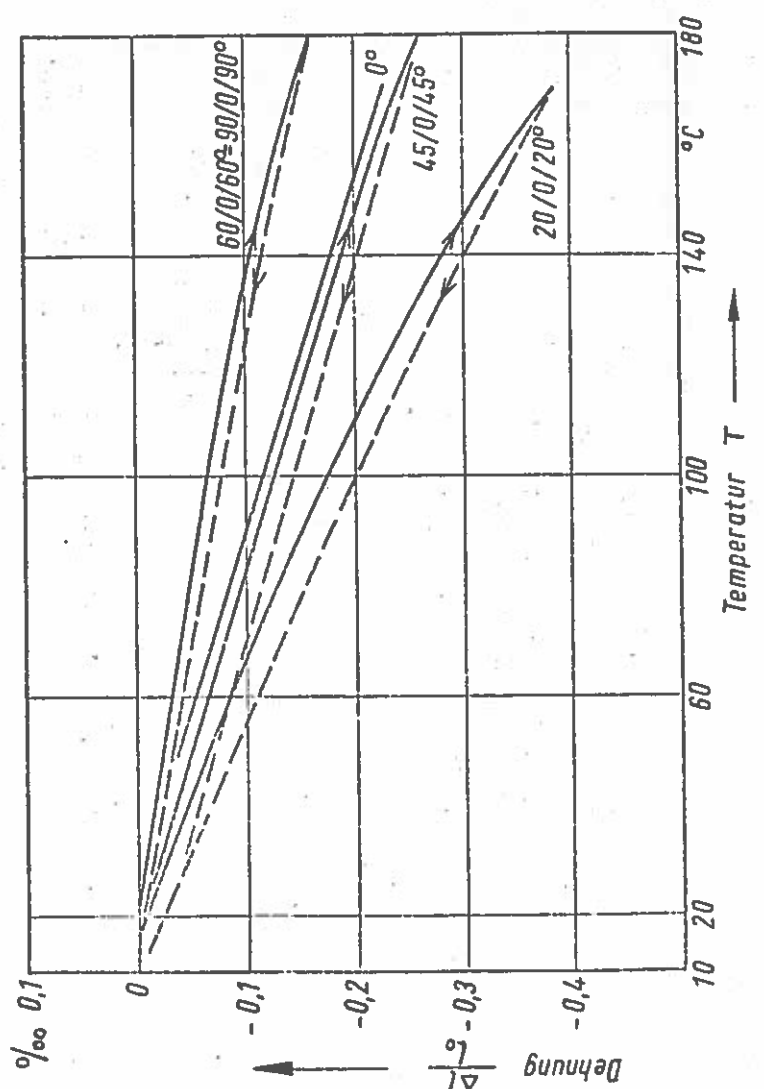


Bild 6.15  
 Wärmedehnung von  
 CFK-MSV [Althof]



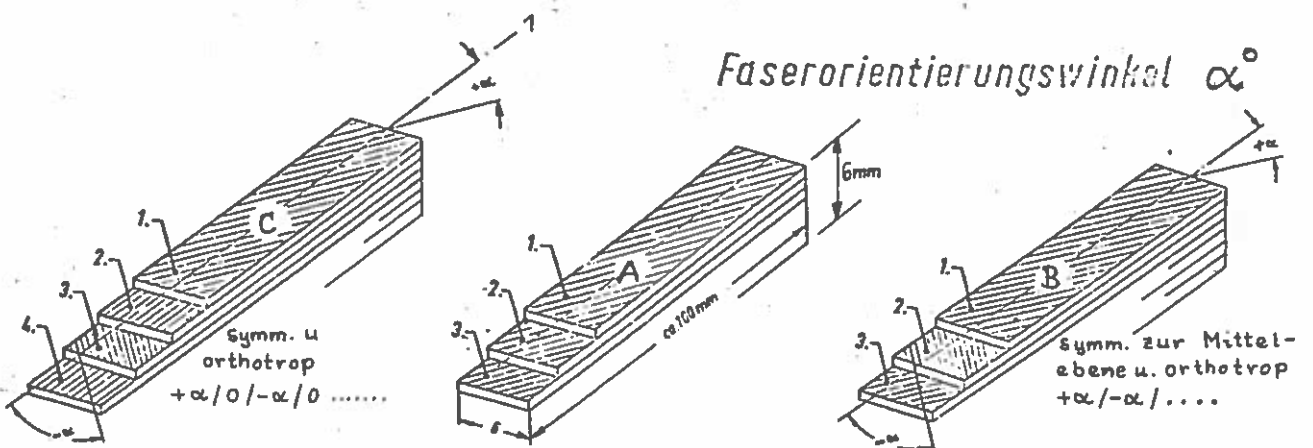
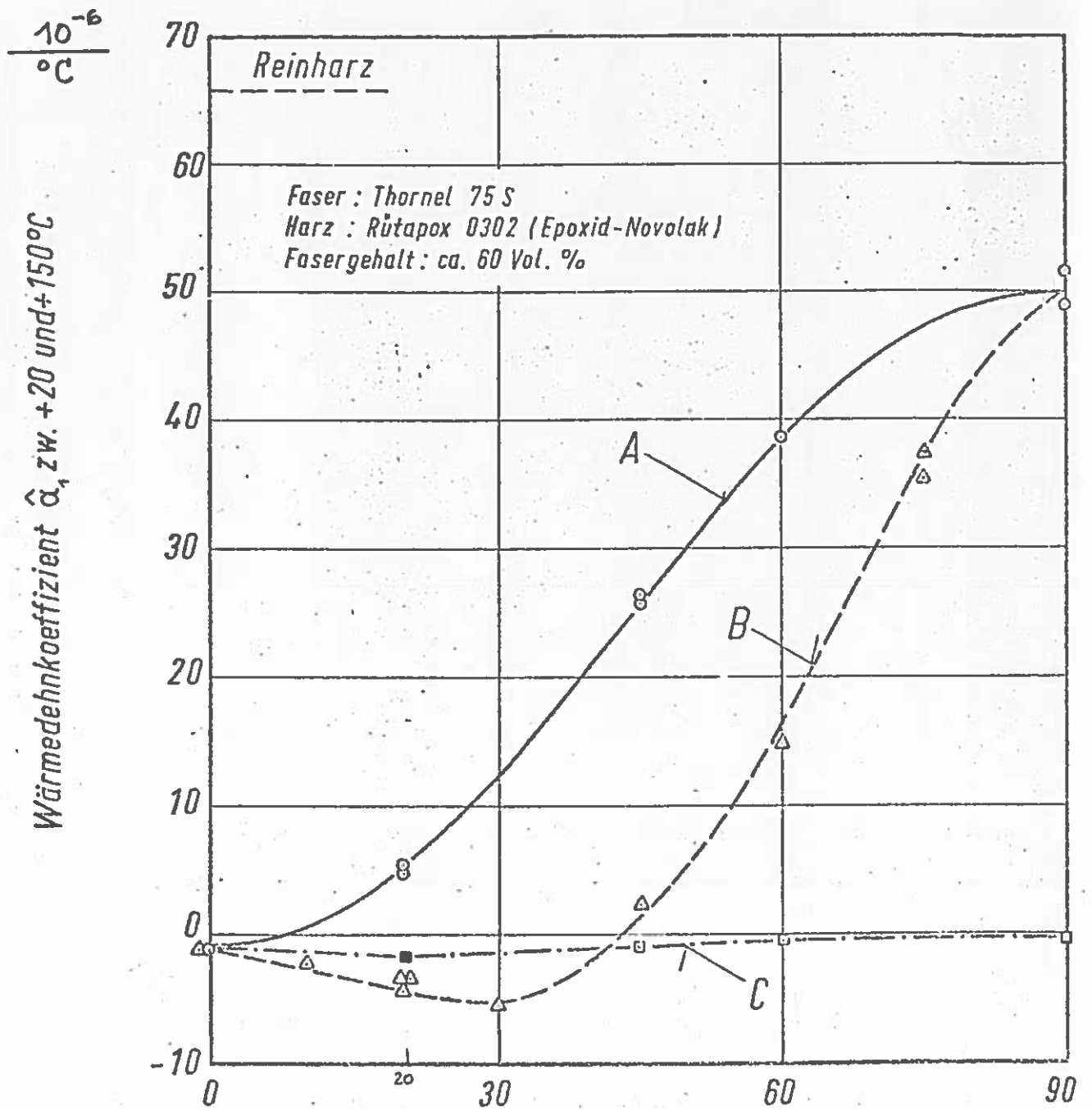


Bild 6.16 Wärmeausdehnungskoeffizienten von CFK bei unterschiedlicher Faserorientierung des Laminats [Althof]

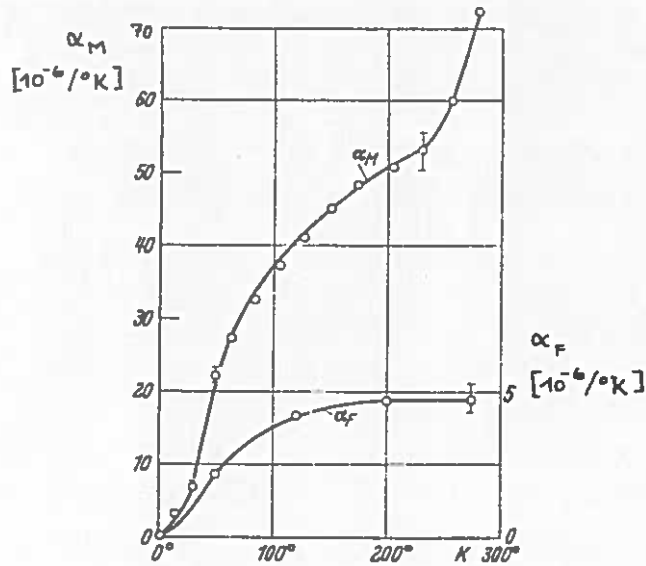


Bild 6.18

WAK des reinen Epoxidharzes und der Glasfaser in Abhängigkeit von der Temperatur [Hartwig]

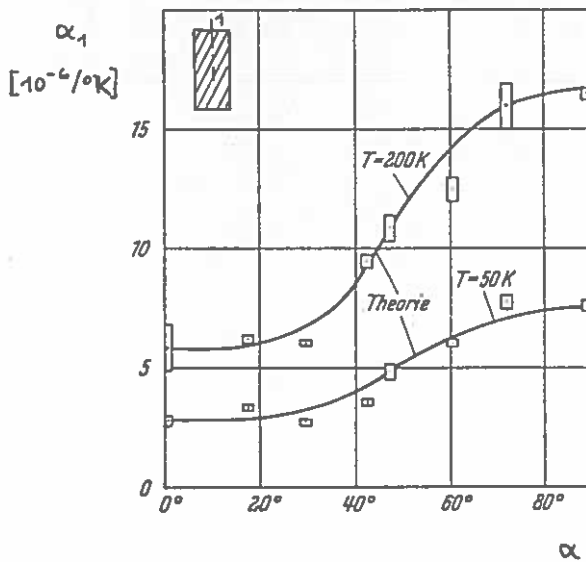


Bild 6.19

WAK von GFK-UDV in Abhängigkeit vom Faserorientierungswinkel bei versch. Temperaturen ([Hartwig],  $\varphi = 0,7$ )

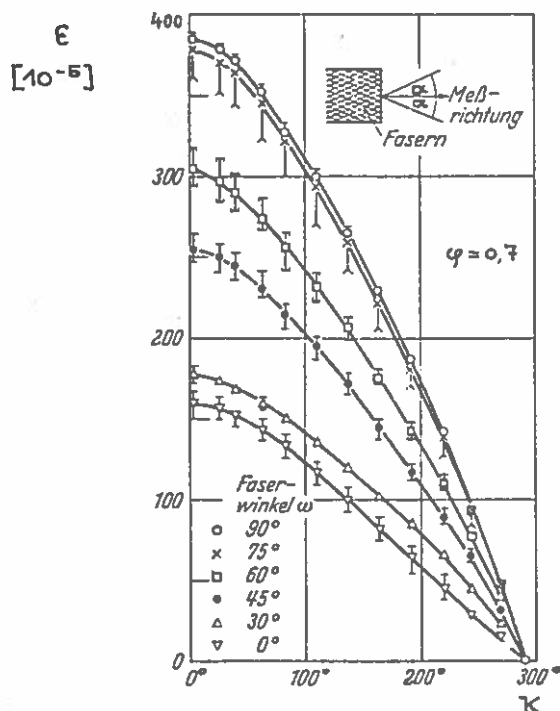


Bild 6.20

Relative Längenänderung in Abhängigkeit von Temperatur und Faserorientierungswinkel [Hartwig]

$$\epsilon = (L_{293} - L_T) / L_{293}$$

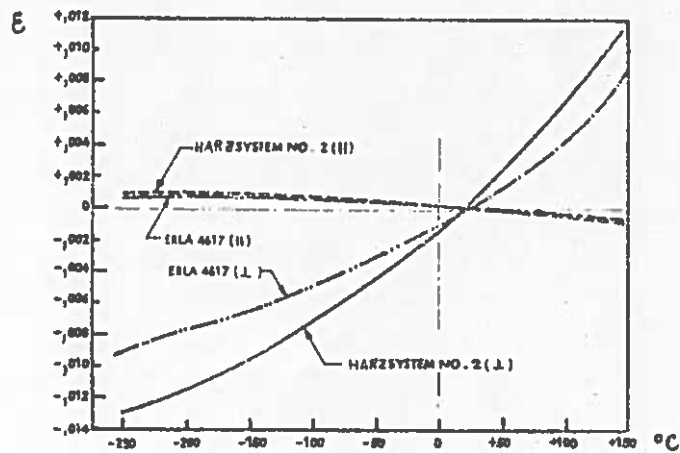


Bild 6.21 Thermische Ausdehnung von ChFK (Kevlar 49-1 Faser)-UDV ([Hoggatt],  $\varphi \approx 0,65$ )

		Temperaturbereich, °C				
		-250° to +150	+100 to +150	-100 to +100	-200 to -100	-250 to -200
ERLA 4617 / Kevlar 49-1 $\varphi \approx 0,65$	$\alpha_{II}$	$-3.68 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$	-6.6	-4.45	-2.7	+1.0
	$\alpha_{\perp}$	+45.0	+101.0	+38.0	+20.0	+30.0
Harz System No. 2/ Kevlar 49-1 $\varphi \approx 0,65$	$\alpha_{II}$	-4.95	-7.6	-5.8	-3.2	0
	$\alpha_{\perp}$	+61.0	+93.0	+56.0	+41.0	+41.0

Tab. 6.1 WAK von ChFK (Kevlar 49-1)-UDV ([Hoggatt])

## 7. Bruchhypothesen und Bruchmechanik

Als Grundforderungen sind bei der Auslegung eines Bauteils zu beachten, daß das Bauteil unter den vorliegenden Betriebs- und Montagebedingungen weder zu Bruch geht, noch zu großen Verformungen unterworfen wird. Welche Verfahren dabei angewendet werden, soll im folgenden Kapitel vorgestellt werden.

### 7.1 Bruch- bzw. Festigkeitshypothesen der Kontinuumsmechanik

Man kann die Kontinuumsmechanik auch als Bruchmechanik riß- und kerbfreier Kontinua verstehen. Ihre Bedeutung geht daraus hervor, daß die Rißbruchmechanik wie auch die Kerbbruchmechanik das Sprödbruchverhalten mehrachsiger Spannungszustände nicht hinreichend gut erfassen können ([Radaj], Teil I, S. 173). Zur Kontinuumsmechanik gehören die Fließ- und Bruchhypothesen.

#### 7.1.1 Bruchhypothesen isotroper, homogener Werkstoffe

**Einachsige Beanspruchung:**

Zur Vermeidung eines Bruches muß bei einachsiger Belastung die maximale Beanspruchung unterhalb einer zulässigen Höchstspannung bleiben

$$\sigma_{\text{vorh.}} < \text{zul} \sigma \quad (7.1)$$

Dabei wird  $\text{zul} \sigma$  in der Regel um einen Sicherheitsfaktor unter der äußersten ertragbaren Spannung  $\sigma_{\text{ertr.}}$  bleiben.

$$s \cdot \text{zul} \sigma = \sigma_{\text{ertr.}} \quad (7.2)$$

**Mehrachsige Beanspruchung:**

Bei mehrachsiger Beanspruchung wird bei Spannungsnachweisen eine Festigkeitshypothese herangezogen. Diese Hypothese vergleicht die mehrachsige Anstrengung des Materials mit einer einachsigen Anstrengung. Als Maß dazu dient die Vergleichsspannung  $\sigma_v$ . Wir wollen hier die am häufigsten benutzte Hypothese, die der größten Gestaltänderungsarbeit (Huber-v. Mises-Hencky) anführen

$$\sigma_{\text{vorh.}} = \sigma_v = \begin{cases} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2} \\ \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \end{cases} \quad \text{(Hauptspannungen),} \quad (7.3)$$

umgeformt

$$F(\sigma, \tau, \sigma_v) = \frac{\sigma^2}{\sigma_v^2} + \frac{3\tau^2}{\sigma_v^2} = 1. \quad (7.4)$$

Andere Hypothesen sind neben der vorgenannten Hypothese für den zweiachsigen und dreiachsigen Spannungszustand in Tabelle 7.1 angegeben.

Weden die Festigkeitshypothesen als Bruchhypothese benutzt, so ist

$$\sigma_{\text{vorh.}} = \sigma_{\text{ertr.}} = \sigma_B \quad (7.5)$$

zu setzen. Wird hingegen  $\sigma_{\text{vorh.}} = \sigma_{\text{Fließgrenze}}$  gesetzt, so erhält

man eine Fließhypothese. Trägt man diese Hypothese über den Hauptspannungen auf, so erhält man im dreiaxialen Fall lineare Bruchkörper bzw. Fließkörper und im zweiachsigen Fall Bild 7.1 die Bruchgrenzlinien bzw. Fließkurve<sup>n</sup>. Wertekonstellationen innerhalb des Bruchkörpers bzw. der Bruchkurve werden vom Material ertragen.

Wird beim ebenen Beanspruchungszustand mit den Spannungen  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \tau_{xy}$  statt  $\sigma_x, \sigma_y$  gearbeitet, so ergibt sich auch hier schon ein Bruchkörper. Ein solcher Bruchkörper ist für einen orthotropen Werkstoff in Bild 7.2 aufgezeichnet worden.

Die verschiedenen Festigkeitshypothesen bringen nur in bestimmten Anwendungsfällen bei speziellen Werkstoffen ausreichend gute Aussagen.

### 7.1.2. Allgemeines zu den Bruchhypothesen des Faserverbundes

Wie Hütter u.a. anführen, hängt das Bruchverhalten anisotroper Werkstoffe vom Vorzeichen der Spannung (Druck oder Zug) und der Lastrichtung (längs oder quer zur Faserrichtung) ab. Weiterhin können Schub- als auch Trennbrüche verursacht werden, während im Übergangsbereich Mischbrüche zu erwarten sind.

Bei Ermittlung der Vergleichsspannungen wird z.B. für ein anisotropes (gewalztes) Blech, falls zweiachsiale Zugspannungen herrschen, die Normalspannungshypothese und bei Druck-Zugspannungen die Gestaltänderungshypothese verwendet. Wir entnehmen dieser Ausführung, daß schon bei homogenen, anisotropen Metallen unter zweiachsiger Belastung eine einzelne Bruchhypothese zur Beschreibung des Bruchverhaltens nicht mehr ausreicht. Erst recht nicht beim FK mit seinen Faser-, Matrix- und Interfacebrüchen. Es geben deshalb einige Autoren beim FK mehrere Hypothesen an, die von der Lastkonstellation bzw. vom erzeugten Spannungszustand abhängen.

Das Aussehen dieser Bruchhypothesen des Faserverbundwerkstoffes (identisch wie FK verwendet) gleicht im Prinzip dem modifizierter Bruchhypothesen isotroper Werkstoffe. Sie wurden in der Regel für einen aus orthotropen Einzelschichten aufgebauten MSV bzw. UDV aufgestellt. Leider sind die Aussagen dieser Hypothesen nur zum Teil zufriedenstellend. Das hängt wiederum damit zusammen, daß man nicht einfach nur eine Vergleichsspannung bei verschiedenen Lastkombinationen definieren kann. Laut [Hütter/Schelling/Kraus] liegt das am anisotropen Verhalten des Werkstoffes FK, dem inhomogenen Schichtaufbau, der beliebigen Faserorientierungsmöglichkeit, den beliebigen Schichtdickenverhältnissen, den Faser- und Harzsystemarten.

Die Bruchhypothesen von FK lassen sich aufteilen in Spannungs- und



Dehnungskriterien. Bei den Dehnungskriterien werden statt Spannungen Dehnungen verwendet. Als Hypothesen dienen die Normalspannungshypothese und die Größtdehnungshypothese. Ihre Anwendung erfolgt hauptsächlich bei Matten.

Ebenso wie bei metallischen Werkstoffen beschränkt man sich auch bei FK zumeist darauf, Festigkeitswerte an einfachen Probekörpern (z.B. Bild 7.3) bei einfachen Beanspruchungen wie z.B. Zug, Druck, Schub zu ermitteln. Nur so kann man sich mit erträglichem Aufwand einen Überblick über die Auswirkungen der Harz/Härter/Haftmittel-Kombination, der Art der Faserverstärkung und ihrer Anordnung im Laminat sowie der Verarbeitungsbedingungen auf die Kurzzeit-, Langzeit- und Schwingfestigkeit bei verschiedenen Umweltbedingungen verschaffen [Puck, 1969].

### 7.1.3. Spannungskriterien

Im Fall des ebenen, orthotropen Faserverbundes werden die Bruchhypothesen analog zu den Glgn. (7.4) in der Form

$$F(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \tau_{12}, \sigma_{11B}, \sigma_{12B}, \tau_{12B}) = 1 \quad (\text{i.a. für UDV}) \quad (7.6)$$

und

$$F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_{xB}, \sigma_{yB}, \tau_{xyB}) = 1 \quad (\text{i.a. für MSV})$$

auftreten.

Da die in Bauteilen vorliegende, zusammengesetzte Beanspruchung wegen der Richtungsabhängigkeit der Festigkeit zu mehreren Festigkeitswerten in Beziehung gesetzt werden muß, kann man - wie schon angedeutet - die Spannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  nicht ohne weiteres wie bei den isotropen Stoffen zu einer Vergleichsspannung zusammenfassen. Nach Glg. (7.4) tritt Bruch ein, wenn Werte für  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  in  $F$  eingesetzt, für  $F$  einen Wert  $\geq 1$  liefern. Die richtige Funktion  $F$  konnte bisher nicht aufgrund einer Hypothese über die Bruchauslösung vorausgesagt werden. Wir sollten deshalb besser nicht von einer Bruch-Hypothese reden, sondern von einer Bruch-Bedingung oder einem Bruchkriterium [Puck].

Es werden als erstes Bruchkriterien vorgestellt, die die einzelne UD-Schicht betrachten.

Als erste Bruchhypothese ist die von Tsai-Azzi zu nennen ([Calcote], S. 155). Diese Verfasser verwendeten ~~verwendeten~~ das von Hill für homogene, anisotrope Materialien erweiterte Fließkriterium von v.Mises für UDV und orthotrope Gewebelaminat. Wir finden diese Hypothese mit den üblichen Bezeichnungen in Tabelle 7.2 angegeben. Sie kann auch

auf Gewebelaminat angewendet werden. Nur sind dann  $x, y$  statt  $u, l$  einzusetzen.

Dieses Fließ-Kriterium in der Hillschen oder in einer etwas abgewandelten Form wird häufig auf GFK angewandt, auch wenn bei Versagen des Laminats durch Faserbruch der Bruch sicher nicht durch Fließen ausgelöst wird. Übereinstimmung zwischen Theorie und Experimenten bei zusammengesetzter Beanspruchung ist deshalb öfters zufällig (s. [Puck, 1969]).

Eine weitere Bruchhypothese stellte Norris in Anlehnung an die Gestaltänderungshypothese von Huber-von Mises-Henky auf. Sie unterscheidet sich von der Tsai-Formel noch durch den Faktor  $1/r$ .

Die in Deutschland bekanntesten Hypothesen wurden von Puck u.a. am Deutschen Kunststoff Institut aufgestellt. Puck arbeitet aus den weiter vorn angegebenen Gründen von vornherein mit mehreren Hypothesen (Tabelle 7.2), und kann so eine Aussage über die vorliegende Bruchursache machen. Er unterscheidet zwei Versagensarten bzw. Bruchursachen:

Faserbruch (FB) und  
Zwischenfaserbruch (ZFB), d.h. Bruch der Matrix  
oder der Grenzfläche.

Die Schädigung eines MSV tritt dann ein, wenn eine Einzelschicht ZFB infolge äußerer Lasten oder Eigenspannungen erleidet. Häufig ist dann der Faserverbund noch tragfähig, doch bestimmt der ZFB in der ersten Schicht des öfteren die Einsatzgrenze.

Infolge des ZFB ist die zuerst reiße Schicht nicht mehr voll tragfähig, und es muß eine Spannungsumlagerung stattfinden. Damit bildet sich nach und nach in der anderen Schicht ebenfalls ein ZFB aus bis zum Totalversagen des Faserverbundes.

Die einzelnen UD-Schichten in Verbund sind im wesentlichen eben beansprucht durch die Normalspannung  $\sigma_{||}$ , die Querkzug- oder Querdrukspannungen  $\sigma_{\perp}$  und Schubspannungen  $\tau_{*}$  parallel und senkrecht zur Faser. Überwiegende Beanspruchung durch  $\sigma_{\perp}$  und/oder  $\tau_{*}$  führt zu Rissen in der Matrix oder in der Grenzfläche Faser-Matrix, bedingt also Zwischenfaserbruch. Zur Dimensionierung der UD-Schicht auf FB oder ZFB bedarf es daher unterschiedlicher Bruchkriterien, die die auftretenden Spannungen ( $\sigma_{||}, \sigma_{\perp}, \tau_{*}$ ) mit den zugehörigen Festigkeiten (Index B) verknüpfen. Welche Beanspruchungskombinationen bei dieser Betrachtungsweise nicht mehr ertragen werden können, darüber sagt der folgende Absatz aus:

\* durch  $\sigma_{||}$  führt zu Faserbruch; überwiegende Beanspruchung

Aufgrund mikromechanischer Überlegungen haben Puck und Schneider folgende Bruchkriterien gefunden, die für GFK empirisch bestätigt wurden, und für jede UD-Schicht anzusetzen sind

$$\sigma_{II} \geq 0 : \left( \frac{\sigma_{II}}{\sigma_{II B}} \right)^2 = 1 \quad (\text{FB}) \quad (7.8a)$$

$$\sigma_{II} \geq 0, \sigma_{\perp} \geq 0 : \left( \frac{\sigma_{II}}{\sigma_{II B}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\perp B}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{\#}}{\tau_{\# B}} \right)^2 = 1 \quad (\text{ZFB, Kohäsiv}) \quad (7.8b)$$

Die Gleichung (7.9) beinhaltet die Beziehung

$$\sigma_{II B} \approx E_{II} \varepsilon_{HB} \quad (\varepsilon_{HB} = \text{Harzbruchdehnung unter einachsigen Zug oder Druck}),$$

welche ([Puck, 1969]) die Kenntnis des Spannungs-Dehnungsverhaltens der Matrix verlangt. Als Bruchwerte werden im allgemeinen experimentell erhaltene Größen eingesetzt. Der Bruchwert  $\sigma_{II B}$  ist eine fiktive Größe. Die vorstehenden Gleichungen gelten unter Verwendung der entsprechenden Langzeitwerte auch für Langzeitbelastungen. Beim Einsetzen von Druckwerten (negatives Vorzeichen) ist an Faserkürzung in der Matrix, nicht an Bauteilstabilität gedacht. Ist  $\sigma_{II}$  eine Zugspannung, so wird sie als positiver Wert eingesetzt, und für  $\sigma_{II B}$  wird der Wert der Zugfestigkeit benutzt. Wenn  $\sigma_{II}$  eine Druckspannung ist, wird sie als negativer Wert eingeführt, und für  $\sigma_{II B}$  wird die Druckfestigkeit angesetzt. Das gleiche gilt sinngemäß für  $\sigma_{\perp}$ . Festigkeitswerte werden immer als positive Werte eingesetzt (Wenn auch bei Quadrierung uninteressant). Beide Formeln gelten für die Hypothese kohäsiven Versagens, die erste für die Faser, die zweite für die Matrix. Zumindest bei GFK hat es sich gezeigt, daß das obige ZFB-Kriterium für negative  $\sigma_{\perp}$ -Werte auf der sicheren Seite liegt.

Welche mathematische Form die Bruchhypothese für Zwischen-Faser-Bruch hat, hängt zunächst einmal davon ab, ob Versagen des Harzes (Kohäsivbruch) oder Versagen der Grenzflächen-Bindung (Adhäsivbruch) den Zwischen-Faser-Bruch auslöst.

Wenn primär Kohäsivbruch des Harzes (darf dann nicht spröd, wie viele Epoxidharze sein) für diesen Bruch verantwortlich ist, wird die mathematische Form durch die für das unverstärkte Harz gültige Bruchhypothese bestimmt.

Die Annäherung der experimentell bestimmten Bruchkurve für einen bestimmten UD-GFK sollte mit einer Ellipse gelingen, die mathematisch der Gleichung [Schneider, 1973]

$$\sigma_{\perp} \geq 0 : \left[ \frac{\sigma_{\perp} + \frac{1}{2}(\sigma_{\perp dB} - \sigma_{\perp zB})}{\frac{1}{2}(\sigma_{\perp dB} + \sigma_{\perp zB})} \right]^2 + \left[ \frac{\tau_{\#} (\sigma_{\perp zB} \sigma_{\perp dB})^{1/2}}{\tau_{\# B} \frac{1}{2}(\sigma_{\perp dB} + \sigma_{\perp zB})} \right]^2 = 1 \quad (\text{ZFB}) \quad (7.9)$$

gehört.

Wie man den Versuchsergebnissen in Bild 7.4 entnimmt, ist das vorstehende Bruchkriterium auch als Langzeitkriterium anwendbar. Im übrigen kann man sehen, was auch sonst die Regel ist, daß  $\sigma_{\perp zB} < \tau_{\#B}$  ist. Eine formelmäßig einfache Näherungsbeziehung für den Zug-Torsion-Bereich ist noch Tabelle 7.2 zu entnehmen. Für den Druck-Torsionsbereich gilt, daß die  $\sigma_{\perp}$ -Beanspruchung in einem großen Bereich bruchunwirksam ist (Bild 7.4). Zur Erklärung dient Bild 7.5, in dem angedeutet wird, wie sich unter geeigneter Druckbeanspruchung ein Fehler (hier ein Riß) nicht unbedingt kritisch vergrößert und zu einem Festigkeitsabfall führen muß.

Beim FK hat man keine einheitliche Oberfläche des Bruch-Körpers zu erwarten, sondern eine aus mehreren Flächenstücken zusammengesetzte Oberfläche, wobei jedes Flächenstück dem Versagen eines bestimmten Laminat-Bestandteils zugeordnet ist.

Die auf der Vorstellung von einem einheitlichen Stoff mit einem einheitlichen Bruchmechanismus beruhenden "Bruchhypothesen" können jedoch nichts darüber aussagen, welcher Bestandteil des Laminats bei einer bestimmten Beanspruchungskombination versagt [Puck, 1969].

Der Fall eines adhäsiven Bruches [Förster/Knappe] in der Grenzschicht zwischen Faser und Matrix würde die Formulierung eines weiteren Bruchkriteriums für ZFB erfordern (s. Tabelle 7.2).

Im allgemeinen Belastungsfall muß noch der Einfluß der Faser-Spannungen mit einbezogen werden. Es zeigt sich, daß  $\sigma_{\parallel} > 0$  bei gleichzeitigem Vorhandensein von  $\sigma_{\perp} > 0$  und  $\tau_{\#}$  stärkere Schädigungen hervorruft als  $\sigma_{\parallel} < 0$ . Es kann sogar durch kleine Druckspannungen eine gewisse Entlastung bewirkt werden. Für ZFB gibt das Deutsche Kunststoffinstitut folgende Formel an

$$\sigma_{\parallel} \geq 0, \sigma_{\perp} \geq 0 : \left( \frac{\sigma_{\parallel}}{\sigma_{\parallel B}} \right)^2 + \left( \frac{2\sigma_{\parallel}}{\sigma_{\parallel B}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\perp B}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{\#}}{\tau_{\#B}} \right)^2 = 1 \quad (\text{ZFB}) \quad (7.10)$$

Ist der Anteil an  $\sigma_{\parallel}$  erheblich, so kann bevor ZFB erreicht wird schon FB auftreten.

Zur Feststellung, ob Bruch eintreten kann, muß an den wesentlichen Stellen des Bauteils überprüft werden, bei welchen Kombinationen  $\sigma_{\parallel}, \sigma_{\perp}, \tau_{\#}$  sich die höchsten Werte - verglichen mit 1 - in der Berechnung der Bruchkriterien ergeben.

Die Übereinstimmung von Versuchswerten mit theoretisch gefundenen Werten ist für GFK-UDV bei Benutzung der Puckschen Hypothesen häufig recht zufriedenstellend, wie die Bilder 7.6 zeigen, womit jedoch nicht auf andere Faserverbundarten (CFK, BFK, ChFK) geschlos-

sen werden kann.

Zum Schluß sollen noch zwei Bruchhypothesen von Ishai angegeben werden. Ishai gibt ein erstes Fließkriterium für duktile Faserverbunde an

$$\left(\frac{\sigma_{||}}{\sigma_{||\text{Fließ}}}\right)^2 + 3 \left(\frac{\tau_{\#}}{\sigma_{||\text{Fließ}}}\right)^2 = 1 \quad (7.11)$$

und ein zweites für spröde Faserverbunde

$$\left(\frac{\sigma_{||}}{\sigma_{||B}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\#}}{\sigma_{||B}}\right)^2 = 1 . \quad (7.12)$$

Die vorgenannten Bruchhypothesen bezogen sich allesamt auf UDV. Meistens sind jedoch Lamine bzw. mehrschichtige Verbunde (MSV) vorhanden, die aus einzelnen unidirektionalen Schichten aufgebaut werden. Hier zeigt sich nun die Praxis, daß die Tragfähigkeit eines Laminates noch nicht erschöpft ist, wenn eine Schicht, oder mehrere Schichten reißen.

Puck stützt sich im Fall des Laminates mittels der schichtenweise Spannungsanalyse auf die sogenannte "schichtenweise Bruchanalyse" ab, geht also auch hier von der Schicht aus, und überprüft anhand der Einzelschichten ob FB oder ZFB eintritt. Die schon gerissenen Schichten berücksichtigt er insofern, als er bis auf  $E_{||}$  alle elastischen Konstanten Null setzt. Es ist prinzipiell auch möglich, die  $E_{\perp}$ ,  $G_{\#}$ ,  $\nu_{||}$  nach einem ZFB mit zunehmender Last kleiner werdend anzunehmen.

Gegebenenfalls müssen zur Feststellung des Bruchgeschehens an einer Stelle des Bauteils zwei oder drei Kriterien berücksichtigt werden. Es ist dann die Spannungscombination  $\sigma_{\perp}$ ,  $\sigma_{||}$ ,  $\tau_{\#}$  in derjenigen Schicht als am kritischsten anzusehen [Förster/Knappe], bei der irgendeiner der Kriteriumswerte den höchsten Wert verglichen mit Eins annimmt.

Puppo-Evensen betrachten direkt das Laminat, ohne die Spannungsverteilung in den Einzelschichten auszurechnen. Sie ermitteln sich allerdings die Festigkeitseigenschaften des Faserverbundes in den elastischen Hauptachsen (vgl. [Hütter u.a.]).

Im Fall des ebenen Spannungszustandes fanden Puppo-Evensen die Beziehungen in Tabelle 7.2. Setzt man darin für den isotropen Fall den sogenannten Interaction-Faktor  $\gamma = 1$ , so kommen wir wieder zur Gestaltänderungshypothese. Zur Erzielung einer besseren Übereinstimmung mit dem Versuch schlagen Puppo-Evensen eine Korrektur über den Exponenten  $n$  vor, der meistens 1 gesetzt wird. Die Funktionen  $h(\gamma)$  und  $q(\gamma)$  sind in Bild 7.7 angegeben.

Wie die Versuchsergebnisse bei MSV zeigen, fällt der Vergleich mit den theoretischen Werten aus den Bruchhypothesen oft nicht zufrieden-

stellend aus. Weiter hängt die Güte der Übereinstimmung auch sicherlich von der betrachteten Faserverbundart ab.

Bei einem Vergleich der jeweils zwei gemessenen Kurven in Bild 7.8 stellt sich heraus, daß bei dem Kreuzverbund nach Reißen der Längsschicht gegenüber dem UDV noch Tragreserven übrig bleiben. Sowohl bei Zug als auch bei Schub wird das Laminat später als die unidirektionale Einzelschicht zerstört. Die schichtenweise Bruchanalyse liefert diesen Unterschied nicht.

Die Benutzung der Beziehungen von Puppo/Evensen scheint allgemein bei Laminaten eine recht gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Theorie zu erbringen, soweit man dies aus Bild 7.6 schließen darf. Auch hier bleibt abzuwarten, wie die Übereinstimmung bei anderen FK wie CFK, BFK und ChFK aussehen wird.

#### 7.1.4 Dehnungskriterien

Allgemeines zum Verfahren der kritischen Dehnungsgrenzen  $\epsilon_{F\infty}$  :

Für isotrope und quasiisotrope Kunststoffe ist in den vergangenen Jahren vom Institut für Kunststoffverarbeitung (IKV), Aachen, eine einfache, für den mit Kunststoffen bisher wenig vertrauten Konstrukteur leicht zugängliche Methode für eine sichere Festigkeitsrechnung ausgearbeitet worden. Sie hat ihre Grundlage in der Beobachtung, daß Kunststoffe beim Überschreiten bestimmter Zugdehnungen irreversible Verformungen in Richtung der größten Zugdehnung erfahren. Je nach Werkstoffgruppe treten dann Fließzonen, auch crazes genannt (z.B. bei amorphen Thermoplasten), Mikrorisse (z.B. bei teilkristallinen Kunststoffen) oder ein bruchverursachendes Lösen adhäsiver oder kohäsiver Bindungen bei glasfaserverstärkten Kunststoffen auf (Auszug aus [Menges/Brintrup]).

Weil sich solche Verformungsgrenzen als unabhängig von der Mehrachsigkeit der Beanspruchung, von der Temperatur (solange sich der Werkstoffzustand nicht ändert), ebenso vom Zeitfluß und von umgebenden Medien, soweit sie nicht lösend oder quellend, d.h. den Werkstoffzustand ändernd wirken, und schließlich nahezu unabhängig von ruhender, schwingender oder stoßartiger Beanspruchungsart erwiesen haben, kann man nach Menges u.a. bei der Dimensionierung mit sehr niedrigen Sicherheitskoeffizienten auskommen. Die Dehngrenze  $\epsilon_{F\infty}$  ist stets gleich. Sie wird deswegen von Menges/Alf als eine Materialkonstante bei sich plastisch verformenden Materialien gedeutet.

Glasfaserverstärkte Polyester sowie Epoxidharze werden in den Anwendungsbereich mit einbezogen. Eine Erweiterung auf andere FK - wie z.B. CFK - ist dem Verfasser nicht bekannt. Die  $\epsilon_{F\infty}$  -Werte hängen bei anisotropen Werkstoffen außer vom Fasergehalt auch von den Richtungen ab.

Das Verfahren der kritischen Dehngrenzen stützt sich auf die Beobachtung ab, daß beim Überschreiten gewisser Dehnungswerte im FK irreversible Verformungen in Richtung der größten Dehnung auftreten. Es soll mit diesem Verfahren ein gegenüber den rechenintensiveren Verfahren der Spannungskriterien nicht so aufwendiges

entgegengestellt werden, das zudem noch in einem größeren Verformungsbereich Gültigkeit besitzt. Dazu werden Dehnungsgrenzwerte bei einachsiger Beanspruchung mit Hilfe von Kurzzeit-Zugversuchen bestimmt. Die Verformungsmessungen werden mit DMS vorgenommen. Zusätzlich möglich bei GFK ist die Feststellung der Dehnungen mit einem Durchlichtverfahren.

Seine Bestätigung erfuhr das Verfahren bei quasiisotropen GFK-Laminaten. Auf anisotrope UD-Schichten ist es nach Knappe/Schneider jedoch kaum anwendbar, da die Bruchdehnungen wie die Festigkeiten richtungsabhängig sind. Bei UD-Schichten z.B. wird die Zugbruchdehnung  $\epsilon_{zB}$  viel eher herbeigeführt als die mehrfach größere Bruchschubung  $\gamma_B$ .

Wird bei dem Verfahren vom UDV auf MSV übergangen, so wenden Menges das allgemeine Elastizitätsgesetz mit den Glgn. (5.58) usf. zur Erzielung der Hauptdehnungsrichtungen an.

Als Kritik an diesem Verfahren wird in [Neitzel, 1973] festgestellt, daß die kritische Dehngrenze nicht unbedingt eine Schädigungsgrenze sein muß, wie bestimmte Beanspruchungsfälle bewiesen haben. Ferner zeigt er am Beispiel von Schweißnähten von Thermoplasten auf, daß an diesen kritischen Stellen überhaupt keine dehnungsbezogene Dimensionierung mehr möglich ist, weil infolge mehrachsigen Spannungsverhaltens die erreichbare Dehnung gegen Null geht.

Die Modellvorstellung für die Bildung von Fließzonen (crazes) und Mikrorissen gestattet außer der Erklärung des Versagens- und Alterungsverhaltens auch eine Deutung der durch Orientierungen und Eigenspannungen aufgrund der Verarbeitung beeinflussten Spannungsrißbildung [Menges/Rieß].

### Kritische Dehnwerte

Die kritische Dehnung wird von Menges/Rieß als die maximal mögliche, elastische Dehnung von polymeren Werkstoffen unter positiven Dehnungen definiert, die auch bei langen Belastungszeiten nach einer Entlastung und einer gewissen Erholungszeit wieder völlig rückgängig gemacht wird. Deformationen die zu Werten kleiner  $\epsilon_{r\infty}$  führen, haben also keine crazes zur Folge, denn das



Material verhält sich pseudoelastisch (Bild 7.9, [Menges/Alf]). Die  $\epsilon_{F\infty}$  können als Grenze des linear-viskoelastischen Bereiches aufgefaßt werden. Menges/Rieß ermitteln eine Aussage über die Größe von  $\epsilon_{F\infty}$  aus einer Energie-Gleichgewichtsbetrachtung zwischen der Energie für die Bildung einer neuen Oberfläche und der infolge der Belastung freiwerdenden Energie (siehe auch Theorie von Griffith in Abschnitt 7.2)

$$\epsilon_{F\infty} = \epsilon_{krit} = \frac{c}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{\gamma}{E^0}} \quad (7.13)$$

mit  $c$  = Konstante,  $L$  = Länge der potentiellen, d.h. größten senkrecht zur Verformungsrichtung liegenden Grenzflächen in einem Prüfkörper oder gedehnten Bauteil (Tabelle 7.3),  $\gamma$  = Grenzflächenenergie, mit der diese Grenzflächen miteinander adhärieren,  $E^0$  = Elastizitätsmodul der Partikel kritischer Größe. Bei anderen Partikelformen und zugehörigen Verformungsrichtungen ändert sich der Vorfaktor in Glg. (7.13).

Da einige Größen bisher experimentell nicht bestimmbar sind, wurde in einer einschlägigen Betrachtung aus Meßergebnissen an den verschiedensten Thermoplasten errechnet, daß der Modul der Partikel etwa zehnmal größer ist, als der an einem Prüfkörper gemessene äußere Modul. Dies scheint realistisch, da die Partikel einen höheren Deformationswiderstand aufgrund fehlender grober Schwachstellen besitzen (vgl. § 2) als der Werkstoff.  $\gamma$  läßt sich bislang nur abschätzen.

Aus der Abhängigkeit des Schubmoduls  $G$  von der Temperatur ergibt sich, daß sie einen entscheidenden Einfluß auf die Höhe des  $E^0$ -Moduls und damit der kritischen Dehnung hat. Die kritische Dehnung ist nur in solchen Bereichen als von der Temperatur unabhängig anzusehen, in denen die Schubmodul-Temperatur-Kurve ein Niveau durchläuft. Damit finden auch Ribbildung und Bruch bei niedrigen Dehnungen - im allgemeinen als Versprödung bezeichnet - bei Temperaturen unter der Einfriertemperatur gegenüber dem kautschukelastischen Zustand eine Erklärung.

Die Betrachtung gilt hauptsächlich für amorphe Thermoplaste, bei denen auch das Entstehen der Crazes im wesentlichen studiert wurde, doch folgen Menges/Rieß auch allgemeiner:

1. Bei groben Grenzflächen wie Fasern wird über große Verformungsgeschwindigkeitsbereiche hinweg nur eine einzige Grenzdehnung für die Bildung von Ablösungen beobachtet.

2. Bei Stoß werden Brüche bei etwa den gleichen Dehnungen beobachtet.
3. Bei Schwingung und Zugdeformation in verschiedenen Medien kann die gleiche kritische Dehnung bestehen bleiben.

Speziell eine Tatsache muß bei Schwingungsbeanspruchung erwähnt werden. Es zeigt die Beobachtung [Menges/Rieß], daß bereits vorhandene Fehlstellen oder Fließzonen beim Einsetzen der Wechselbeanspruchung vielfach weniger gefährlich sind als sich neu bildende, weil bei ersteren die Erwärmung infolge geringerer Kerbschärfe niedriger ist als bei der sehr scharfen Kerbe eines sich neu entwickelnden Risses, dessen Erwärmung dabei so schnell ansteigt, daß die nähere Umgebung selbst kalt bleibt, was zu einem sehr schnellen und streng in der Ebene des ersten Anrisses liegenden Rißfortschritt führt. Somit ist der Einfluß der Wärmeentwicklung infolge der Energiefreisetzung bei der Mikrorißbildung zu beachten.

Als krit. Dehnwerte geben Menges/Alf für viele isotrope, amorphe Thermoplasten  $0,7 < \epsilon_{F\infty} < 1 \%$ , für quasiisotrope GFK-Matten  $\epsilon_{F\infty} = 1,2 \%$  ( $\varphi = 8\%$ ) und  $\epsilon_{F\infty} = 0,5 \%$  ( $\varphi = 33 \%$ ) an. Eine Auslegung von PVC-Rohren unter Innendruck mit Hilfe solcher Dehnwerte in [Neitzel, 1973] führte zu erheblich höheren Wanddicken als das bisherige konventionelle Verfahren.

#### Dimensionierung von Mattenlaminaten (aus [Menges/Rieß/Empt])

- Gegen Mikrorißgrenzen -

Bei Mattenlaminaten treten unter der Wirkung einachsiger Zugbeanspruchung als Zeichen erster Schädigung Mikrorisse senkrecht zur Beanspruchungsrichtung auf. Puck konnte diese Erscheinungen als Folge lokaler Dehnungsüberhöhungen im Verbundsystem erklären. Es wurde bereits von Menges des öfteren dargelegt, daß die bei Kunststoffen unter einachsigem Zug auftretende Mikrorißbildung auf das Überschreiten kritischer Dehnungen zurückzuführen ist.

Die Konstanz der Verformungsschwellenwerte bei Mikrorißbildung läßt sich mit der Größtdehnungshypothese beschreiben, bei der für die Anstrengung des Werkstoffs nur die maximal auftretende Dehnung maßgebend ist. Die Vergleichsdehnung wird für die betrachteten Beanspruchungsfälle wie folgt formuliert:

$$\epsilon_v = \max \epsilon_e = \max \epsilon_m \geq \text{zul } \epsilon \quad \left( \begin{array}{l} e = \text{einachsrig} \\ m = \text{mehrachsrig} \end{array} \right) \quad (7.14)$$

Die Grenzlinien der nach der Größtdehnungshypothese ertragbaren Spannungen sind für den ebenen Spannungszustand in Bild 7.10 dargestellt.

Ist im Fall mehrachsiger Beanspruchung eines Bauteils das Verhältnis der wirkenden Hauptspannungen aufgrund der vorliegenden Bauteilgeometrie bekannt, so kann man mit Hilfe einer linearen Dehnungssuperposition anhand isochroner Spannungs/Dehnungs-Diagramme, z.B. in Bild 7.11, die effektiv vorhandenen Dehnungen in den betrachteten Richtungen wie folgt ermitteln

$$\begin{array}{l} \text{zweiachsrig} \\ \epsilon_{1m} = \epsilon_{1e} - \mu_l \epsilon_{2e} - \mu_q \epsilon_{3e} \\ \epsilon_{2m} = \epsilon_{2e} - \mu_l \epsilon_{1e} - \mu_q \epsilon_{3e} \\ \epsilon_{3m} = \epsilon_{3e} - \mu_l \epsilon_{1e} - \mu_q \epsilon_{2e} \end{array} \quad \left( \begin{array}{l} q = \text{Dickenrichtung,} \\ l = \text{Längsrichtung} \\ \text{des Laminates} \end{array} \right) \quad (7.15)$$

$\epsilon_{(1,2,3)m}$  = effektive, am mehrachsrig beanspruchten Bauteil auftretende Hauptdehnungen,

$\epsilon_{(1,2,3)e}$  = Dehnungen am einachsrig beanspruchten Probekörper, zu entnehmen aus isochronen  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagrammen.

Die Gültigkeit dieser Beziehungen konnten Menge u.a. für das Zeitstandverhalten nachweisen.

Nach allem, was bisher bekannt ist, kann man folgern, daß die aus Kurzzeitversuchen ermittelten Versagensmechanismen (Mikrorißbildung) auch auf das Zeitstandverhalten mehrachsrig beanspruchter Mattenlamine übertragen werden können.

#### - Gegen Bruchversagen -

Wie Untersuchungen an dünnwandigen Rohren, die durch Innendruck oder auf Torsion beansprucht wurden, veranschaulichen, kann das Bruchverhalten von Mattenlaminaten mit der Normalspannungshypothese beschrieben werden (Bild 7.10). Das Versagen tritt in Form einer Werkstofftrennung senkrecht zur Richtung der größten Hauptzugspannung auf.

Bei technischen Bauteilen liegt die extrem beanspruchte Stelle sehr häufig an einer lastfreien Oberfläche, wo nur ein ein- oder zweiachsiger Spannungszustand möglich ist. Hinsichtlich des ebenen Spannungszustands sind in Bild 7.10 die Grenzlinien der ertragbaren Spannungen nach der Normalspannungshypothese für den durch die

Versuche erfaßten Beanspruchungsbereich dargestellt. Die Vergleichsspannung ergibt sich zu

$$\sigma_v = \max \sigma_e = \max \sigma_m \geq \sum \sigma$$

bzw. in der im vorigen Kapitel benutzen Form

$$\left( \frac{\sigma_1, \sigma_2}{\sigma_B} \right)^2 \geq 1 \quad \text{für ZFB} \quad (7.16)$$

mit

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Hierin muß je nach Art der Hauptnormalspannung mit den  $\sigma_{zB}$  oder  $\sigma_{dB}$  verglichen werden. Die Verhältnisse in Bereichen mit überwiegender Druckbeanspruchung sind noch nicht ausreichend untersucht.

Die zugehörigen Vergleichsdehnungen  $\epsilon_{im}$  sind über die Bestimmung der  $\epsilon_{ie}$  aus den isochronen  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagrammen bekannt.

#### Dimensionierung von Gewebelaminaten (aus [Menges/Brintrup])

Bei unidirektionalen Gewebelaminaten aus Glas lassen sich Rißerscheinungen bei Längs- und Querbeanspruchung entlang der quer zur jeweiligen Lastrichtung ausgerichteten Glasfäden und damit senkrecht zur größten Normalverformung beobachten. Beansprucht man einschichtige Rovinglamine in Richtung der Bewehrung, so lassen sich auch mit dem Mikroskop - zumindest soweit man das bis jetzt beobachten konnte - keine irgendwie ausgerichteten Risse bis zum oder kurz vor dem Bruch feststellen. Das Versagen der Probekörper wird durch den Bruch einzelner Glasfasern des Verbundsystems ausgelöst, die dann aus der Matrix herausgerissen werden. Dabei entstehen entlang solcher herausgezogener Büschel Risse (Bilder 7.12).

Bei einem solchen Faserbruch muß das Harz örtlich die ursprünglich von der Faser aufgenommene Last mit übernehmen. Die Lastübertragung von der Faser zur Matrix oder umgekehrt kann aber nur durch Schubspannungen in der Grenzfläche erfolgen. An den Enden der Faser bzw. an solchen Stellen, an denen sich neue Faserenden bilden (Bruch der Faser) sind die Schubspannungen sehr hoch, zur Mitte der Fasern hin klingen sie ab.

Wenn beim Bruch die Fasern aus der Matrix gerissen werden, so bildet sich senkrecht zu den Hauptspannungen (Bild 7.12) der (Schubbruch) Riß aus. Die Hauptspannungen werden ~~gebildet~~ <sup>gebildet</sup> am Ende eines Faserrisses aus den dort vorliegenden Schubspannungsspitzen, und sie liegen bei idealer Haftung zwischen Faser und Matrix unter  $45^\circ$  zur Faserachse. Weiter weg von der Faser verringert sich der Winkel entsprechend der Drehung des Hauptspannungsfeldes, wobei aber benachbarte Fasern das Bild stören. Bei schlechter Haftung bewirken die nur mehr gegenüber den Normalspannungen kleinen Schubspannungen, daß der Riß unter  $90^\circ$  verläuft. Bei spröden Harzen können die Schubspannungsspitzen nicht abgebaut werden, so wie es bei fließfähigen Harzen der Fall ist.

Als Dimensionierungsmethode für UDV unter zweiachsiger Belastung werden von Menges u.a. als erstes die Hauptdehngrenzen  $\epsilon_{F\infty}^\perp$  und  $\epsilon_{F\infty}^\parallel$  ermittelt und <sup>in  $\epsilon_{F\infty}^\parallel$</sup>  Polardiagramm der Grenzliniendehnung eingezeichnet (Bild 7.13). Anschließend werden die Hauptdehnungen unter der zweiachsigen Belastung entsprechend Bild 7.14 und den Glgn. (5.56) sowie

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{1\text{eff}} \\ \epsilon_{2\text{eff}} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = [T_\epsilon(\alpha)] \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \gamma_{\#} \end{pmatrix} = [T_\epsilon] \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{\#}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \tau_{\#} \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

berechnet, so weit die elastischen Grundkonstanten, die zum Teil dehnungsabhängig sind, bekannt sind. Liegen isochrone  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramme vor, so können die  $\sigma_{11}/E_{11}$ ,  $\sigma_{12}/E_{11}$  und  $\tau_{\#}/G_{\#}$  direkt eingesetzt werden. Es wird praktisch eine Dehnungssuperposition vorgenommen, der Art

$$\begin{aligned} \epsilon_{1\text{eff}} &= c^2 \epsilon_{11} + s^2 \epsilon_{12} + 2sc \gamma_{\#} \\ &= c^2 \left( \sigma_{11}/E_{11} - \nu_{12} \sigma_{12}/E_{11} \right) + s^2 \left( -\nu_{21} \sigma_{11}/E_{11} + \sigma_{12}/E_{11} \right) + 2sc \tau_{\#}/G_{\#} \\ \epsilon_{2\text{eff}} &= s^2 \epsilon_{11} + c^2 \epsilon_{12} - 2sc \gamma_{\#} . \end{aligned} \quad (7.18)$$

Die am UDV unter allgemeiner Beanspruchung meßbare effektive Dehnung setzt sich also aus drei verschiedenen, einachsig gemessenen Dehnungswerten zusammen. Solange die effektiven (Zug-) Dehnungen innerhalb der Dehngrenzlinien liegen, treten keine Spannungsrisse auf.

Der Übergang von UDV auf MSV erfolgt mit Hilfe des allgemeinen Elastizitätsgesetzes für das Laminat.

Eine Anwendung der Methode ist dann möglich, wenn die Spannungen  $\sigma_{1k}$ ,  $\sigma_{2k}$  und  $\tau_{\#k}$  jeder Schicht bekannt sind. Damit ist die Berechnung auf Anwendung der Glg. (7.18) zurückgeführt und gegenüber den Verfahren von Puck u.a. besteht keine Vereinfachung mehr. Eine Antwort, ob die kritische Dehnung erreicht ist, wird erhalten, indem man die Dehnungskurven jeder Schicht winkelorientiert über die Dehngrenzkurve legt (Bild 7.13).

Abschließend sei noch festgehalten: Zur Feststellung von Dehnungen  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$ ,  $\gamma_{\#}$  in einem Bauteil dienen DMS in ausgezeichneten Richtungen. Bei ihrer Anwendung ist zu berücksichtigen, daß mit DMS gemessene Dehnungen bei einachsigem Zug wohl, aber sonst selten, mit der Aufkleberichtung übereinstimmen (s. [Kaiser]), da die DMS unter Schub aus der Richtung wegdrehen.

## 7.2 (Riß-) Bruchmechanik

### 7.2.1 Allgemeines zur Bruchmechanik isotroper, homogener Werkstoffe

Festigkeit und Bruchzähigkeit sind Werkstoffeigenschaften unterschiedlicher Bedeutung. Werden Strukturen z.B. unter Schockbedingungen beansprucht, so ist es wichtig, ein Material verwendet zu haben, das unter der Schockbelastung nicht spröde bricht, sondern sich relativ zäh verhält.

Es ist weiter für die Schadensanalyse genauso wie für die Optimierung wichtig, eine bestmögliche Kenntnis des Bruchverhaltens zu haben. Erst mit dieser Kenntnis ist man in der Lage, geeignete Maßnahmen zur Optimierung einer Faserverbundstruktur ergreifen zu können. Als Unterlage dafür soll in diesem Abschnitt-nachdem schon die Versagenskriterien vorgestellt wurden-auf die Anwendung der Bruchmechanik und auf Brucherscheinungen eingegangen werden.

Von der Größe des betrachteten Bruchquerschnittes her teilt man die Betrachtungsweisen in makromechanische und mikromechanische auf. Eine makromechanische Betrachtungsweise liegt vor, wenn man eine Schicht oder ein ganzes Laminat betrachtet; eine mikromechanische wenn nur noch der nahe Bereich um eine Faser in die Betrachtung mit einbezogen wird.

Es ist die Absicht des Verfassers, in diesem Abschnitt einen Überblick über die bisherige Anwendung der Bruchmechanik auf Faserverbund zu geben. Zum besseren Verständnis wird allerdings der Leser in diesen Anwendungsbereich über das weniger komplizierte Verhalten homogener, isotroper Metalle eingeführt.

Die Bruchmechanik ist ein verhältnismäßig junger Zweig der Festigkeitslehre. Sie erregte erste Aufmerksamkeit als Ende der 30er Jahre in zahlreichen Stahlbrücken [ Heckel ] Risse auftraten, obwohl die Beanspruchung relativ niedrig lag und das Material auf Rißfreiheit untersucht worden war. Besonderes Merkmal dieser Schäden war die verformungslose Bruchausbildung (Sprödbbruch) in einem Werkstoff, der im einachsigen Zugversuch ein gutes Verformungsvermögen zeigte. Ursachen für solche Sprödbüche sind mehrachsige Spannungszustände, hohe Beanspru-

chungsgeschwindigkeit, niedrige Temperatur, Versprödung durch ungünstigen Werkstoffzustand u.a.

Die Erkenntnis , daß Fehler unterhalb der mittels zerstörungsfreier Werkstoffprüfung (NDT) erkennbaren Größe in jedem Bauteil vorhanden sein können [Berns] , führte dazu, schon bei der Auslegung eines Bauteils Risse mitzuberücksichtigen. Solche Risse können sich an Kerben, Oberflächenanrissen und Schweißfehlern ausbreiten. Ziel der Bruchmechanik (Fracture Mechanics) ist es zu untersuchen, unter welchen Bedingungen sich Risse in einem Bauteil ausbreiten und zum Bruch führen, und wie groß die zulässigen Rißlängen sind. Weil die (Riß-) Bruchmechanik nicht die Rißentstehung, sondern ihre Ausbreitung betrachtet, wird im Gegensatz zur Ermittlung der gebräuchlichen Festigkeitswerte (Kapitel 8) nicht mit rißfreien, sondern mit rißbehafteten Proben gearbeitet.

Eine Erklärung des Bruchvorganges wird mit Hilfe von kristallphysikalischen, metallurgischen und elastizitätstheoretischen Kenntnissen versucht [Heckel]. Dabei ist es mit letzteren gelungen, unter bestimmten Annahmen das Einsetzen des Bruches und den Rißfortschritt beschreiben zu können. Es bietet sich damit eine rechnerische Möglichkeit, Bauteile besser auslegen und im Betrieb aufgetauchte Risse beurteilen zu können. Eine Erweiterung der Bruchmechanik auf Erscheinungen, wo Fließen des Werkstoffs auftritt, wird im Rahmen einer Fließ-Bruchmechanik behandelt werden müssen, ist aber nicht Inhalt diese Buches.

### 7.2.2 Kurze Beschreibung der (Riß-) Bruchmechanik-Theorien isotroper, homogener Werkstoffe

Die Bruchmechanik basiert auf den Vorstellungen, in welcher Art sich ein Riß im Werkstoff vergrößert und weiter auf dem experimentellen Erfassen des Werkstoffverhaltens beim Bruch.

Als Öffnungsarten eines Risses sind drei zu nennen (Bild 7.15), die auch in Superposition vorkommen können. Rißfall I führt zum sprödesten Werkstoffverhalten und wird deshalb vorwiegend betrachtet. Weitere Fälle sind die Verschiebungsmöglichkeiten der Rißoberflächen bei ebenem Schub - Fall II - und bei nichtebenen Schub (Querschere)-Fall III-.



## Theorie von GRIFFITH

Eine erste Theorie des Rißverhaltens wurde von K. Wieghardt, 1907 und allgemein bekannter von A.A. Griffith, 1921, aufgestellt. Griffith studierte das Verhalten eines durchgehenden Risses mit gerader Rißfront (Bild 7.16) unter äußeren, statischen Belastungen und stellte ein Spröbruchkriterium über die Energiebilanz der beim Reißen freiwerdenden elastischen Energie mit der Oberflächenenergie auf.

Nach Griffith ändert sich die elastische Energie eines Risses (Bild 7.16) in einer großen Scheibe [Heckel] um

$$(W \hat{=}) \Pi_i = \pi a^2 \frac{\sigma^2}{E} \quad (ESZ) \quad ; \quad \Pi_o = (1-\nu^2) \pi a^2 \frac{\sigma^2}{E} \quad (EFZ)$$

Für die Bildung der neuen Rißoberfläche ist eine Oberflächenenergie von

$$(S \hat{=}) \Pi_a = 4 a \gamma_o = 2 (2a \gamma_o)$$

nötig, wobei  $\gamma_o$  die spezifische Oberflächenenergie ist. Wenn nun die zur Neubildung des Bruchflächenzuwachses notwendige Oberflächenenergie gleich der Änderung der elastischen Energie bei der Rißausbreitung ist, so kann sich ein Riß ausbreiten. Es gilt dann im Instabilitätspunkt bei ESZ (Bild 7.17), vgl. [Kerkhof]

$$\frac{d}{da} (\Pi_o - \Pi_i) = 4 \gamma_o - 2 \pi a \frac{\sigma^2}{E} \leq 0 \quad (ESZ)$$

Die kritische Zugspannung, bei der sich der Riß instabil auszuweiten beginnt, ist dann

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2 E \gamma_o}{\pi a}} \quad (7.19)$$

Dieser theoretische Zugfestigkeitswert kann nur bei makroskopischen Rissen und dann auch nur zum Teil bestätigt werden, weil nicht alle auftretenden Energien (z.B. plastischer Anteil) in der Beziehung (7.19) erfaßt sind.  $\sigma_c$  ist keine Werkstoffkonstante sondern hängt von der Rißlänge  $a$  ab.

Wenn man die elastische Energie  $\Pi_i$  nach der Rißlängenänderung differenziert, so kommt man zur Irwin'schen Rißausbreitungskraft  $G$  (Energy release rate\*)

$$\frac{d\Pi_i}{da} = 2 \frac{\pi a \sigma^2}{E} = 2G = 4\gamma_o \quad (ESZ)$$

Ein kritischer Wert  $G = G_c$  ( $c = \text{critical}$ ) wird danach proportional mit  $a \sigma_c^2$  erreicht

$$G_c = \sigma_c^2 \frac{\pi a}{E} \quad (7.20)$$

Die andere wesentliche Bruchmechanikgröße ist die Bruchzähigkeit

\* Riß freisetzungsenergie

(fracture toughness)  $K$ , die auch Spannungsintensitätsfaktor genannt wird. Sie wird aus den vollständigen elastizitätstheoretischen Gleichungen des Spannungsfeldes um einen RiB durch einen Grenzübergang ( $r \rightarrow 0$ ,  $a \gg r$ , s. Glg. (7.23)) gewonnen ([Radaj], Bd. II). Für den einfachen Fall des Griffith-Risses (RiBfall I, Bild 7.16) ergibt sich

$$K_I = K_c = \sigma_c \sqrt{\pi a} ; \quad (7.21a)$$

bei verwickelter Geometrie und Belastung tritt noch ein Korrekturfaktor  $\kappa$  hinzu

$$K_c = \sigma_c \sqrt{\pi a} \kappa . \quad (Y = \sqrt{\pi} \cdot \kappa) \quad (7.21b)$$

Die Bruchzähigkeit  $K$  hat die wenig anschauliche Dimension  $N/mm^{3/2}$ . Sie ist von der äußeren Spannung und der RiBlänge abhängig.  $\kappa$  berücksichtigt die RiBgeometrie und bei nicht rein elastischer RiBtheorie die plastische Zone. Einige Werte  $\kappa$  sind in Bild 7.18 angegeben.

Da  $G_I$  bzw.  $G_c$  ebenso wie  $K_I$  bzw.  $K_c$  durch das Spannungsfeld am RiB bestimmt sind, besteht eine Beziehung zwischen beiden Werten ( $\kappa = 1$  gesetzt)

$$\begin{aligned} K_c^2 &= \sigma_c^2 \pi a = \frac{2 E \gamma}{\pi a} \pi a = E 2 \gamma = E G_c && \text{(Wenn nicht EFZ)} \\ K_{Ic}^2 &= E G_{Ic} \frac{1}{1-\nu^2} . && \text{(EFZ)} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Zur Definition ist noch anzuführen:  $K_I$  ist der allgemeine Ausdruck für Bruchzähigkeit im RiBfall I, während  $K_{Ic}$  dem EFZ zugeordnet ist.  $K_c$  umfaßt alle Werte, die nicht zum EFZ gehören, also nicht nur die ESZ-Werte.

Auch für etliche andere RiBanordnungen und Belastungsarten, sogar für einen flachen, ellipsoidförmigen RiB im räumlichen Fall, sind elastizitätstheoretisch die Spannungen und Verschiebungen am RiB ermittelt worden. Bei allen diesen RiBanordnungen ergibt sich bis auf Zahlenfaktoren dieselbe kritische Spannung wie in Glg. (7.19) (Bild 7.18 und 7.19). Im Sonderfall  $a/c = 0$  geht der elliptische RiB in den durchgehenden RiB mit gerader RiBfront über. Auf Oberflächenrisse soll hier nicht eingegangen werden.

### Linear-elastisches Werkstoffverhalten

Von G.R. Irwin wurde die Griffith'sche RiBtheorie zur sogenannten Linear-Elastischen Bruchmechanik (engl. abgek. LEFM) weiterentwickelt. Irwin zeigt in der LEFM, daß das Bruchkriterium (Glg. 7.19) unabhängig von den Randbedingungen der Scheibe als örtliche Bedingung an der RiBspitze aufzufassen ist.

Wie die Spannungen und Verformungen in der näheren Umgebung der Rißspitze aussehen, wird nun für das lastfreie, elliptische Loch der unendlich ausgedehnten, zugbeanspruchten, elastischen Scheibe beschrieben (Bild 7.16). Die Lösung ist ein Reihenausdruck, von dem I.N. Sneddon den 1. Term als Näherungsausdruck betrachtet, so daß für das Spannungsfeld [STP 381]

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 (1 - \sin \varphi/2 \sin^3 \varphi/2) + \dots \\ \cos \varphi/2 (1 + \sin \varphi/2 \sin^3 \varphi/2) + \dots \\ \cos \varphi/2 \sin \varphi/2 \cos^3 \varphi/2 + \dots \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

und für das Verschiebungsfeld [Kerckhof]

$$\begin{pmatrix} u_R \\ v_R \end{pmatrix} = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 (1 - 2\nu + \sin^2 \varphi/2 + \dots) \\ \sin \varphi/2 (2 - 2\nu - \cos^2 \varphi/2 + \dots) \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

verbleiben.

Aus den Formeln (7.23) geht hervor, daß die Form des Spannungsfeldes an den Rißspitzen immer gleich ist, aber die Höhe der Spannung mit  $K_I$  verschieden ist. (Die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  sind im übrigen als die Grenzwerte der Kerbfaktoren für verschwindenden Kerbradius zu betrachten und lassen sich auch so berechnen

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sigma_{\max} \sqrt{\pi r} \quad (7.25)$$

$\sigma_{\max}$  ist darin die Höchstspannung an der Kerbe (vgl. [Radaj]). Daß im allgemeinen nur der zur Rißform I zugehörige Spannungsintensitätsfaktor behandelt wird, liegt unter anderem daran, daß dieser Riß beim Öffnen die gefährliche Spannungskorrosion erleichtert.

In dicken, eben belasteten Scheiben ist im Kern die Querkontraktion stark behindert. Es herrscht dann EFZ, womit im Innern eine Spannung  $\sigma_z$  verbunden ist. Dieser Zustand führt zum niedrigsten  $K_I$ -Wert, dem  $K_{Ic}$ -Wert (Bild 7.20), der sich ergibt, wenn infolge EFZ die ganze Bruchfront sich als Sprödbbruch (Trennbruch) ausbilden kann. (Wie sich aus Versuchen bei verschiedenen Rißformen und Anordnungen ergab, zeigen die kritischen Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{Ic}$  nur eine geringe Streuung auf. Sie sind somit als

Werkstoffkennwert heranziehbar. Der Wert  $K_{Ic}$  gilt bei gleicher Form des Spannungsfeldes für Proben und Bauteile, was z.B. bei der Kerbzugfestigkeit nicht ohne weiteres gilt. Der Versuch zur Ermittlung von  $K_{Ic}$  findet an Luft unter einmaliger Zugbelastung statt.

Sind auch korrosive Medien in der Nähe des Risses vorhanden, so hängt der beim Zugversuch zu ermittelnde, nun etwas andere  $K_{Ic}$  - Wert, der sog.  $K_{Ic}^{scc}$  -Werkstoffwert gemäß Bild 7.21 von der Belastungsdauer ab.

Eine schematische Darstellung des Zusammenhangs zwischen Beanspruchung und kritischer Rißtiefe bei der üblichen einmaligen statischen Belastung zeigt Bild 7.22.

Da bei Brüchen im Verbund meistens Mischformen auftreten, soll hier zur Information auch das schiefssymmetrische Spannungsfeld der Rißart II angegeben werden [Konish/Swedlow/Cruse] .

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \varphi/2 (2 + \cos \varphi/2 \cos^3 \varphi/2) + \dots + \dots \\ \sin \varphi/2 \cos \varphi/2 \cos^3 \varphi/2 + \dots + \dots \\ \cos \varphi/2 (1 - \sin \varphi/2 \sin^3 \varphi/2 + \dots + \dots) \end{Bmatrix} \quad (7.26)$$

### Elasto - plastisches Werkstoffverhalten

Die vorstehenden Ausführungen gelten nur für den linear-elastischen Bereich. Stellt sich eine plastische Zone ein, so kann diese mit bestimmten Annahmen berücksichtigt werden. Welche Annahmen das sind und zu welchen Ergebnissen sie führen, kann man bei Heckel, Kerkhof, Berns, Habibi u.a. nachlesen.

Gegenüber den spröden bzw. linear elastischen Werkstoffen wird bei zähem bzw. elasto-plastischem Material statt einer kritischen Spannung eine kritische Verformung  $\delta_{rc}$  als charakteristisch angesehen. Diese wird mit Hilfe des sogenannten Dugdale'schen Rißmodells als Rißöffnungsverschiebung ("Crack Opening Displacement", = COD) mathematisch abgeleitet (Bild 7.23, vgl. [Menges u.a.]).

$$\delta_{rc} = \frac{\sigma^2 \pi a}{E \sigma_{0.2}} \quad (7.27)$$

Wir wollen hier die elasto-plastische Bruchmechanik praktisch nur steifen, denn ihr Einsatz bei Faserverbundwerkstoffen ist nur beschränkt möglich und bisher auch <sup>m.E.</sup> noch nicht praktiziert worden.

### 7.2.3 Anwendung der Bruchmechanik auf Faserverbundschicht

a)  $K_c$  - Theorie:

Die Überführung der linear elastischen Bruchmechanik

homogener, metallischer Werkstoffe auf FK ist in [Konish/Swedlow] zu finden. Es wird dort gezeigt, daß die LEFM auch auf solche Werkstoffe anwendbar ist, bei welchen den bruchmechanischen Betrachtungen statt des vorhandenen heterogenen, wenigstens ein lagenweise homogener Verbundwerkstoffkörper zugrundegelegt werden kann. Versuchsergebnisse stützen diese Annahme.

Unter diesen Voraussetzungen verbleibt somit als Hauptarbeit, die anisotropen Eigenschaften in die Spannungs- und Verschiebungsgleichungen der Rißmodelle I usf. einzuarbeiten ([Sih/Paris/Irwin]). Das Ergebnis dieser aufwendigen Rechenarbeiten kann [Konish/Swedlow] entnommen werden. Entsprechend der Glg. (7.23) wird auch dort das Spannungsfeld durch einen Potenzreihenausdruck beschrieben. Dieser lautet für genügend kleine Werte  $r/a$  und wiederum Abbruch nach dem 1. Term für die Rißöffnungsart I, die sich bei symmetrischem Kraftangriff zur Faserrichtung des UD - Verbundes ergibt ([Konish/Swedlow/Cruse,<sup>544</sup>] oder [Sih et. al])

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_2 \sin \varphi}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_1 \sin \varphi}} \right) \\ \operatorname{Re} \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_2 \sin \varphi}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_1 \sin \varphi}} \right) \\ \operatorname{Re} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_1 \sin \varphi}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_2 \sin \varphi}} \right) \end{array} \right\} + + \dots \quad (7.28)$$

In den Glgn. (7.28) sind  $\mu_1, \mu_2$  verschiedene komplexe Wurzeln der Gleichung

$$s_{11} \mu^4 - 2s_{16} \mu^3 + (2s_{12} - s_{66}) \mu^2 - 2s_{26} \mu + s_{22} = 0, \quad (7.29)$$

wobei die  $s_{ij}$  Komponenten der Nachgiebigkeitsmatrix [S] der Schicht sind. Lechnitski zeigte [Sih et. al], daß die Wurzeln dieser Gleichung komplex oder rein imaginär sind. Die vier Wurzeln teilen sich in zwei Lösungssätze auf. Die Parameter  $\mu_1, \mu_2$  sind diejenigen Wurzeln, die einen positiven Imaginärteil besitzen.

Für die Rißöffnungsart II, aus antimetrischem Lastangriff resultierend, folgt

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2^2}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_2 \sin \varphi}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_1 \sin \varphi}} \right) \\ \operatorname{Re} \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_2 \sin \varphi}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_1 \sin \varphi}} \right) \\ \operatorname{Re} \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_1 \sin \varphi}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_2 \sin \varphi}} \right) \end{array} \right\} + \dots \quad (7.30)$$

Wie die vorstehenden Formeln zeigen, sind sie den isotropen Beziehungen ähnlich. Für ausreichend kleine Werte  $r/a$  kann hier wie zuvor die Reihe ohne großen Fehler nach dem 1. Glied abgebrochen werden, so daß unter Außerachlassung von  $\mu_1$  und  $\mu_2$  dieselbe Form mit ihren Belastungs- und Geometrieabhängigkeiten vorliegt!

Wu, 1968, erlaubt die Anwendung der LEFM auf Faserverbund nur, wenn folgende Bedingungen eingehalten werden:

Die Rißorientierung verläuft mit den Hauptachsen.

Die Spannungsintensitätsfaktoren für die anisotropen Fälle müssen mit den Spannungsverteilungen und Rißformen des isotropen Falles übereinstimmen.

Die kritische Richtung ist in Richtung der Hauptachsen.

Diese Bedingungen werden in etwa bei UDV aufrecht erhalten.

Welche Rißdefinitionen beim Faserverbund zu beachten sind, zeigt Bild 7.24.

Bei schieferm Kraftangriff zur Faserrichtung eines UD-Verbundes (Bild 7.25) kommen Ergebnisse von [Cruse] zum Tragen. Analog zum homogenen  $K_I$ -Wert kann ein anisotroper Wert entsprechend Bild 7.26 zu

$$K_a = P_a \sqrt{a} F(\text{Geometrie}) \quad (7.31)$$

definiert werden. Allerdings ist dieser Spannungsintensitätsfaktor keine kritische Größe wie der  $K_I$ -Wert, sondern nur eine geeignete Materialbeschreibungsgröße, die den Rißfortschritt in einer Schicht relativ gut wiedergeben kann. Allgemein gültig ist die Größe nicht anwendbar. Das liegt daran, daß im Verbund normalerweise auch Schubspannungen auftreten, die Rißformen I und II gleichzeitig bewirken. Zum Vergleich verschiedener Lamine muß  $K_Q$  (der Index Q ist in der engl. Literatur üblich,  $K_Q$  wird dort candidate stress intensity factor genannt) deshalb in die zugehörigen Anteile  $K_{I_Q}$  und  $K_{II_Q}$  zerlegt werden. Dieses gelingt über

Beziehungen aus [Sih/Paris], die die Rißausbreitungskraft in einem anisotropen Werkstoff beschreiben (s. auch [Sih/Paris/Trowen], 1977)

$$G_Q = K_{IIa}^2 \frac{q_{11}}{2} \Im_m(\mu_1 + \mu_2) + K_{Ia} K_{IIa} \frac{1}{2} \Im_m \left( q_{11} \mu_1 \mu_2 - \frac{q_{22}}{\mu_1 \mu_2} \right) + K_{Ia}^2 \frac{q_{22}}{2} \Im_m \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \right) \quad (7.32)$$

Aus dieser Formel kann  $G_Q$  für jedes Laminat leicht ermittelt werden, wenn mit der wie folgt hergeleiteten Umformung die Bruchzähigkeitsgrößen  $K_I$  und  $K_{II}$  ermittelt werden.

Durch Überlagerung der Gleichungen (7.28) und (7.30) wird das gesamte Spannungsfeld beschrieben. Da  $K_I$  und  $K_{II}$  feste Werte für eine bestimmte Probenform sind, kann vereinfacht der kombinierte Spannungsverlauf auf der Rißachse betrachtet werden ([Konish/Swedlow/Cruise], 1973)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} K_I \operatorname{Re}(-\mu_1 \mu_2) + K_{II} \operatorname{Re}(-\mu_1 - \mu_2) \\ K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} \quad (7.33)$$

Nach Logarithmierung dieser Ausdrücke erhält man für die beiden letzten Terme

$$\ln \sigma_y = \ln \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} - \frac{1}{2} \ln r, \quad \ln \tau_{xy} = \ln \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} - \frac{1}{2} \ln r. \quad (7.34)$$

Um  $K_I$  und  $K_{II}$  ermitteln zu können, muß der Verlauf (Minimal zwei Werte) an der Rißspitze von  $\sigma_y$  und  $\tau_{xy}$  längs der Achse bekannt sein. Dazu verhilft eine Finite-Elementrechnung der Probe unter der Randbedingung beginnenden Rißwachstums (Bild 7.27). Die Spannungen werden logarithmisch aufgetragen, so daß eine Gerade mit Neigung  $1/2$  aus der Rißspitze heraus die Glgn. (7.34) darstellt. Für beginnenden Rißwachstum geht

$$K_I \rightarrow K_{IQ} \quad \text{und} \quad K_{II} \rightarrow K_{IIQ}.$$

Damit ist  $G_Q$  leicht ausrechenbar.

Das vorgenannte Verfahren wird auch auf Lamine angewendet, wie Bild 7.28 zeigt. Es ist ferner aus diesem Bild ersichtlich, daß zwei Wertegruppen  $J_a = G_Q$  auftreten, die sich um Zehnerpotenzen unterscheiden. Die Gruppe, bei der hohe Energie aufgewendet werden muß, gehört zum FB, während die energieärmere zum ZFB gehört, bei dem sich Risse in der Matrix ausbreiten.

Für  $\alpha = 45^\circ$  bedeutet das, daß der Riß sich nicht kollinear ausbreitet, und daß Rißfall I und II gemeinsam auftreten. Für  $\alpha = 90^\circ$  ist der Riß kollinear, und es tritt nur der Rißfall I auf. Daß bei  $45^\circ$  und  $90^\circ$  derselbe Wert  $G_Q$  vorliegt, bedeutet, der

Riß führt in beiden Fällen zu demselben Spannungsfeld, nur der Rißweg und die Rißarten sind verschieden. Tritt Matrixbruch auf, so wird er allein von Spannungsfeld abhängig sein, aber nicht von Rißfall und Rißrichtung.

Eine andere Möglichkeit  $G_Q$  zu ermitteln, ist mit Hilfe des Riceschen  $J$  - Integrals (Bild 7.29)

$$J = \int_{\Gamma} (W dy - T \frac{\partial u}{\partial x} ds) \quad (7.35)$$

gegeben. Darin stellt  $\Gamma$  die Kurve um die Rißspitze dar,  $W$  die Verzerrungsenergie,  $T$  den Spannungsvektor,  $u$  die Verschiebung und  $ds$  ein Wegelement.

Die physikalische Übereinstimmung zwischen  $J$  und der gesamten Verzerrungsenergie-Freisetzungsrates wurde von Rice mit Hilfe des Linienintegrals bewiesen. Es gilt

$$J = G_I + G_{II} + G_{III} \quad \left( = \frac{K_I^2}{E} + \frac{K_{II}^2}{E} + \frac{K_{III}^2}{E} \frac{1+\nu}{2} \right) \quad \begin{matrix} \text{im isotropen} \\ \text{Fall} \end{matrix} \quad (7.36a)$$

Für Faserverbunde wird

$$J_Q = G_Q \quad (7.36b)$$

aber nur dann, wenn der Riß in der Entstehungsrichtung weiter wächst.

Wie  $J$  ermittelt wird, zeigen Tirosh/Berg. Bei ihnen wird sowohl eine numerische als auch eine empirische Lösung angegeben.  $J$  ist abhängig vom Spannungszustand der Rißfälle I und II.

Bei der numerischen Methode werden die

$$\Delta J_i = \frac{1}{2} \sigma_y(y_i) \epsilon_y(y_i) \Delta y_i$$

entsprechend Bild 7.30 bestimmt, wobei eine finite Element-rechnung die  $\sigma_y$  und  $\epsilon_y$  -Verteilung liefert. Bei der empirischen Methode wird  $\Delta J$  nach Einsetzen des Spannungs-Dehnungsgesetzes zu

$$\Delta J_i = \frac{1}{2} E^* \epsilon_y^2(y_i) \Delta y_i \quad (E^* = E_1 \text{ oder } E_2)$$

umgeformt, und es müssen nur noch Meßwerte  $\epsilon_y$  eingesetzt werden. Als Energiefreisetzungsrates geben die beiden Autoren (vgl. Glg. (7.22))

$$\begin{aligned} G_I &= \frac{K_I^2}{\sqrt{2E_1E_2}} \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \frac{E_1}{2G_{12}} - \nu_{21} \right)^{-1/2} \hat{=} K_I^2 / E_1^* \\ G_{II} &= \frac{K_{II}^2}{\sqrt{2} E_1} \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \frac{E_1}{2G_{12}} - \nu_{21} \right)^{-1/2} \hat{=} K_{II}^2 / E_2^* \end{aligned} \quad (7.37)$$

an, wobei weder die Indizierung von  $\nu_{21}$  angepaßt werden mußte.

<sup>1/3</sup>In ASTM STP 381 sind die Werte!



Damit wird für den EFZ,  $G_{III} = 0$ ,

$$J = \frac{1}{E_1} \left( K_I^2 \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + K_{II}^2 \right) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{E_1}{4G_{12}} - \frac{l_{2,1}}{2}}. \quad (7.38)$$

Extra zu erwähnen ist noch die versuchstechnische Ermittlung von  $J$  bzw. letztlich  $K_Q$ . Sie gelingt mit Hilfe einer Vielzahl äquidistanter DMS-Meßstellen auf einer Probe, während bei der üblichen Versuchsermittlung von  $K_Q$  eine Versuchsreihe vieler Proben mit unterschiedlichen Rißlängen gefahren werden muß. Bild 7.31 zeigt für zwei Werkstoffe einen Vergleich der Ergebnisse zwischen Theorie und Versuch.

Gemischte Bruchformen:

Wenn vorausgesetzt werden kann, daß die Rißausbreitungskraft  $G$  eine Materialgröße ist, die nicht von der Belastungsart abhängt, so muß gelten ([Sanford/Stonesifer], [Rice])

$$J = G = G_I + G_{II} = \text{const.} \quad (\text{Invariante}).$$

(Laut Sih/Chen sprechen allerdings einige Versuchsergebnisse dagegen). Infolge der Existenz von  $G = \text{const.}$  können dann die Bruchzähigkeiten für den Schub aus dem Rißöffnungsfall I ermittelt werden! Irwin hat gezeigt, daß

$$G_c = C K_c^2,$$

weshalb formal angesetzt werden kann, daß

$$G_c = C_1 K_I^2 + C_2 K_{II}^2 = \text{const.}, \quad (7.39a)$$

wobei die  $C_1$  und  $C_2$  Funktionen der Nachgiebigkeiten sind. Im ESZ besteht die Beziehung

$$\sqrt{C_1/C_2} = \sqrt[4]{E_1/E_2}.$$

Abschließend soll noch aus [Corten] für gemischte Bruchformen ein Interaction-Diagramm für Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  und  $K_{II}^c$  vorgestellt werden (Bild 7.32). Darin ist ersichtlich, daß bei dem dort betrachteten Bruchverhalten unter Druck/Schub oder Biegung der Zusammenhang nicht (Index c statt a verwendet)

$$\left( \frac{K_I}{K_{Ic}} \right)^2 + \left( \frac{K_{II}}{K_{IIc}} \right)^2 = 1 \quad (7.39a)$$

entsprechend  $J = G_I + G_{II}$  ist, sondern daß er

$$\left( \frac{K_I}{K_{Ic}} \right)^4 + \left( \frac{K_{II}}{K_{IIc}} \right)^2 = 1 \quad (7.39c)$$

lautet. Das dürfte physikalisch darin begründet sein, daß eine

Druckspannung senkrecht zum Riß für Reibung in der Rißfläche sorgt (vgl. Bild 7.5). Weitere Ausführungen sind in [Corten], S. 95, zu finden.

In [Phillips, 1974] werden u.a. folgende Erkenntnisse für die Anwendung der Bruchmechanik auf CFK gezogen:

$K_c$  ist ziemlich unabhängig von der Rißgröße. Die  $K_c$ -Werte streuen aber sehr.

### b) $S_c$ - Theorie

In [Sih/Chen] wird eine neue Bruchanalyse von UD-Verbunden vorgestellt. Lag sonst als Annahme vor, daß bei einem spröden Bruchverhalten ein gerader Rißfortschritt sich einstellt (Bild 7.33), so wird hier eine eventuelle Richtungsänderung des Risses zugelassen und neben der Bruchzähigkeit mitbestimmt. Diese Theorie,  $S_c$ -Theorie gegenüber der  $K_c$ -Theorie genannt, erlaubt die Behandlung gemischter Bruchformen, bei denen der Riß faserparallel in der Matrix verläuft. Die Gültigkeit der Theorie wurde durch experimentelle Daten von Scotchply 1002 belegt.

Wie die Bruchbilder von Verbunden zeigen, hängen sie sehr stark von den Materialeigenschaften der Komponenten, den Fabrikationsbedingungen und dem Altern ab. Die immer vorhandenen kleinen und kleinsten Anfangsrisse haben verschiedenen Brucherscheinungen bei Belastung zur Folge, die von Oberflächenbrüchen bis zu büstenähnlich aussehenden Brüchen reichen. Energiemäßig können bei den extremen Brucharten sich um eine Größenordnung unterscheidende Energiemengen freigesetzt werden.

Die  $S_c$ -Theorie (energy density theory) geht von der Energiedichte an der Rißspitze aus, die einen kritischen Wert bei Bruchbeginn einnehmen wird. Dabei werden die Belastungsrichtung, die Faserichtung und der Faservolumenanteil mit berücksichtigt.

#### Isotropie:

Wie in Bild 7.34 eingezeichnet, enden die Aussagen der Kontinuumsmechanik in Abstand  $r_0$  kurz vor der Rißspitze. In dem Bereich des Elementes  $\Delta A = r dy dr$  eines isotropen Materials lautet die Energiedichte

$$\frac{dW}{dA} = \frac{1}{r} \bar{S} = \frac{1}{r} (\bar{a}_{11} K_I^2 + 2\bar{a}_{12} K_I K_{II} + \bar{a}_{22} K_{II}^2) + \dots, \quad (7.40a)$$

aber auch

$$\frac{dW}{dA} = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \text{ mit } \{\epsilon\} = [S] \{\sigma\} \text{ und} \quad (7.40b)$$

$\sigma_x = \sigma_x(K_I) + \sigma_x(K_{II})$ ,  $\sigma_y, \tau_{xy}$  entsprechend den Glgn. (7.25) und (7.26). Die Energiedichte hat einen endlichen Wert bei  $r = r_0$ . Die Koeffizienten  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  (aus Koeffizientenvergleich der Glgn. (7.40a und b) erhaltbar) gehören zur Matrix. Sie lauten bei EFZ und für den Fall Isotropie, an dem wir die  $S_c$ -Theorie hier vereinfacht zeigen, (Sih/Chen, 1973)

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= \frac{1}{16G} [3 - 4\nu - \cos \varphi (1 + \cos \varphi)] = \bar{a}_{11}(S_{ik}, \varphi) \\ \bar{a}_{12} &= \frac{1}{16G} [2 \sin \varphi (\cos \varphi - (1 - 2\nu))] \\ \bar{a}_{22} &= \frac{1}{16G} [4(1 - \nu)(1 - \cos \varphi) + (1 + \cos \varphi)(3 \cos \varphi - 1)]. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Die Intensität dieses Energiefeldes,  $\bar{S}$  genannt, verändert sich auf dem Radius  $r_0$  mit  $\varphi$  entsprechend den vorgenannten Beziehungen für die  $\bar{a}_{ik}$ . Die Rißausbreitung wird sich an der Stelle bzw. unter der Richtung  $\varphi_0$  einstellen, an der  $\bar{S}$  ein Minimum hat, an dem

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \varphi} = 0 \quad (7.42)$$

gilt. Aus der Minimumforderung ist dann  $\varphi = \varphi_0$  berechenbar und entsprechend  $K_c$  der kritische Wert  $S_c$ , bei dem die Rißausbreitung erfolgt.

$$S_c = \bar{S}(K_I, K_{II}, \varphi_0) \quad (7.43)$$

#### Quasihomogene Anisotropie (UDV):

Bei Orthotropie zum Beispiel sind in Glg. (7.40b) die Spannungen nach den Glg. (7.28) plus (7.30) einzusetzen, wobei die  $\mu$ -Werte von Glg. (7.29) geliefert werden. Damit sind  $\bar{a}_{ik}$  durch den Koeffizientenvergleich ermittelbar. Sie sind nun entsprechend kompliziertere Funktionen der  $S_{ik}$  des Faserverbundes und des Winkels  $\varphi$  und sind hier nicht weiter aufgeführt. Es sei hier nur auf die Literatur [Sih/Chen u.a.] und [Sih, 1972,] verwiesen. Ein Vergleich mit einem dem nachbeschriebenen Modell liefert Bild 7.38.

#### c) Matrix-Crack-Propagation-Modell

Neben die Bruchmodelle, die sich auf die anisotrope Elastizität abstützen, stellen [Sih/Chen u.a.] das oben genannte Modell (Bild 7.35). Es behandelt ebenfalls einen gemischten Bruch (mixed mode fracture) von UDV, stützt sich aber auf die Annahme, daß immer zwischen zwei Faserschichten ein Bruch in der Matrix auftritt und der Winkel zwischen Faser und Lastrichtung so groß ist, daß ein Matrixbruch ( $\alpha$  größer ca.  $10^\circ$ ) gewährleistet wird. Das Bruchkriterium basiert wieder auf der Verzerrungsenergie  $\bar{S}$ , die ja der Beziehung ( $\bar{a}_{11}$  usf. aus [Sih/Chen, NADC-TR-73-1])

$$\bar{S} = \bar{a}_{11} K_I^2 + \bar{a}_{12} K_I K_{II} + \bar{a}_{11} K_{II}^2$$

gehört. Der kritische Wert  $S_c = \bar{S}(K_I, K_{II})$  bei  $\varphi = \varphi_0$  gehört nun gegenüber der vorgenannten  $S_c$ -Theorie teilweise zu Verbundgrößen und teilweise zu reinen Matrixwerten.

Nach Bild 7.36 sind

$$\begin{aligned} K_I &= \Phi(x=1) \sigma \sqrt{a} \sin^2 \beta \quad (\sigma_x, \tau_{xy} = 0) \\ K_{II} &= \Psi(x=1) \sigma \sqrt{a} \sin \beta \cos \beta \quad (\sigma_y, \tau_{xy} = 0), \end{aligned} \quad (7.44)$$

wobei die Funktionen  $\Phi(x)$  und  $\Psi(x)$  von den elastischen Konstanten des Verbundes und den geometrischen Parametern abhängen. Als Modell wird dabei ein Sandwich herangezogen. Die Funktionswerte  $\Phi(x=1)$  und  $\Psi(x=1)$  werden numerisch aus Fredholmschen Integralgleichungen (Anhang [Sih/Chen]) berechnet. Für Scotchply 1002 mit den Werten

$$\begin{aligned} E_{II} &= 5 \cdot 10^6 \text{ psi} ; E_{\perp} = 1,62 \cdot 10^6 \text{ psi} ; E_M = 4,5 \cdot 10^5 \text{ psi} ; \\ \nu_{II\perp} &= 0,05 ; G_{\#} = 7 \cdot 10^5 \text{ psi} ; \nu_M = 0,35 ; \varphi = 56 \% \text{ (Faservol. !)} \end{aligned}$$

werden

$$\Phi(1) = 0,29 \text{ und } \Psi(1) = 0,17.$$

Das Einsetzen aller Beziehungen und Werte liefert schließlich für  $\sigma \rightarrow \sigma_c$

$$\begin{aligned} S_c &= \bar{a}_{11} K_{Ic}^2 + 2 \bar{a}_{12} K_{Ic} K_{IIc} + \bar{a}_{22} K_{IIc}^2 \\ &= \sigma_c^2 a Y(\beta, \varphi_0). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Entsprechend Bild 7.36 genügt  $Y(\beta, \varphi_0)$  der Funktion (hier  $\alpha \equiv \beta$ )

$$\begin{aligned} Y(\beta, \varphi_0) &= 0,29^2 \bar{a}_{11} \sigma_c^2 a \sin^4 \beta + \dots + \dots \\ &= 0,084 \bar{a}_{11} \sin^4 \beta + 0,099 \bar{a}_{12} \sin^3 \beta \cos \beta + 0,029 \bar{a}_{22} \sin^2 \beta \cos^2 \beta. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Bild 7.37 zeigt verschiedene  $S_c = \text{const.}$ -Kurven. Es zeigt sich dort für Scotchply 1002, daß die Diskrepanz zu Versuchswerten mit abnehmendem Faserorientierungswinkel  $\alpha$  wächst. Das ist leicht erklärlich, weil bei kleinen Winkeln Faserrisse, Interfacebrüche und Faserherauszug auftreten, die Energiebeträge darstellen, die nicht im  $S_c$ -Wert stecken.

Die Abhängigkeit der kritischen Spannungen von der Lastangriffsrichtung  $\alpha$  zeigen Bild 7.38 für Scotchply 1002 und 7.39 für Thornel 50 - Epoxidharz. Für Werte  $\alpha \rightarrow 0^\circ$  würde das anisotrope Modell der  $S_c$ -Theorie eine bessere Übereinstimmung mit den Versuchswerten geben.

d) Aufspaltung eines Risses

Wenn ein unidirektionaler Faserverbund einen Riß (engl. crack) quer zur Faserrichtung - wie in Bild 7.40 - hat, so wird dieser in seiner Ebene quasistatisch weiterschreiten, falls

$$G_x = 2\gamma_x \quad (7.47)$$

ist, (von Harrison wird statt  $2\gamma$  der Buchstabe R benutzt).

Eine notwendige Bedingung für den Rißfortschritt in beliebiger Richtung ist nach Orowan  $G > 2\gamma$  (das Gleichheitszeichen gilt, falls keine Energiedissipation auftritt). Damit tritt eine Aufspaltung (engl. split) eines Risses senkrecht zur Ausgangsrißebene nur auf, wenn

$$G_y > 2\gamma_y \quad (7.48)$$

Voraussetzung ist, daß die Länge der Aufspaltung kleiner  $a$  ist. Der Spannungszustand bei der Entstehung dieser Aufspaltung ist der bei einem Gemisch aus Rißfall I und II.

Die vorgenannte Ungleichung ist mit Energiedissipation in Form elastischer Wellen verbunden, weil quasistatisches Wachstum nur bei  $G_y = 2\gamma_y$  stattfinden kann. Wir erhalten bei  $G_y > 2\gamma_y$  also ein plötzliches Wachstum, bei dem nicht statisches sondern dynamisches Kräftegleichgewicht vorliegt.

Als notwendige Bedingung, daß der Riß in Bild 7.40 (Rißfall I) als Aufspaltung fortschreitet, schreibt Harrison die Bedingung

$$\frac{G_x}{G_y} < \frac{\gamma_x}{\gamma_y} \quad (7.49)$$

an. Darin hängen das Verhältnis  $G_x/G_y$ , sowie  $\gamma_x$  und  $\gamma_y$  nur von der Beanspruchungsart und den elastischen Konstanten ab. Sowohl  $G_x$  als auch  $G_y$  sind durch  $K_I = \sigma_y \sqrt{a} Y\left(\frac{a}{W}\right)$  (vgl. Glg. (7.37)) ausdrückbar. Für das Schließen des Risses allein wie für das Schließen von Riß plus Aufspaltung ist nämlich dieselbe Arbeit notwendig.

Die Größen in Glg. (7.49) bestimmte Harrison numerisch (z.B.  $G_x/G_y$  mittels einer Finite-Element-Methode) und versuchstechnisch. Für  $E_y/E_x = E_v/E_L = 1$  (Isotropie) zum Beispiel wird  $G_x/G_y = 5,8$  und für  $E_y/E_x = 52$  wird  $G_x/G_y = 16,9$ .

Als vielleicht wichtigstes Ergebnis findet er, daß  $\frac{G_x}{G_y}$  mit zunehmendem Anisotropiegrad  $\frac{E_{II}}{E_I}$  wächst. Das führt dazu, daß der Riß bei größerem

$E_{II}/E_I$  eher quer zu den Fasern - also in der alten Reißebene - weiterwächst.

#### 7.2.4 Anwendung der Bruchmechanik auf das Faserverbund-Laminat

Um allgemein bei Verbundschalen das Bruchverhalten erfassen zu können, müssen die Ergebnisse bei UD-Verbund mit und ohne faserparallele Beanspruchung auf vielschichtige Laminat erwehert werden.

##### Bruchmechanik unter Verwendung der $K_Q$ -Werte:

In [Konish/Cruse/Swedlow, 1973] wird die Bruchmechanik auf spezielle orthotrope Verbundlaminat angewendet. Es wird behauptet, daß die LEFM ein geeignetes Instrument für CFK ist, um den Reißfortschritt zu berechnen. Ihre Größen hängen aber von den Schichtorientierungen ab.

Dem analytischen Modell liegt <sup>bei</sup> ihnen als Voraussetzung zugrunde: Wenn die Schichtspannung - durch den Reiß verursacht - dieselbe Größe wie beim UDV-Bruch erhält, dann wächst der Reiß!

Die hier betrachteten Laminat sollen symmetrisch aufgebaut sein. Als Reißfall wird nur I betrachtet. Für den Reißfall I gilt bei einem homogenen, orthotropen Laminat des Bildes 7.41 in der Ebene des Risses und bei bezug auf das Bauteil-KOS und der Annahme der Reiß laufe in der alten Ebene weiter,

$$\{\hat{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \sqrt{\hat{S}_{22}/\hat{S}_{11}} \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.50)$$

Darin sind die  $\hat{S}_i$  die globalen Nachgiebigkeitskoeffizienten des Laminates entsprechend

$$\{\hat{\epsilon}\} = [\hat{S}] \{\hat{\sigma}\} \quad (7.51)$$

Man erhält dann für die Verzerrungen vor dem Reiß

$$\{\hat{\epsilon}\} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} [\hat{S}] \begin{Bmatrix} \sqrt{\hat{S}_{22}/\hat{S}_{11}} \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.52)$$

Entsprechend der Kontinuitätsbeziehung, daß die Dehnungen  $\{\epsilon\}_k = \{\hat{\epsilon}\}$ , sind die bauteilachsenbezogenen Schichtspannungen bekannt

$$\{\sigma\}_k = [Q]_k \{\epsilon\}_k \quad (7.53)$$

Mit der Transformation auf die Orthotropieachsen des Laminates stehen auf der rechten Seite neben  $K_I$  nur noch Schichtgrößen, die mit den Nachgiebigkeitskoeffizienten des Laminates verbunden sind

$$\{\sigma_{UD}\}_k = [T_\sigma]_k^{-1} \{\sigma\}_k = [T_\epsilon]^T \{\sigma\}_k \quad (7.54)$$

und ausgeschrieben

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \tau_{\#} \end{Bmatrix}_k = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} [T_\epsilon]_k [Q]_k [\hat{S}] \begin{Bmatrix} \sqrt{\hat{S}_{22}/\hat{S}_{11}} \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} I_{11} \\ I_{12} \\ \tau_{\#} \end{Bmatrix}_k \quad (7.55)$$

Es wird nun angenommen, daß Bruch eintritt, wenn in der  $k$ 'ten Schicht die Bruchwerte von  $\sigma_{11}$  (FB) oder  $\sigma_{12}$  (ZFB) erreicht werden, allerdings in einem bestimmten Abstand vom Riß bzw. der Singularitätsstelle.

Der Abstand errechnet sich mit gemessenen  $K_Q$ -Werten aus den Formeln

$$r_{11} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_Q''}{\sigma_{11B}} \right)^2 \quad \text{und} \quad r_{12} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_Q''}{\sigma_{12B}} \right)^2 \quad (7.56)$$

Seine Größe liegt in beiden Fällen bei etwa 0,3 mm für HM-Fasern, womit die Gültigkeitsgrenze des homogenen Verbundmodells verbunden ist. Einige Verfasser geben die Zone der elastischen Singularität ungefähr mit dem Bereich an, in dem eine Schicht etwa 50 C-Faser- $\emptyset$ , beinhaltet oder durch Größenzusammenhänge wie  $l_0 \approx 2 r_{11}$  bzw.

$l_0 \approx 0,2 a$ .

Weil das Spannungsfeld <sup>in</sup> Glg.(7.55) durch einen einzigen Parameter beschrieben wird, besteht die Möglichkeit, z.B. das  $\sigma_{11}$ -Spannungsfeld in der  $k$ 'ten Schicht mit der  $O^0$ -Bruchprobe zu vergleichen. Es kann dann mit Hilfe der obigen Radien derjenige Spannungsintensitätsfaktor gefunden werden, der FB verursacht

$$(K_{IF})_k = \frac{\sigma_{11B}}{\tau_{11k}} \sqrt{2\pi r_{11}} \quad (7.57)$$

Für Matrixbruch gilt analog

$$(K_{IM})_k = \frac{\sigma_{12B}}{\tau_{12k}} \sqrt{2\pi r_{12}} \quad (7.58)$$

Durch Bildung des Verhältnisses der vorstehenden Gleichungen und durch Einsetzen der Gln. 7.56 erhält man schließlich [Konish/Cruse/Swedlow]

$$\frac{(K_{IF})_k}{K_Q''} = \frac{1}{\sigma_{11k}} \quad \text{und} \quad \frac{(K_{IM})_k}{K_Q''} = \frac{K_Q''}{K_Q''} \cdot \frac{1}{\sigma_{12k}} \quad (7.59)$$

Hiermit ist gezeigt, daß das Bruchkriterium für Faser und Matrix in der  $k$ 'ten Schicht nur von den Schichtwinkeln  $\alpha_k$ , den elastischen Konstanten und zwei voneinander unabhängigen Bruchspannungen abhängt. Die Abstände  $r_n$  und  $r_l$  erscheinen nicht in der obigen Beziehung.

Mit den Werten der Tabelle 7.4 können z.B. für ein BD-Laminat (AWV) folgende mit  $K_a^n$  normierten Kurven in Bild 7.42 gefunden werden. Dabei findet sich in einer "Faserbruchkurve" der Versuchswert  $K_Q^n$  wieder und in einer "Matrixbruchkurve" der Versuchswert  $K_a^l$ . Zu beachten ist, daß hier merkwürdigerweise der  $\pm 45^\circ$ -Experimentalwert auf die Faserkurve gefallen ist. Von großer Wichtigkeit wäre es, den Gültigkeitsbereich der erhaltenen zwei Bruchkurven eines Verbundes abzustecken.

Für MSV ist wegen des großen Aufwandes von den vorgenannten Autoren nur ein Spezialfall untersucht worden, das quasiisotrope  $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$  - Laminat mit 25 %/50 %/ 25 % - Dickenverteilung. Bei ihm sind die  $K_{IF}$  und die  $K_{IM}$  aller Schichten gleich, und es ergibt sich ein berechneter Wert von  $K_{IF} = 0,55 K_Q$  für das Laminat, während der Versuchswert  $0,64 K_Q$  erreichte. Diese Diskrepanz veranlaßt die obigen Verfasser, sich mehr auf die Ermittlung der  $G_Q$ -Werte zu verlegen.

Bruchmechanik unter Verwendung der  $G_Q$ -Werte:

Wie einige Versuchsergebnisse in [Konish/Swedlow/Cruse] zeigen, scheinen weniger der Spannungsintensitätsfaktor  $K_Q$  als die kritische Rißausbreitungskraft  $G_Q$  eine Materialkonstante für ein gegebenes Laminat zu sein. Der Versuch,  $K_Q$  direkt aus den  $K_{Qi}$  der einzelnen Schichten aufzubauen, hat sich als wenig versprechend herausgestellt. Dagegen scheint der Weg, über  $G_Q$  zu gehen, erfolgreicher zu sein.

In [Cruse] wird für symmetrisch aufgebaute, orthotrope Lamine der Übergang von den Schichtgrößen zur Laminatgröße gemacht. Die Belastung ist ebenfalls symmetrisch.



Für symmetrisch belastete, orthotrope Laminate, bei denen der Riß senkrecht zur Faser verläuft, gilt [Cruse]

$$G = - \frac{K_I^2}{2} \hat{S}_{22} \mathcal{J}_m \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} , \quad (7.60)$$

wobei

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_y \sqrt{2\pi r} , \quad (\hat{\sigma}_2 \equiv \sigma_y) \quad (7.61)$$

bleibt.

Es werden nun zwei Annahmen gemacht: der Riß bleibt in seiner Anfangsebene (Rißfall I) und die Zone des Rißwachtums durch Materialbruch ist klein verglichen mit der Anfangsgröße des Risses. Damit wird die Bruchenergie erheblich höher als bei Matrixbrüchen liegen. Mit Hilfe einiger Beziehungen und Umformungen läßt sich nun die rechte Seite der Glg. (7.60) in Schichtgrößen überführen. Dazu wird als erstes die Spannung am Rißgrund ( $x=a$ ) ermittelt. Sie lautet (Bild 7.43) ohne Nachweis

$$\frac{\hat{\sigma}_2}{\sigma_0} = 1 - \frac{a}{b} \mathcal{J}_m \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} . \quad (7.62)$$

Weiter kann das Ergebnis einer numerischen Studie von Konish verwendet werden. Dort wurde gezeigt, daß bei derselben Geometrie der  $K_I$ -Faktor für anisotrope und isotrope Proben gleich war

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{a} Y , \quad Y \equiv \sqrt{\pi} K . \quad (7.63)$$

Darin ist  $Y$  der Geometriefaktor.

Nach Einsetzen der letzten beiden Beziehungen, wobei bei der Rißspannung der Summand 1 vernachlässigt wurde, wird aus (7.60) die physikalisch brauchbarere Form

$$G = \sigma_0 Y^2 b \frac{\hat{S}_{22} \hat{\sigma}_2}{2} . \quad (7.64)$$

Da an der Rißspitze  $\hat{\sigma}_1 = \hat{\tau}_{12} = 0$ , so daß  $\hat{S}_{22} \hat{\sigma}_2 = \hat{\epsilon}_2$ . Für den Idealriß, also  $b \rightarrow 0$ , wäre  $\epsilon_2$  unbegrenzt. Das Produkt  $b \cdot \epsilon_2$  bleibt aber endlich und stellt  $\delta_I$  in Bild 7.23 dar.

$$G = \sigma_0 Y^2 \frac{\delta_I}{2} . \quad (7.65)$$

Diese Rißöffnungsverschiebung  $\delta_I$  würde im Fall des durchgehenden Risses für alle Schichten dieselbe sein. Hier ist anzumerken, daß in der Regel bei Faserverbund kein durchgehender Riß vorkommt. Mit dem Index  $Q$  für das Laminate werden  $\delta_I = \delta_i = \delta_Q$  und als Spannungshöhe beim Bruch  $\sigma_Q$ . Die Summation der einzelnen Schichtanteile (Glg. (4.174),

keine Biegung) liefert dann

$$G = G_a = \left( \sum_{i=1}^n \sigma_{a_i} \frac{t_i}{t} \right) Y^2 \frac{\delta_a}{2} . \quad (7.66)$$

Formal läßt sich weiter anschreiben

$$G_{a_i} = \sigma_{a_i} Y^2 \frac{\delta_{a_i}}{2} , \quad (7.67)$$

so daß das einfache Bruchkriterium

$$G_a = \sum_{i=1}^n G_{a_i} \frac{t_i}{t} \quad (7.68)$$

gefunden werden kann.

Ein Vergleich dieses Bruchkriteriums (nach Einbringen eines künstlichen Risses) mit experimentellen Ergebnissen ( $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$ -Laminat) war überraschend gut. Die Rechnung ergab  $G_a = 52 \text{ in lb/in}^2$ , während der Wert in Tabelle 7.4 (55.1 betrug.

Abschließend noch eine Bemerkung: In Verbundstrukturen mit ausgerichteter Fasereinlage und paralleler Beanspruchungsrichtung sind Brüche parallel zur Faser (Herausziehen der Fasern oder Adhäsionsbrüche) und senkrecht zur Faser möglich, je nachdem, ob die Fasern z.B. oberflächen-behandelt sind oder nicht. Bei mehrschichtigen Laminaten wird der Bruch zwangsläufig auch quer zu den Fasern laufen müssen.

### 7.3. Kerbbruchmechanik

Während sich die (Riß-) Bruchmechanik nur mit der Vergrößerung von Rissen befaßt, betrachtet die Kerbbruchmechanik die Rißeinleitung am Kerbgrund und die Vergrößerung des Risses [Radaj].

Die von Neuber entwickelte linear-elastische Kerbbruchmechanik, sowie die elastoplastische Kerbbruchmechanik betrachtet sowohl starke wie schwache Kerben.

Im Kerbgrund liegt bei örtlicher Plastizität allgemein ein zweiachsiger Spannungszustand vor, der das Fließen begünstigt, während bei ausreichender Bauteildicke etwa hinter dem Kerbgrund ein dreiachsiger Zugspannungszustand einen von dieser Stelle ansprechenden Sprödbbruch begünstigt. Bei Schwingbelastungen geht der Riß immer von der Kerboberfläche aus.

Eine Anwendung der Kerbbruchmechanik dürfte vorläufig nur bei Kunststoffen ohne Fasereinbettung durchführbar sein.

## 7.4 Mikro- und makromechanische Betrachtungsweise von Brüchen

### 7.4.1 Faserknickung durch Druck oder Schub

Unter Drucklast können - s. Bild 7.44 - recht verschiedene Brucherscheinungen im FK auftreten. Es besteht vor allem die Möglichkeit, daß die in Beanspruchungsrichtung liegenden Fasern unterhalb der Quetschspannung  $\sigma_{\text{HdB}}$  ausknicken können. Dabei werden die an der Oberfläche liegenden Fasern durch die umgebende Matrix weniger gestützt als die im Probeninnern liegenden. Das äußert sich bei Proben mit länglichem Querschnitt gegenüber solchen mit quadratischem Querschnitt in einer Abnahme der erreichbaren Druckspannung.

Lanir/Fung weisen nach, daß im linear-elastischen Bereich für  $5 < E_F/E_M < 150$  keine Beeinflussung des Tragverhaltens durch Faserknickung vorkommt, allerdings erwarten sie im plastischen Bereich einen Einfluß für hohe  $E_F/E_M$ . Sind Ablösungen der Fasern von der Matrix da, so wird die Knicklast verringert.

Im Rahmen des Tragverhaltens übernimmt entsprechend ihrer höheren Steifigkeit die Faser die Last, während die schwächere Matrix als Lastübertragungsmedium funktioniert, indem sie über Schub die Last an den Übergängen Faser-Matrix aufnimmt bzw. abgibt. Bedingt durch dieses Verhalten findet man zwei Instabilitätsformen vor, das Knicken durch Druck und das Knicken durch Schub.

Von Greszczuk, STP 546, sind beide Formen untersucht worden. Als Ergebnis fand er die folgenden Formeln (Bild 7.45, Ränder gelenkig gelagert).

$$\text{Druckknickung: } \sigma_{\text{CF}} = \frac{\pi^2 h^2}{12 L^2} E_F \varphi \left[ m^2 + \frac{24 L^4}{\pi^4 c h^3} \frac{E_M}{E_F} \frac{1}{m^2} \right] \quad (\varphi < 10\%) \quad (7.69)$$

$$\text{Schubknickung: } \sigma_{\text{CS}} = \frac{G_M}{1-\varphi} + \lambda \frac{\pi^2 E_F \varphi}{12} \left( m \frac{h}{L} \right)^2 \quad (\varphi > 10\%) \quad (7.70)$$

und bestätigte sie durch Versuch. Als Versuchsmodell wählte er dabei eine zweidimensionale Anordnung aus einzelnen Verstärkungstreifen, die sich mit Harzstreifen (bzw. -scheiben) abwechseln, deswegen würde man hier besser von Beulen reden. In den obigen Beziehungen sind  $2c$  die Dicke des Matrixstreifens,  $h$  die Dicke des Verstärkungstreifens und  $\varphi$  der Faservolumenanteil bzw. Verstärkungsvolumenanteil.

Wie die Auswertung der Formeln zeigt, liefert für normale Verstärkungsvolumenanteile ( $\varphi > 10\%$ ) die Instabilitätsformel für Schub den niedrigeren Wert.

Falls die Ränder des Bauteils eingespannt sind, kann  $\lambda$  von  $\lambda = 1$  (gelenkig) auf  $\lambda = 4$  (fest eingespannt) anwachsen. Näheres siehe [Greszczuk].

Die Auswertung der Formeln wurde von Greszczuk für verschiedene Parameterbetrachtungen vorgenommen. Bild 7.46 zeigt den Verlauf der kritischen Druckspannung über verschiedenen Verstärkungsvolumenanteilen  $\varphi$ . Bei den Versuchen verwendete er 6061-T 6-Aluminiumstreifen in Urethanharz ( $E_M = 2,5$  ksi) und zwei Epoxidharzen ( $E_M = 23$  und  $62$  ksi). Alle Proben waren so gestaltet, daß Eulerknicken nicht auftreten konnte. Bild 7.47 zeigt den Einfluß von  $E_M$  über  $\varphi$ .

Daß die Gln. (7.69) und (7.70) eine Gültigkeitsgrenze bei der Quetschspannung

$$\sigma_{\text{ndB}} = \sigma_F \left( \varphi + (1-\varphi) \frac{E_M}{E_F} \right) \quad (7.71)$$

hat, versteht sich von selbst und wird in Bild 7.48 dargestellt.

Sadowsky/Pu/Hussain betrachten die Instabilität von Fasern im Zusammenhang mit Wärmeausdehnungsdifferenzen. Da in ihrem Aufsatz die Gültigkeitsgrenzen (nach Meinung des Verfassers) nicht so gut herausgestellt sind, werden die dortigen Ergebnisse an dieser Stelle nicht mit denen von Greszczuk verglichen.

Zum Vergleich seien von B.W. Rosen

noch die kritische Beulspannung  $\sigma_c$

$$\sigma_c = 2\varphi \sqrt{\frac{\varphi E_M E_F}{3(1-\varphi)}} \quad ; \quad \varphi = \frac{t}{t+2c} \quad (7.72)$$

und die kritische Schubspannung von E. Lovell (Bild 7.49)

$$\tau_c = \sqrt[4]{\frac{2\varphi E_M E_F^3}{3(1-\varphi)}} \quad (7.73)$$

angegeben.

Wichtiger als das Knickproblem gerader Fasern ist in jedem Fall der Druckfestigkeitsverlust, der durch das fertigungsbedingte Vorhandensein nicht gerade ausgerichteter Fasernentsteht ([Hanasaka/Hasegawa] und [Greszczuk, STP 521]). Das Auftreten von Anfangskrümmungen der Fasern vergrößert außerdem den Festigkeitsstreuungsbereich (siehe Bild 7.50).

#### 7.4.2 Versagen der Haftung Faser-Matrix und Faseraufspaltung

Weitere mikromechanische Brucherscheinungen treten auf, wenn die Matrix infolge Überlastung (i.a. bei Zug, aber auch Druck) sich von der Faser löst und wenn die Fasern in sich selbst aufspalten.

Welchen Einfluß die Faser-Harz-Bindung auf  $\sigma_{\text{MAB}}$  hat, zeigt für einen Faserverbundwerkstoff Bild 7.51. Greszczuk wählte in diesem Fall Stahlfäden, die verschiedene Oberflächenbehandlungen erfuhren, um so unterschiedliche Interface-Festigkeiten zu erzielen.

Bei dem vorliegenden Beispiel ist eine Druckfestigkeitserhöhung um den Faktor zwei möglich.

Bei der Verwendung von organischen Fasern - so bei Kevlarfasern - besteht die Möglichkeit, daß die Fasern aufspalten. Dieses ist sowohl unter Druck als unter Querkraft möglich und läßt die entsprechenden Festigkeitswerte gegenüber den Längswerten erheblich absinken.

#### 7.4.3 Delamination

Die Delamination ist bekannt als die häufigste makromechanische Bruchursache im Faserverbund [Belanger]. Sie wird bedingt durch schlechte interlaminare Festigkeit. Als verursachende Spannungen kommen Schub- und Normalspannungen infrage. Bild 7.52 zeigt den Einfluß der Schubspannung bei der Dreipunktbiegung\*. Dem Einfluß der Normalspannung steht man mit großen Schwierigkeiten bei der Freie-Rand-Delamination gegenüber. Hierzu sei auf Abschnitt 8.1 verwiesen.

Einfluß auf die Delamination haben der Fasergehalt, die Faserbenetzung durch die Harzmatrix, die Adhäsion Faser-Matrix, die Bruchdehnung und das Schrumpfverhalten der Matrix, thermische Effekte, die Art der Faserverstärkungsmaterialien - ob Matten oder Gewebe etc. - u.a. mehr.

Rückblickend kann noch festgehalten werden: Wenn der Riß in Art einer Delamination verläuft, gefolgt von einem unabhängigen Schichtbruch, dann gilt die klassische LEFM nicht mehr [Cruse]. In diesem Fall wird die Energie durch alle drei Rißfälle I, II und III freigesetzt, ein Problem, das sich wegen seiner Schwierigkeit bisher der analytischen Bearbeitung entzogen hat.

## 7.5 Bestimmung der bruchmechanischen Kenngrößen

### 7.5.1 Allgemeines

Die Bestimmung bruchmechanischer Kenngrößen ist sowohl rechnerisch als auch experimentell möglich.

Auf rechnerischem Wege können - wenn vorhanden - analytische Ergebnisse herangezogen werden, meistens benutzt man aber numerische Methoden, da Geometrie und Belastung nicht sehr einfach sind. Es wird vor allem das Verfahren der finiten Elemente in Verbindung mit geeigneten Rißspitzen-Elementen [Radaj] angewendet. Auf die numerischen Methoden soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden (s. Literatur [Radaj]).

Auf experimentellem Wege gibt es ebenfalls verschiedene Methoden zur Bestimmung der  $K_c$ - und  $G_c$ -Werte. Die Bestimmung wird in Anlehnung an die ASTM-Methoden (ASTM Standards Part 31, 1969) für homogene Werkstoffe erfolgen. Damit wird jedoch den Besonderheiten des Faserverbundes noch nicht Rechnung getragen:

Zur Vereinheitlichung der Versuchsdurchführung müßten auch beim Faserverbund die Versuchsbedingungen (z.B. Belastungsgeschwindigkeit), die Auswerteverfahren und zusätzlich die Abmessungen festgelegt werden. Im Moment werden jedenfalls mit den vielfältigen Proben nur selten vergleichbare Meßergebnisse veröffentlicht. Daß zusätzlich über den Aufbau der Proben - wie UDV, AWV, KV, allgemeines Laminat, schräger Lastangriff usf. - zusätzliche Festlegungen notwendig sind, ist verständlich. Darüber hinaus wird der absolute Durchmesser der Faser Einfluß auf die Probenabmessungen nehmen, und wird der schon zitierte Randeinfluss breite Proben fordern. Breite Proben bewirken aber leider häufig Randeinspannungseffekte. Man sieht, der Aufwand wird beim Faserverbund erheblich größer gewesen sein, wenn einmal analog zu den isotropen Werkstoffen eine Normierung durchgeführt sein wird.

### 7.5.2 Messung von $K_c$ - und $G_c$ -Werten

#### Zusammenstellung der Methoden

Für die Messung der bruchmechanischen Kenngrößen werden drei Methoden herangezogen:

- a) Bestimmung der  $K_c$ -Werte mit Hilfe der Bruchkriterien (Griffith-Irwin Failure Criteria)
- b) Methode der elastischen Nachgiebigkeit  $C$  zur Ermittlung von  $G_c$  (Compliance Method)

c) Bestimmung der (Riß-) Brucharbeit zur Ermittlung von  $G_c$  (Work of Fracture Technique).

Diese Methoden liefern unterschiedliche Werte für die  $K_{Ic}$ - $G_c$ -Wertepaare, wobei der ermittelte Wert  $G_c$  oder  $K_{Ic}$  natürlich immer besser ist als der nach Glg. (7.37)

berechnete Partner.

$$G_I = K_{Ic}^2 \frac{1}{E_I} \quad (\text{z.B. für Rißfall I})$$

Bei der experimentellen Bestimmung von  $K_{Ic}$  nach der Compliance-Methode wird die Änderung der elastischen Nachgiebigkeit  $dC/da$  der Probe mit wechselnder Rißlänge ausgewertet, um erst die Änderung der elastischen Formänderungsenergie und daraus  $K_{Ic}$  zu bestimmen. Andere experimentelle Verfahren der  $K_{Ic}$ -Wert-Bestimmung (falls letztlich  $K_{Ic}$  gewünscht wird) beruhen auf der Messung der Spannungen oder der Verschiebung der Rißflanken in der Nähe der Rißspitze. Der  $K_{Ic}$ -Wert an unzugänglicher Stelle der Rißfront eines elliptischen Innenrisses oder halb elliptischen Oberflächenrisses wird bei isotropen Stoffen aus der Rißausbreitungsgeschwindigkeit bei Ermüdung bestimmt (Kapitel 8).

Einen groben Überblick, wie man die Rißfreisetzungsenergien der drei Rißfälle ermitteln kann, geben Sidey/Bradshaw in Bild 7.53. Die Werte, die sie erhalten haben, sind in Tabelle 7.5 abzulesen. Man sieht darin, daß Rißfall I die niedrigsten Werte liefert und am kritischsten ist.

### Probenformen

Bruchmechanische Kenngrößen werden an Proben mit scharfen Riß, die in einer Prüfmaschine belastet werden, ermittelt. Das Verfahren ist für isotrope Werkstoffe durch eine ASTM - Richtlinie genormt [Heckel]. An die Proben werden verschiedene Anforderungen gestellt. Es sind dies: Geringer Werkstoffaufwand, kleine Prüfkraft, genügend große Abmessungen, daß die plastische Zone an der Rißspitze relativ klein ist. Bei den Proben zur Messung isotroper Werkstoffe werden die Mindestabmessungen aus Vielfachen von  $(K_{Ic}/\sigma_F)^2$

$$b \geq 5 \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_F}\right)^2, \quad d \geq 2,5 \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_F}\right)^2, \quad l \geq 2,5 \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_F}\right)^2. \quad \sigma_F \text{ oder } \sigma_{0,2}$$

bestimmt (s. [Radaj], S. 135).



Bei spezieller Anwendung muß die Prüfkraft abgeschätzt werden mit Hilfe der Bruchzähigkeitsformeln für  $K_I$ :  $K_I$  wird geschätzt,  $\sigma_r$  ist bekannt, die Abmessungen der Probe sind festgelegt.  $P$ . Von vielen Probenformen haben sich die Mittenriß-Zugprobe, die Kompakt-Zugprobe und die Dreipunktbiegeprobe durchgesetzt. In [Heckel] werden einige der am häufigsten verwendeten Proben vorgestellt. Sie werden in den Bildern 7.54 a bis h aufgeführt, begleitet von einigen Varianten, die beim Faserverbund ebenfalls angewendet wurden.

Es folgt nun eine mehr oder minder willkürliche Zusammenstellung von Probenformen, die der Verfasser als <sup>3766</sup>Unterlage für die Festlegung endgültiger Probenformen auf dem Faserverbundsektor gesehen haben möchte:

- a) Dreipunkt-Biegeprobe mit einseitigem Riß  
(Three point bending test specimen)
- b) Kompakt-Zugprobe (CT-Probe bzw. WOL-Probe)  
(Compact tension specimen, auch wedge open loaded specimen)
- c) Mittenriß-Zugprobe (CN-Probe)  
(Centre notched (cracked) tensile specimen)
- d) Seitenriß-Zugprobe (SEN-Probe)  
(Single edge notched tensile specimen)
- e) Doppelseitenriß-Zugprobe  
(Double edge notched tensile specimen)
- f) Sich verjüngende Doppelkragarm-Probe (TC-Probe)  
(Tapered cantilever specimen)
- g) (Riß-) Brucharbeitsprobe (WF-Probe)  
(Work of Fracture Specimen)

Der Charpy-Impact-Test ist ~~best~~ [Phillips/Tetelmann] nur ein Biegeversuch unter großer Belastungsgeschwindigkeit. Daß <sup>aber</sup> zwischen dem statischen Versuch und dem schnellen Versuch Unterschiede von über 20 % in  $\sigma$  auftreten können, zeigen Ellis/Harris.

Die Risse in diese Proben werden bei Faserverbundwerkstoffen durch sorgfältiges Einsägen der Kerbe, etwa mit einer Juweliersäge, und nachfolgendes Einschneiden eines Risses in einer bestimmten Ebene mit einem Skalpell erzeugt.

Es ist noch anzumerken, daß manche Forschungsarbeiten (z.B. bei Phillips) mit taillierten Proben durchgeführt werden, weil dann der Riß besser in seiner Ebene verbleibt. Scharfe, natürliche Risse ergeben etwas niedrigere Werte als eingeschnittene Risse,

feinere Fasern hingegen höhere als dickere Fasern.

(Riß) Brucharbeit  $\gamma$  und Rißausbreitungskraft  $G_c$

In [Ellis/Harris, 1973] wird herausgestellt, daß eine Messung der Bruchenergie (Work of fracture) die Rißfreisetzungsenergie  $G_c$  nur selten ergibt, weil sie keine Aussage über die Aufteilung zwischen der den Anriß verursachenden Arbeit  $\gamma_i$  ( $i = \text{initial}$ ) und der Arbeit beim Rißfortschritt  $\gamma_f$  (propagation) mitliefern kann (Bild 7.55). Es gilt im linear elastischen Fall einmal (Rißfall I)

$$G_{Ic} = G_c = 2\gamma_i, \quad (7.74)$$

aber auch

$$G_c = \frac{K_{Ic}}{E^*}.$$

Je nach Versuch wird sich  $G_{Ic} \approx 2\gamma_i (= \gamma_i)$  oder  $2\gamma$  ergeben. Als  $\gamma_i$  bzw.  $\gamma_i$  kann der Wert beim Erreichen der kritischen Rißlänge angenommen werden.

Laut <sup>↓</sup>Beaumont/Harris setzt sich die Bruchenergie  $\gamma$  aus einer Summe von einzelnen Energieanteilen zusammen

$$\gamma = \gamma_f + \gamma_m + \gamma_r + \gamma_d + \gamma_{zo} + \gamma_{cb} = \gamma_i + \gamma_f \quad (7.75)$$

Es sind dies einmal die sogenannten Oberflächenenergien  $\gamma_f$  und  $\gamma_m$  von Faser und Matrix. Als zusätzlich zu beachtende Energien treten bei den Bruchmechanismen auf:  $\gamma_r$  - bei der Relaxation der Fasern, wenn sie reißen;  $\gamma_d$  - bei der Ablösung der Faser von der Matrix (debonding);  $\gamma_{zo}$  - beim Faserherausziehen (pull out), um die Reibung an der Grenze zur Matrix zu überwinden und  $\gamma_{cb}$  - beim Überbrücken des Risses (vgl. [Phillips/Tetelmann] und die Bilder 7.56 bis 7.58). Es ist hierbei zu beachten, daß die Anteile verschiedene Stufen des Bruchgeschehens kennzeichnen, womit deutlich wird, daß mit der Brucharbeit nur selten die Bruchzähigkeit ausreichend gut erhalten wird. Zur weiteren Verdeutlichung: Die Brucharbeit liefert einen Energiebetrag, der zur vollständigen Trennung beider Probenhälften führt, inklusiv Faserherausziehen; in Wirklichkeit findet das Faserherausziehen nach dem kritischen Rißfortschritt statt, und es gilt ([Phillips], Tabelle 7.6)

$$\gamma_i \leq \gamma. \quad (7.76)$$

Das Gleichheitszeichen gilt für einen faserparallelen Riß und UDV.

1) Index  $\gamma$  vorgelesen.

## Gegenseitige Umrechnung der Bruchkenngrößen

Eine solche Umrechnung führen Sih/Pagano [(VII - 432)] für ein orthotropes Laminat durch.

Als erstes bestimmen sie mit Hilfe einer Zugprobe (Bild 7.59) die Reißfreisetzungsenergie [Corten]

$$G_c = \frac{P^2}{2B} \frac{\partial(\frac{\Delta l}{P})}{\partial A} \quad (7.77)$$

In dieser Formel ist P die Last, B die Dicke, L die Längung und  $L/P = C$  die Nachgiebigkeit (engl. Compliance) der Probe.

Die Glg. (7.77) wird von Corten folgenderweise aus den Energiebetrachtungen (S. 7-19)

$$G_c = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{W_2 - W_1}{B \cdot \Delta a} = \frac{\partial W}{\partial A}$$

mit einer Mittenriß-Zugprobe\* der Dicke B und der Reißfläche A hergeleitet. Für diese Probe ergibt sich bei linearem Last-Verformungs-Verlauf bis zum Wert  $\Delta l$

$$W = \frac{1}{2} P \Delta l$$

Damit gilt weiter infolge  $P = k \Delta l$  und  $\Delta l = \text{konstant}$  die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{P}{k} \right) = \frac{1}{k} \frac{\partial P}{\partial A} + P \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{k} \right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{k} \frac{\partial P}{\partial A} = - \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{k} \right)$$

so daß

$$\frac{\partial W}{\partial A} = - \frac{1}{2} P^2 \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{k} \right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{k} = \frac{\Delta l}{P} = C \quad (7.78)$$

Für orthotrope Laminat besteht aber bei kollinearem Bruchverlauf eine Beziehung zwischen  $G_c$  und  $K_c$  der Art (beachte Glg. (7.37) und I $\leftrightarrow$ c) über

$$G_c = \frac{K_I^2}{E_I^*} = K_I^2 \sqrt{\frac{\hat{s}_{11} \hat{s}_{22}}{2}} \left( \frac{\hat{s}_{22}}{\hat{s}_{11}} + \frac{2 \hat{s}_{12} + \hat{s}_{66}}{2 \hat{s}_{11}} \right)^{1/2} \quad \text{ESZ} \quad (7.79)$$

so daß bei bekanntem  $G_c$  die Bruchzähigkeit  $K_c$  (natürlich wegen der Umrechnungsannahme ungenauer als  $G_c$ ) ermittelt werden kann.

Die  $\hat{s}_{i,j}$  des orthotropen Laminates sind ja leicht ermittelbar.

Umgekehrt liefert ein Brucharbeitsversuch  $K_c$ -Werte nach der LEFM-Beziehung

$$K_I = \frac{P \sqrt{a/\pi}}{B \cdot W} Y(a, W) \quad (7.80)$$

so daß  $G_c$  bestimmt werden kann [Sih/Pagano].

Die Ergebnisse sind in Tabelle 7.7 vergleichsweise dargestellt. Es zeigen sich - wie erwartet - bei den Brucharbeitsversuchen höhere Werte. Der Spitzenwert  $G_c$  bei etwa  $\varphi = 10\%$  ist fünf mal größer als der reine Matrixwert. Das bedeutet, daß für niedrige Faservolumen-gehalte die Lastübertragung zur Reißspitze geringer

\*CN-Probe

als bei hohen  $\varphi$ -Werten ist.

Optimale Bruchzähigkeiten hängen vom Fasergehalt, der Fasersorte und der Matrix ab! Welchen Einfluß die Faserrichtung bei UDV ausübt, zeigt Bild 7.60.

### 7.5.3 Anwendungsfälle

Phillips ermittelte bruchmechanische Kennwerte mit verschiedenen Methoden, und zwar a) Anwendung des Griffith-Irwin Kriteriums (CN-Probe), b) der Methode der Änderung der Nachgiebigkeit ( $\Delta l/P = C$ ) als Funktion der Rißlänge  $a$  (TC-Probe) und c) der Brucharbeit (WF-Probe).

Als Proben benutzte er einen KV, in dem Risse parallel zur einen bzw. quer zur anderen Faserrichtung angebracht wurden. Somit tritt, wegen dieser Orientierung kein störender Schubspannungseffekt an der Rißspitze auf. Die verschiedenen Proben (Bild 7.54) waren alle aus UDV-CFK (Tabelle 7.8). Die beiden CN- und TC-Proben waren tailliert, um den Riß in seiner Ebene zu behalten, als Prüfungsgeschwindigkeit waren 0,5 mm/min gewählt worden.

Phillips berechnete den  $K_c$ -Wert in Abhängigkeit von der bezogenen Rißlänge  $2a/W$  (die Rißlänge ist hier  $2a$ ), die jede einzelne CN-Probe kennzeichnet. Einzusetzen in die  $K_c$ -Formel sind die kennzeichnenden Größen  $P$ ,  $2a$  und  $W$  (hier Probendicke in der Rißebeine). Bei allen Proben ereignete sich der Bruch abrupt, die Bruchfläche war ziemlich eben, jedoch konnte ein unterschiedliches Faserherausziehen festgestellt werden. Als wesentliches Ergebnis ist nach Bild 7.61 keine Abhängigkeit des  $K_c$ -wertes von der Rißlänge festzustellen, allerdings zeigt sich ein sehr großer Streubereich.

Um die Bruchzähigkeit  $K_c$  mit der Rißfreisetzungsenergie  $G_c$  verbinden zu können, wird Glg. (7.81) benutzt. Der effektive Elastizitätsmodul  $E_I^*$  darin lautet (siehe auch Glg. (7.37))

$$\frac{1}{E_I^*} = \sqrt{\frac{\hat{s}_{11} \hat{s}_{22}}{2}} \sqrt{\frac{\hat{s}_{22}}{\hat{s}_{11}} + \frac{2\hat{s}_{12} + \hat{s}_{20}}{2\hat{s}_{11}}} \quad \text{Bei Orthotropic} \quad (7.81)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\hat{E}_1 \hat{E}_2}} \sqrt{\frac{\hat{E}_1}{\hat{E}_2} + \frac{\hat{E}_1}{2\hat{G}_{12}} - \hat{\nu}_{21}}$$

bei Kreuzverbund (Phillips, S. 135). Die Bestimmung von  $E_I^*$  erfolgte mit Hilfe der Schichtgrößen rechnerisch aber auch auf dem Versuchsweg.

Für isotrope TC-Proben führt die einfache Balkentheorie zu

$$\frac{\partial C}{\partial a} = \frac{\theta}{Eb} \left( \frac{a^2}{3h^3} + \frac{1}{h} \right) = \frac{\theta}{Eb} n_1, \quad (7.82)$$

wenn  $h$  die Höhe des Balkens und  $b$  die Breite ist. Falls die Probenkontur der Funktion in der Klammer folgt, ist <sup>die</sup> Bruchlast konstant. Aus den Versuchsergebnissen des Bildes 7.62 ist also  $E^*$  bestimmbar

$$\frac{1}{E^*} = \frac{b}{8m} \frac{\partial C}{\partial a} \quad (7.83)$$

bzw. die Bruchzähigkeit

$$K_C^2 = G_c \cdot E^* = \frac{P^2}{2B} \frac{\partial C}{\partial a} E^* = 4 \frac{P^2}{bB} m. \quad (7.84)$$

Aus Tabelle 7.9 kann abgelesen werden, daß der gemessene effektive Modul recht gut mit den berechneten ESZ-Werten zusammenpaßt.

Phillips zeigt in seinem Aufsatz abschließend, welche Durchgangsrißgrößen (bisher wurden praktisch nur Durchgangsrisse behandelt, die allerdings bei Faserverbund recht selten sind!) kritisch sind. Für einen Mittenriß\* ergibt sich aus den Tabellen 7.9 und 7.10 und mit dem Geometriefaktor  $\frac{1}{\pi \kappa^2} = 0,64$  bei 1 T/45/E entsprechend Glg. (7.21),

$$\begin{aligned} a &= \frac{K_C^2}{\sigma_c^2} \frac{1}{\pi \kappa^2} = \frac{G_c E^*}{\sigma_c^2} \frac{1}{\pi \kappa^2} \quad (7.85) \\ &= \frac{1,1 \text{ kJ/m}^2 \cdot 33 \text{ GN/m}^2}{(285 \text{ MN/m}^2)^2} \cdot 0,64 = 0,3 \text{ mm} \end{aligned}$$

wenn  $\sigma_c$  = Festigkeit bei ungestörtem Probenmaterial, einfach nach der Mischungsregel zu  $\sigma_c \approx \frac{1}{2} \cdot 45 \% \cdot 1270 = 285 \text{ MN/m}^2$  (Tabelle 7.8) berechnet wird.

Sanford/Stonesifer untersuchten UDV-GFK mit den speziellen Einzelseiten- und Doppelseiten-Rißzugproben. Auch sie ermitteln  $K_C$ -Werte mit Hilfe der  $K_C$ -Formeln über die Rißlängenveränderung (s. Bild 7.54) und  $G_c$ -Werte mit Hilfe von Nachgiebigkeitsmessungen (Bild 7.64). Tabelle 7.11 zeigt den Vergleich.

Mandell u.a. untersuchten numerisch und empirisch verschiedene Probenformen in Anwendung auf AWV-GFK und AWV-CFK. Sie kommen bei dem unsymmetrischen AWV zur Erkenntnis, daß das Spannungsverhalten an der Rißspitze dreidimensional erfaßt werden muß. Außerdem stimmen sie wegen des Randeffektes für breitere Proben.

Phillips/Tetelmann führen an, daß der Rißfortschritt leichter parallel zu den Fasern als senkrecht dazu verläuft. So wird häufig der  $G_c$ -Wert des UDV bei, vielleicht auch etwa unter dem  $G_c$ -Wert für die Matrix liegen.

\* CN-Probe

## 7.6 Fehlerprüfungsmethoden von Faserverbund

Außer der ständigen Überwachung der Komponenten eines Faserverbundes muß eine Überprüfung des Verbundwerkstoffes selbst sowie dem aus ihm hergestellten Bauteil möglich sein.

Die Methoden, mit denen solche Prüfungen auf Fehler bzw. Fehlerfreiheit vorgenommen werden, können sowohl zerstörungsfrei arbeiten (engl. Non Destructive Testing = NDT) als auch schädigend wirken. Bei der Zulassung und Güteüberwachung von Bauteilen ist es erwünscht, sowohl unter Nulllast als auch unter komplizierten Spannungsverhältnissen ([Buhmann]) Messungen vornehmen bzw. Kennwerte ermitteln zu können. In jedem Fall muß bei der Inspektion mit weitgehend zerstörungsfreien Prüfmethoden gearbeitet werden, weil man nur dann Stand und Vergrößerung der Fehler - wie Porosität, Rißbildung, Delamination - im Bauteil feststellen kann. Die Beurteilung der Schädigung kann nur in Korrelation mit Versuchsergebnissen geschehen, bei denen eine nicht zerstörungsfreie Untersuchung bis zum Bruch erfolgte.

Eine Aufstellung verschiedener Prüfverfahren ist in MIL-Hdbk 17 a aufgezeigt. Hier sollen nur einige, relativ häufig verwendete Verfahren vorgestellt werden.

Es werden nun verschiedene, zerstörungsfreie Prüfverfahren betrachtet, die als physikalischen Vorgang <sup>fest alle</sup> die Energiezustandsänderungen in unter äußerer Last stehenden Faserverbundlamina-ten benutzen.

Die von außen aufgebrachte Energie wird durch Rißbildung in Verlustarbeit und in eine plastische Deformation in unmittelbarer Nähe der Bruchspitze eines einzelnen Risses umgewandelt, sowie durch Schwingungen im Körper aufgezehrt. Weiterhin sind Energieumsetzungen in Wärme möglich.

### Ultraschallprüfung im Durchschallungsverfahren

Eine Anwendung der Körperschallmessung zur Bestimmung erster Mikro-Bruchvorgänge ist bei GFK schon seit längerem bekannt. Die physikalische Grundlage dieses zerstörungsfrei arbeitenden Verfahrens ist die unterschiedliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit mechanischer Schwingungen (Schallwellen, vgl. Kapitel 5)

in verschiedenen Materien [Buhmann] in Verbindung mit den Eigenheiten einer Welle wie Reflexion, Beugung, Streuung. Aufgrund der Überlegung, daß durch Trennungsvorgänge im Prüfling Reflexionsflächen entstehen, die zu einer Schalldruckminderung führen, wird die berührungslose Ultraschallprüfung im Durchschallungsverfahren benutzt. Man kann sie dazu benutzen, den Qualitätszustand eines Prüflings jederzeit und nach einer Schädigung zu erfassen, wenn das akustische Verhalten an dem wesentlichen Stelle des unbelasteten Prüflings bekannt ist.

### Schallemissionsanalyse

Von den bekannten Meßverfahren spricht das Schallemissionsverfahren auf die Bildung einzelner Risse wahrscheinlich am empfindlichsten an [Buhmann]. Es beruht auf der Aussendung von Körperschallwellen beim Entstehen eines Risses im belasteten Prüfling. Die mechanischen Schwingungen werden von einem aufgeklebten piezoelektrischen Beschleunigungsaufnehmer registriert und in elektrische Schwingungen umgesetzt.

Bild 7.65 zeigt das Ergebnis einer Schallemissionsanalyse (SEA). Diese zeigt sich einmal als relativ einfaches Inspektionssystem, dürfte aber besser als Möglichkeit zur unmittelbaren Verfolgung des Schadensereignisses ([Becht u.a.]) zu sehen sein.

### Holografische Interferometrie:

Das Verfahren der holografischen Interferometrie hat sich nach [Grünewald/Fritzsche] in den letzten Jahren zu einem wirkungsvollen Verfahren der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung von Kunststoff und FK entwickelt.

Die holografische Interferometrie ist ein optisches Verfahren zur Messung geringster Verformungen unter Belastung des Bauteils. Als physikalischer Vorgang wird die Interferenz von Lichtwellen ausgenutzt. Der Meßbereich umfaßt 0 bis 100  $\mu\text{m}$ ; die Meßgenauigkeit liegt bei 1  $\mu\text{m}$  es wird kohärentes Laserlicht verwendet. Die Materialinhomogenität wirkt sich durch kleinste Verformungen an der Materialoberfläche aus und stört das Interferenzmuster an diesen Stellen (Näheres siehe Fachliteratur bei Grünewald/Fritzsche).

Bei der Interpretation der erhaltenen, sogenannten Interferogramme sind folgende Wege möglich:

- qualitativer Vergleich verschiedener Muster (Grundmuster aus fehlerfreien Objekten)
- Berechnung von Interferogrammen und Vergleich mit experimentellen Mustern
- quantitative Bestimmung der Verformungen (äußerst schwierig!).

Die Anwendung der Methode erfolgte bei Grünwald/Fritzsich auf GFK- und CFK-Behälter. In diese Behälter wurden Fehler eingebaut der Art

- Doppelung durch Einlegen einer Trennfolie
- Faden- und Fadenteilbrüche durch Trennen
- Harzarme Schichtungen durch Aufwickeln ungetränkter Fäden
- Unregelmäßige Fadenablage durch Störung des Vorschubs
- Aufwicklung von eingefetteten Fäden, die dann keine Haftung mit dem Harz mehr haben.

Dann wurden die Auswirkungen dieser Fehler bei zunehmender Innendruckbelastung untersucht.

Es zeigte sich als Ergebnis, daß alle bedeutenden Fehler erkannt wurden, daß aber auch eine festigkeitsmäßig unbedeutende Harzgehaltänderung bei den verwendeten dünnwandigen Behältern registriert wurde.

Bild 7.66 zeigt das Interferogramm und den anschließend geborstenen Behälter.

#### Transparenzänderungsmessung:

Menges/Brintrup/Barking bestimmen Verformungsgrenzwerte mit Hilfe von Trübungsmeßeinrichtungen bei GFK (dieses Verfahren ist natürlich nicht bei schwarzem, undurchsichtigem CFK anwendbar). Die Anwendung dieses Meßverfahrens zur Ermittlung erster irreversibler Werkstoffveränderungen hat sich bisher nur bei Mattenlaminaten bewährt; für anisotropes GFK ergeben sich Schwierigkeiten.

#### Farbeindringverfahren

Dieses Verfahren beruht auf dem Eindringvermögen von Farbstoffen in Oberflächenrisse des Bauteils. Voraussetzung ist eine glatte Oberfläche, da sonst Fehlinformationen bei Rauigkeiten zu erwarten sind. Das Verfahren wird i.a. bei belasteten Prüfling durchgeführt und spricht leider erst relativ kurz vor der Bruchbelastung an.



## Thermografie

Als praktisch zerstörungsfreies Prüfverfahren hat die Ultrarot - bzw. Infrarot - Thermografie Eingang in die Qualitätskontrolle gefunden [Menges u.a.] .

Bei diesem Verfahren wird einmal der physikalische Effekt ausgenutzt, daß sich ein Teil der elastischen Deformationsenergie beim Auftreten eines Risses in Wärme umwandelt. Dieses führt infolge der schlechten Wärmeleitfähigkeit zu einem Wärmestau, also einer örtlichen Temperaturerhöhung. Andererseits kann man es ausnutzen, daß bei Fehlstellen in einem Bauteil das Wärmeleitverhalten und damit die Temperaturverteilung örtlich gestört wird, so daß die Wärmestrahlung örtlich verschieden ist. Die ausgesendete Wärmestrahlung wird von einer Kamera aufgenommen.

Für Isothermen (Bereiche gleicher Temperaturen) in einem Bauteil bewirkt ein durch eine Schädigung hervorgerufener Wärmestau ein Wandern der eingestellten Isothermen, entsprechend der Temperaturzunahme oder -abnahme.

Von Rifsnyder wurde recht zufriedenstellend über die Anwendung einer solchen, selbst entwickelten Kamera berichtet, deren Empfindlichkeitsgrenze bei einer Temperaturtrennschärfe von  $0,2^{\circ}\text{C}$  liegt. Menges/Brintrup/Barking kommen mit der AGA-Thermovisionsanlage, die ebenfalls die vorgenannte Temperaturtrennschärfe besitzt, zum Ergebnis, daß die auftretenden Wärmemengen für eine Fehlererkennung praktisch nicht ausreichen ( $\epsilon \geq 1\%$ ). Es ließen sich bei GFK nur Rißstellen nachweisen, die auch mit dem Auge erfaßt werden konnten. Damit eignet es sich wenig, laut Meinung der obigen Verfasser, für ein frühzeitiges Aufspüren von Schäden an GFK, bleibt aber als Prüfverfahren für undurchsichtige Materialien bestehen.

Festigkeits-hypothese	Spannungszustand		
	I. dreilachsig $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	II. zweilachsig	
		a) $\sigma_x, \sigma_y$ bzw. $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	b) $\sigma_x, \tau_{xy}$
1. Größte Normalspannung	$\sigma_v = \sigma_1 = \sigma_{\max}$ (Zug) $\sigma_v = \sigma_3 = \sigma_{\min}$ (Druck)	$\sigma_v = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$	$\sigma_v = \frac{1}{2}\sigma_x \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$
2. Größte Schubspannung	$\sigma_v = 2 \cdot \tau_{\max} = \sigma_1 - \sigma_3$	$\sigma_v = \sigma_1 - \sigma_3$ $= \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$	$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$
3. Größte Dehnung	$\sigma_v = \sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)$	$\sigma_v = (1 - \nu) \cdot \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ $\pm \frac{1 + \nu}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$ $- 0,35(\sigma_x + \sigma_y)$ $\pm 0,65 \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$	$\sigma_v = 0,35 \sigma_x$ $\pm 0,65 \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$
4. Größte Formänderungsarbeit	$\sigma_v = \sqrt{2 \cdot E \cdot a_f}$ $= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}$	$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x \cdot \sigma_y}$ $= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x \cdot \sigma_y + 2(1 + \nu)\tau_{xy}^2}$	$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + 2(1 + \nu)\tau_{xy}^2}$
5. Größte Gestaltänderungsarbeit	$\sigma_v = \sqrt{6 \cdot G \cdot a_g}$ $= \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$	$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y}$ $= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$	$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$

Bei nicht isotropen<sup>1</sup> Werkstoffen und ungleichen<sup>2</sup> Belastungsfällen ist  $\tau_{xy}$  durch  $\alpha_v \cdot \tau_{xy}$  zu ersetzen.

<sup>1</sup> Isotrop, d. h. gleiche Festigkeit nach allen Richtungen. Bei anisotropen Werkstoffen ist die kleinere Schubspannung einzusetzen.  
<sup>2</sup> Zum Beispiel  $\sigma$ -wechselnd,  $\tau$ -schwellend (vgl. Transmissionswellen).

Festigkeits-hypothese	Spannungszustand				Werkstoff und Beanspruchung
	II. zweilachsig			III. einachsig	
	c) $\tau_{xy}$ (reiner Schub)	d) Anstrengungsverhältnis $\alpha_v = \frac{\sigma_{zul}}{\tau_{krit}}$	e) Zug-/Schubbeanspruchung $\eta = \sigma_v / \tau_{xy}$		
1. Größte Normalspannung	$\sigma_v = \tau_{xy}$	$\frac{\sigma_{zul}}{\tau_{zul}}$	1	$\sigma_v = \sigma_x$	Spröde Stoffe (z. B. Gußeisen, Glas, Steine) bei Zug-, Biege- oder Verdrehbeanspruchung
2. Größte Schubspannung	$\sigma_v = 2 \cdot \tau_{xy}$	$\frac{\sigma_{zul}}{2 \cdot \tau_{zul}}$	2	$\sigma_v = \sigma_x$	Spröde Stoffe bei Druckbeanspruchung
3. Größte Dehnung	$\sigma_v = 1,3 \cdot \tau_{xy}$	$\frac{\sigma_{zul}}{1,3 \cdot \tau_{zul}}$	1,3	$\sigma_v = \sigma_x$	
4. Größte Formänderungsarbeit	$\sigma_v = \tau_{xy} \cdot \sqrt{2(1 + \nu)}$ $= 1,61 \tau_{xy}$	$\frac{\sigma_{zul}}{1,61 \tau_{zul}}$	1,61	$\sigma_v = \sigma_x$	Zähe Werkstoffe a) Federstahl
5. Größte Gestaltänderungsarbeit	$\sigma_v = 1,73 \cdot \tau_{xy}$	$\frac{\sigma_{zul}}{1,73 \tau_{zul}}$	1,73	$\sigma_v = \sigma_x$	b) Walz- und Schmiedestahl

Tabelle 7.1 Festigkeitshypothesen homogener, isotroper Werkstoffe (aus [HSB], Bl. 51100-01)

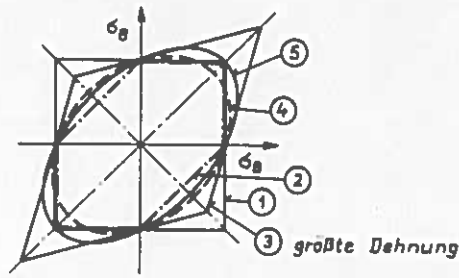


Bild 7.1  
Bruchgrenzlinien homogener,  
isotroper Werkstoffe  
[Dietmann]

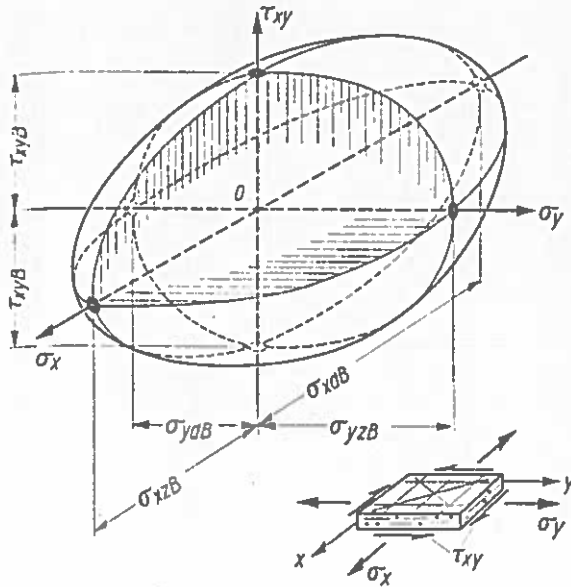


Bild 7.2  
Darstellung einer Bruch-Bedingung  
für einen orthotropen Werkstoff  
bei ebener Beanspruchung als Bruch-  
körper im  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  -Spannungs-  
Raum [Puck, 1969]

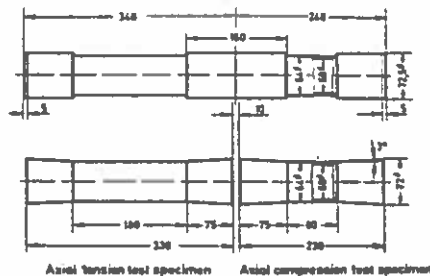


Bild 7.3  
Abmessungen eines zylindrischen  
Probekörpers für MSV und kombi-  
nierte Spannungszustände  
[Hütter u.a.]

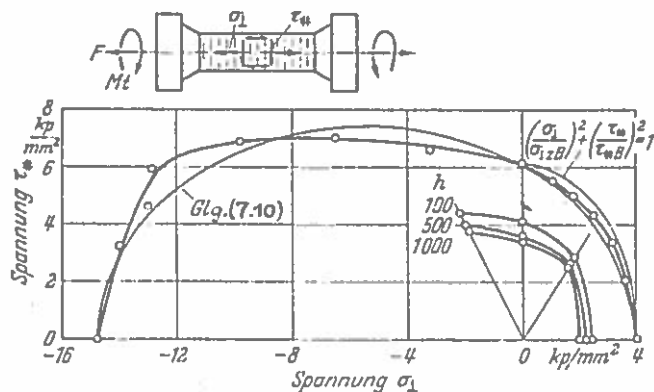


Bild 7.4  
Bruchkurve für UD-GFK  
Kurzzeit und Langzeitver-  
suche;  $\varphi = 0,65$ ; Harz:  
Araldit CY 232/HY 951,  
getempert bei  $50^\circ C$   
[Knappe/Schneider]

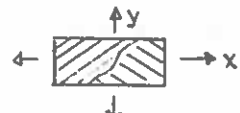
Tsai/Azzi:	$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11B}}\right)^2 - 1 \frac{\sigma_{11} \sigma_{12}}{\sigma_{11B} \sigma_{12B}} + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12B}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\#}}{\tau_{\#B}}\right)^2 = 1 \quad \text{mit } r = \frac{\sigma_{11B}}{\sigma_{12B}}$	
Norris	$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11B}}\right)^2 - 1 \frac{\sigma_{11} \sigma_{12}}{\sigma_{11B} \sigma_{12B}} + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12B}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\#}}{\tau_{\#B}}\right)^2 = 1 \quad \text{mit } \left \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11B}}\right  \leq 1, \left \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12B}}\right  \leq 1$	
Ishai	$\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12B}}\right)^2 + 3 \left(\frac{\tau_{\#}}{\tau_{\#B}}\right)^2 = 1$ Fließfähige Faserverbunde	$\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12B}(\alpha)}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\#}}{\tau_{\#B}(\alpha)}\right)^2 = 1$ Spröde Faserverbunde
Puck	$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11HB}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12B}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\#}}{\tau_{\#B}}\right)^2 = 1$ mit $\sigma_{11HB} \approx E_{11} E_{HB}$ und $E_{HB}$ ist Harzbruchdehnung unter einachsigen Zug oder Druck ZFB (kohäsiv); $\sigma_{11} \geq 0, \sigma_{12} \geq 0$	
	$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11B}}\right)^2 = 1$ Laut Puck für Hohlglasfasern u. stark anisotrope Fasern zu korrigieren. FB (kohäsiv); $\sigma_{11} \geq 0$	
Knappe/Schneider	$\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12B}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\#}}{\tau_{\#B}}\right)^2 = 1$ Zug-Torsions-Bereich ZFB (adhäsiv); $\sigma_{12} > 0$ , Langzeitkriterium	
DKI	$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11B}}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{11}}{\sigma_{11HB}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12B}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\#}}{\tau_{\#B}}\right)^2 = 1$ ZFB (adhäsiv); $\sigma_{12} > 0, \sigma_{11} \neq 0$	
Puppo/Evensen	$f = \left(3 \frac{\tau_{xyB} \tau_{xyB}}{\sigma_{xB} \sigma_{yB}}\right)^n ; f = \frac{1}{10} \left[-\left(\frac{3}{f} + 4\right) + \sqrt{\left(\frac{3}{f} + 4\right)^2 + \frac{240}{f}}\right]$ $g = \sqrt{\frac{f}{12}} \left(\frac{3f}{f-4} + 1\right) f ; h = 1 - \frac{f}{2}$ 	
	$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{xB}}\right)^2 - f \left(\frac{\sigma_{xB} \sigma_x \sigma_y}{\sigma_{yB} \sigma_{xB} \sigma_{yB}}\right) + f \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{yB}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_{xyB}}\right)^2 = 1 \quad f \leq 1$	
	$f \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{xB}}\right)^2 - f \left(\frac{\sigma_{yB} \sigma_x \sigma_y}{\sigma_{xB} \sigma_{yB} \sigma_{yB}}\right) + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{yB}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_{xyB}}\right)^2 = 1$	
$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{xB}}\right)^2 - 2h \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{xB} \sigma_{yB}} \pm 2g \frac{\tau_{xy}}{\tau_{xyB}} \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{xB}} + \frac{\sigma_y}{\sigma_{yB}}\right) + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{yB}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_{xyB}}\right)^2 = 1 ; f > 1$		

Tabelle 7.2 Bruchhypothesen von eben belasteten Faserverbundwerkstoffen

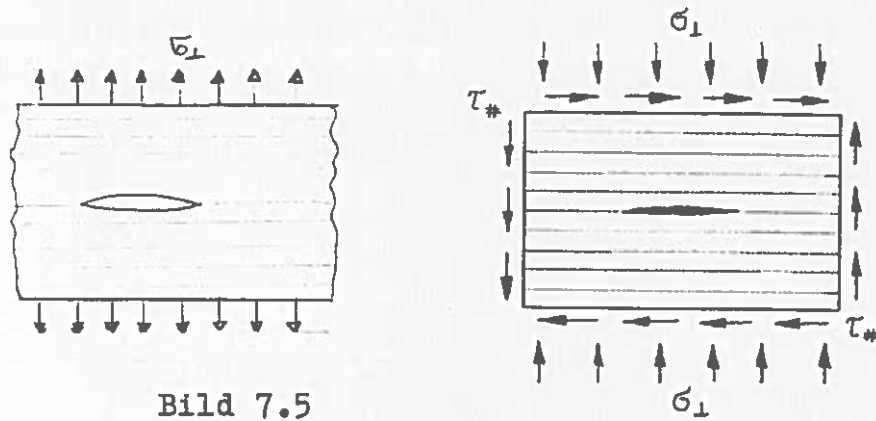
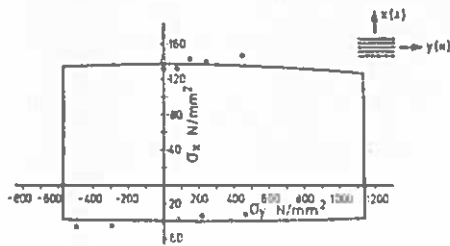
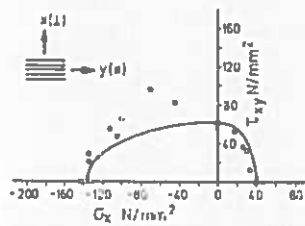


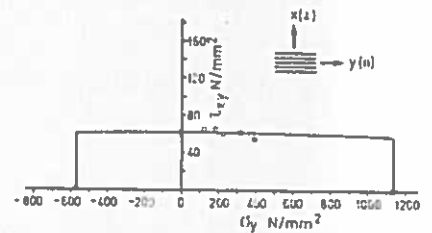
Bild 7.5  
Belastungsabhängiges Rißöffnungsverhalten



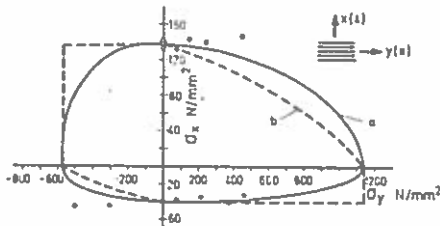
Ultimate stresses  $\sigma_{yf}, \sigma_{xf}$  for a unidirectional laminate under multiaxial load. Failure boundary computed according to the hypothesis of Puck



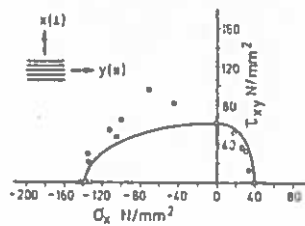
Ultimate stresses  $\sigma_{xf}, \tau_{xyf}$  for a unidirectional laminate under multiaxial load. Failure boundary computed according to the hypothesis of Puck



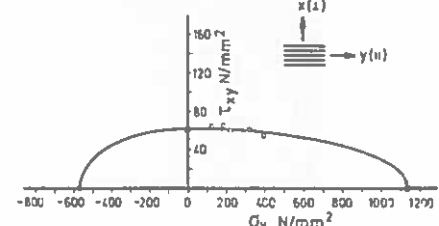
Ultimate stresses  $\sigma_{yf}, \tau_{xyf}$  for a unidirectional laminate under multiaxial load. Failure boundary computed according to the hypothesis of Puck



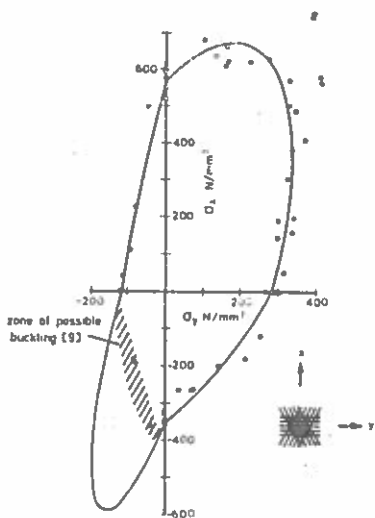
Ultimate stresses  $\sigma_{yf}, \sigma_{xf}$  for a unidirectional laminate under multiaxial load. Failure boundary computed according to the hypothesis of Tsai (a) and Norris (b)



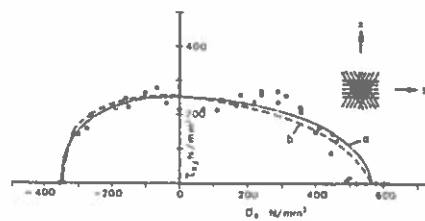
Ultimate stresses  $\sigma_{xf}, \tau_{xyf}$  for a unidirectional laminate under multiaxial load. Failure boundary computed according to the hypothesis of Tsai and Norris



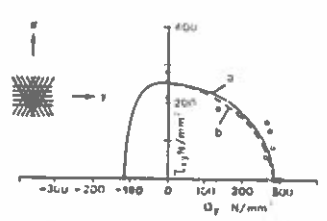
Ultimate stresses  $\sigma_{yf}, \tau_{xyf}$  for a unidirectional laminate under multiaxial load. Failure boundary computed according to the hypothesis of Tsai and Norris



Ultimate stresses  $\sigma_{xf}, \sigma_{yf}$  under biaxial load for a multilayer laminate  $90^\circ/30^\circ/30^\circ/90^\circ$ . Failure boundary computed according to the hypothesis of Puppo/Evensen



Ultimate stresses  $\sigma_{xf}, \tau_{xyf}$  under biaxial load for a multilayer laminate  $90^\circ/30^\circ/30^\circ/90^\circ$ . Failure boundary computed according to the hypothesis of Puppo/Evensen  
(a) Interaction Factor  $\gamma$  computed with  $\sigma_{yf}$   
(b) Interaction Factor  $\gamma$  computed with  $\sigma_{xf}$



Ultimate stresses  $\sigma_{yf}, \tau_{xyf}$  under biaxial load for a multilayer laminate  $90^\circ/30^\circ/30^\circ/90^\circ$ . Failure boundary computed according to the hypothesis of Puppo/Evensen  
(a) Interaction Factor  $\gamma$  computed with  $\sigma_{yf}$   
(b) Interaction Factor  $\gamma$  computed with  $\sigma_{xf}$

Bild 7.6  
Vergleich verschiedener Spannungskriterien  
(Auszug aus [Hütter u.a.] )

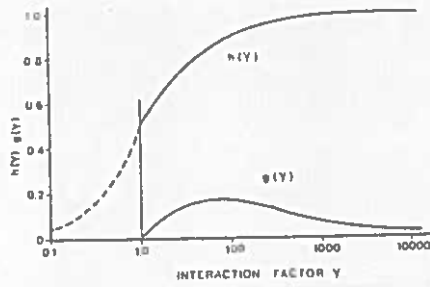


Bild 7.7

Verlauf von  $h(\gamma)$  und  $g(\gamma)$   
[Puppo/Evensen]

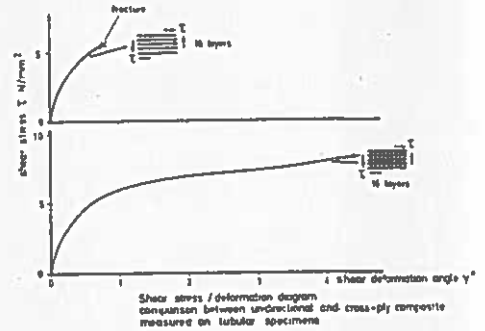
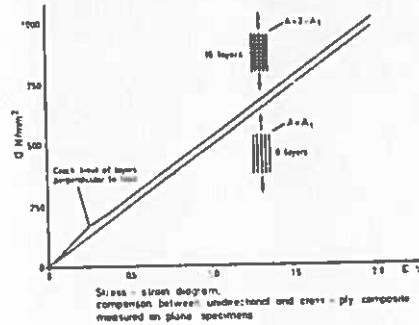


Bild 7.8 Vergleich gemessener Spannung-Dehnungsdiagramme für UDV und KV. GFK. (aus [Hütter u.a.])

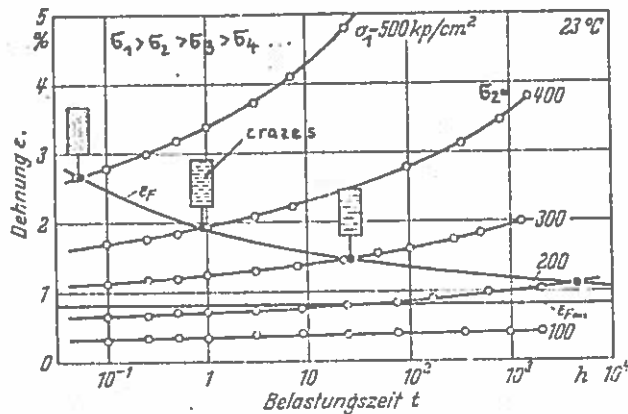


Bild 7.9

Bildung von Fließzonen in amorphem, ungefüllten Kunststoffen als Funktion von Dehnung, Spannung und Zeit beim Zug-Kriechversuch (nach Riess u. Schmidt)

Partikelform	Verformungsrichtung	Krit. Verformung	Benennung
	beliebig	$\epsilon_{F_{crit}} = \frac{c}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{\gamma}{E^0}}$	$c = \text{Konstante}$ $L = \text{Länge der Phasengrenzen}$ $\gamma = \text{Oberflächenspannung}$ $E^0 = \text{Modul}$
		$\epsilon_{F_{crit}} = \frac{c}{\sqrt{L(1-\mu\rho)}} \sqrt{\frac{\gamma}{E^0}}$	$\mu = \text{Überkontraktionszahl}$ $\rho = \text{Orientierungsgrad}$ mit $\mu = \frac{L_{100} - L}{L}$ $\rho = \frac{L_{100} - L}{L}$
		$\epsilon_{F_{crit}} = \frac{c}{\sqrt{L(1-\rho)}} \sqrt{\frac{\gamma}{E^0}}$	$L_{100} = \text{Länge der Phasengrenzen senkrecht zur Orientierung}$ $L_{100} = \text{Länge der Phasengrenzen in Orientierungsrichtung}$

Tabelle 7.3

Änderung der kritischen Verformung mit dem Orientierungsgrad [Menges/Rieß]

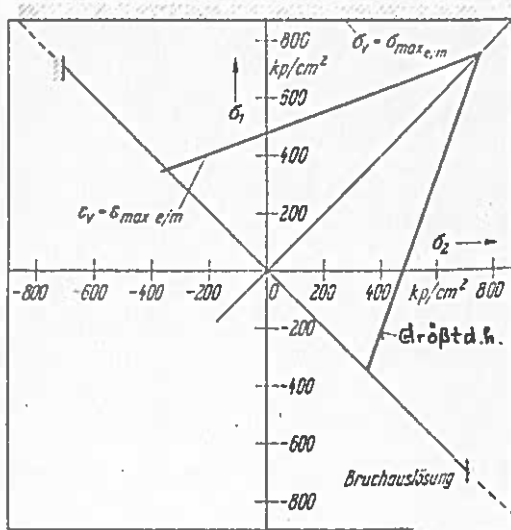


Bild 7.10

Grenzl意思en der ertragbaren Spannungen nach der Normalspannungshypothese (Bruchversagen) und nach der Größtdehnungshypothese (Mikrorißbildung) für den ebenen Spannungszustand; Verformungsgeschwindigkeit: 1%/min; Glasgehalt  $\psi = 0,22$ ;  $\bar{\sigma}_d = 1650 \text{ kp/cm}^2$

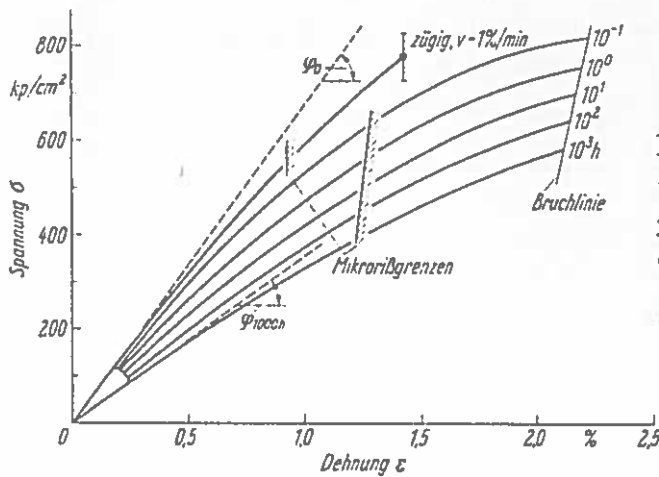


Bild 7.11

Isochrone Spannungs/Dehnungs-Linien für Zugbeanspruchung mit visuell ermittelten Mikrorißgrenzen; GFK,  $\psi = 16 \text{ Gew.-%}$ ,  $E_0 = \tan \varphi_0$

[ Menges/Roskothen/Empt ]  
Mattenlaminat

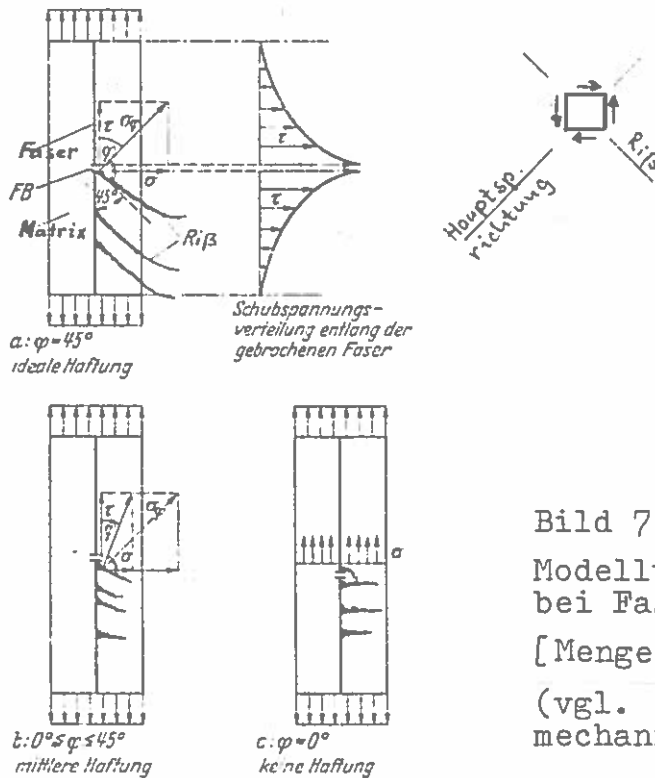


Bild 7.12

Modellvorstellung der Rißbildung bei Faserbruch

[ Menges/Brintrup ]

(vgl. [Radaj], Bild 10-31, Gleitmechanismen)

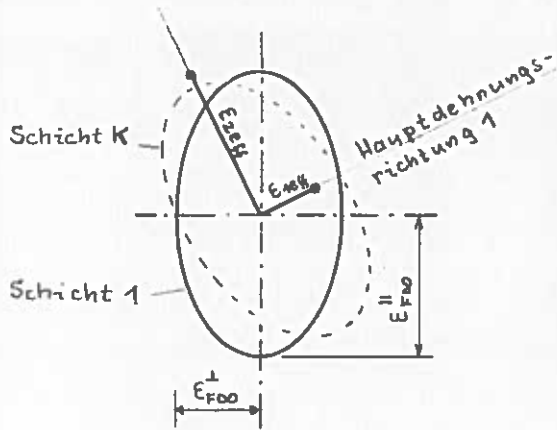


Bild 7.13

Polardiagramm der Dehnungen  
[Menges]

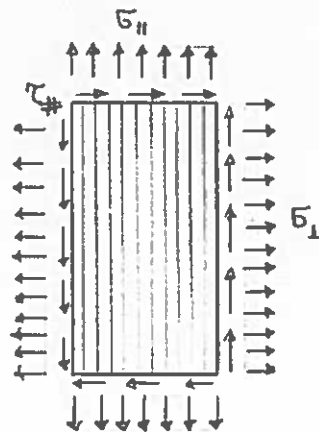


Bild 7.14

Allgemeine Beanspruchung der unidirektionalen Schicht

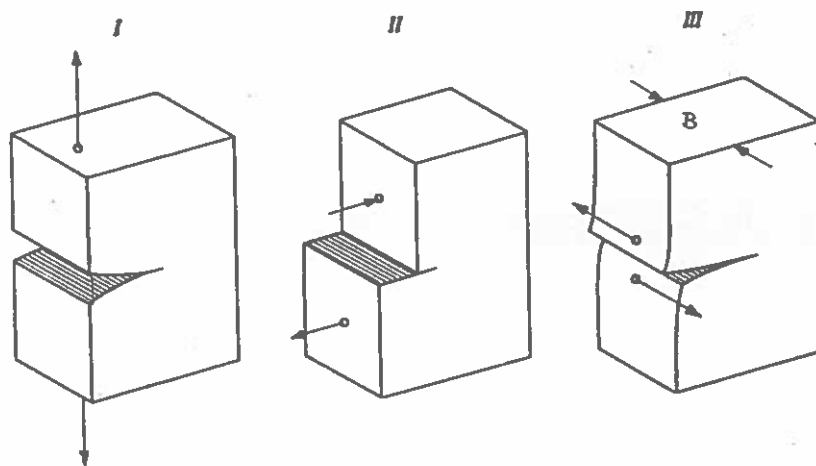


Bild 7.15

Rißöffnungsarten bzw. Rißfälle

Rißfall I : Längszug (opening mode)

Rißfall II : Längsscherung (forward shear mode)

Rißfall III: Querschermung (in plane shear mode)



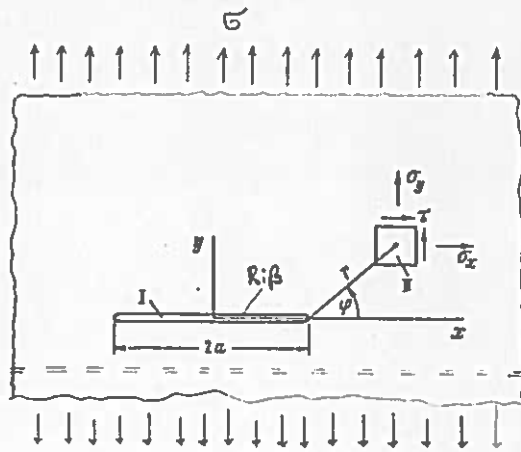


Bild 7.16

Polarkoordinaten sowie Spannungskomponenten an der Rißspitze eines Griffithrisses im einachsigen Zugfeld der unendlich ausgedehnten Scheibe  
 GRIFFITHSCHES RISSMODELL

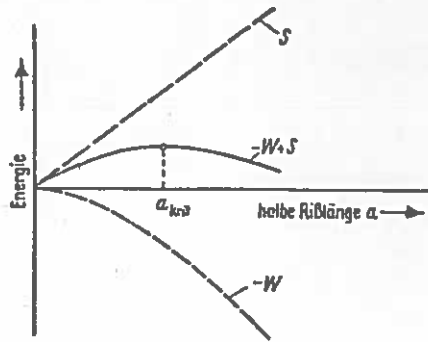


Bild 7.17

Instabile Rißvergrößerung bei einem Höchstwert der Gesamtenergie. [Hahn]

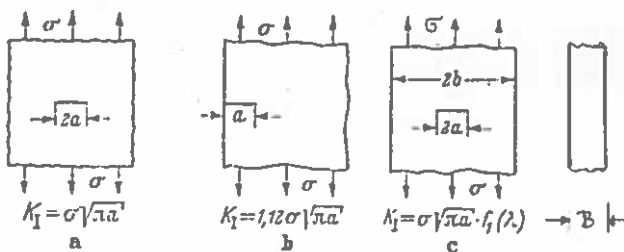


Bild 7.18

Einfluß der Rißanordnung auf die Spannungsintensität ( $a/c = 0$ )

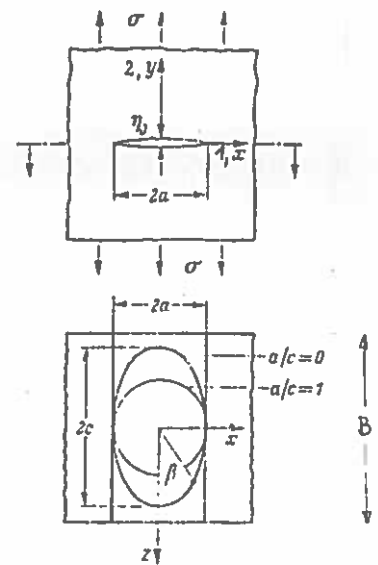


Bild 7.19

Allgemeine Rißform [Berns]

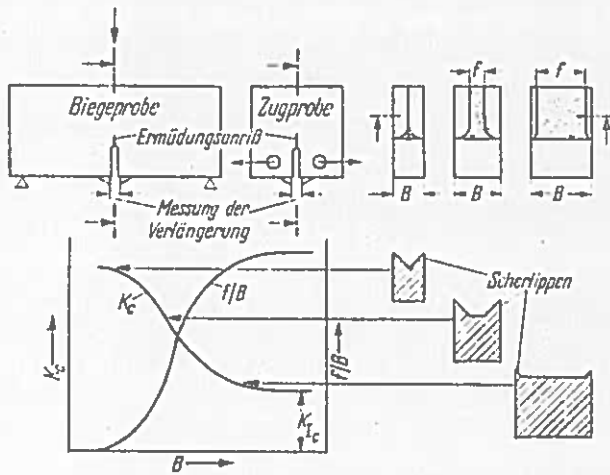


Bild 7.20

Einfluß der Probendicke B auf Bruchausbildung und kritische Spannungsintensität [Berns]

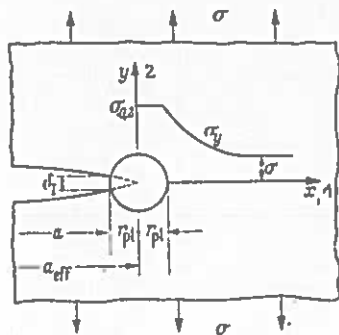


Bild 7.23

Kleine plastische Zone an der Rissspitze [Berns]  
Dugdaxsches Rißmodell

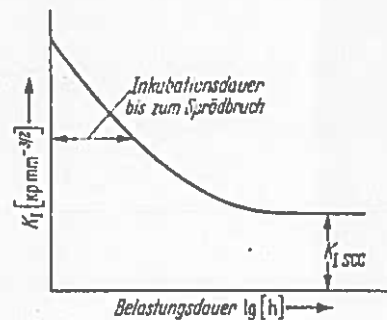


Bild 7.21

Bruchursachen bei einmaliger Belastung unter Zeiteinfluß [Berns]

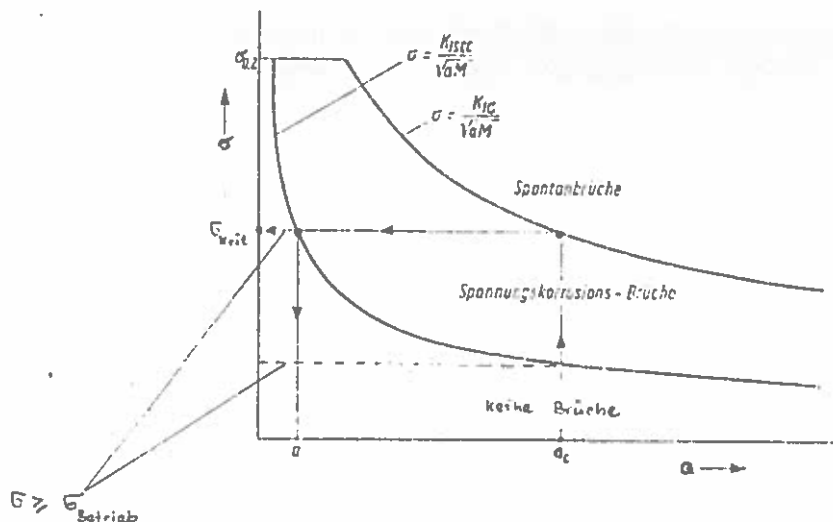


Bild 7.22

Schematische Darstellung des Zusammenhanges zwischen Beanspruchung und kritischer Rißtiefe (einmalige Belastung) [Heckel]

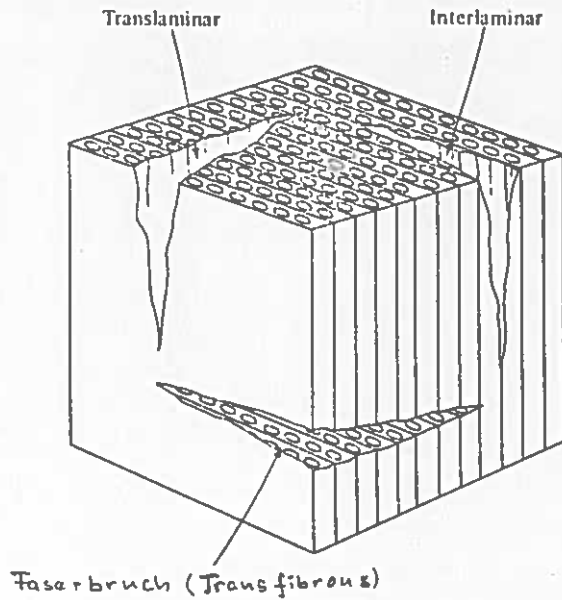


Bild 7.24

Faserverbund-Rißdefinitionen [Langley]

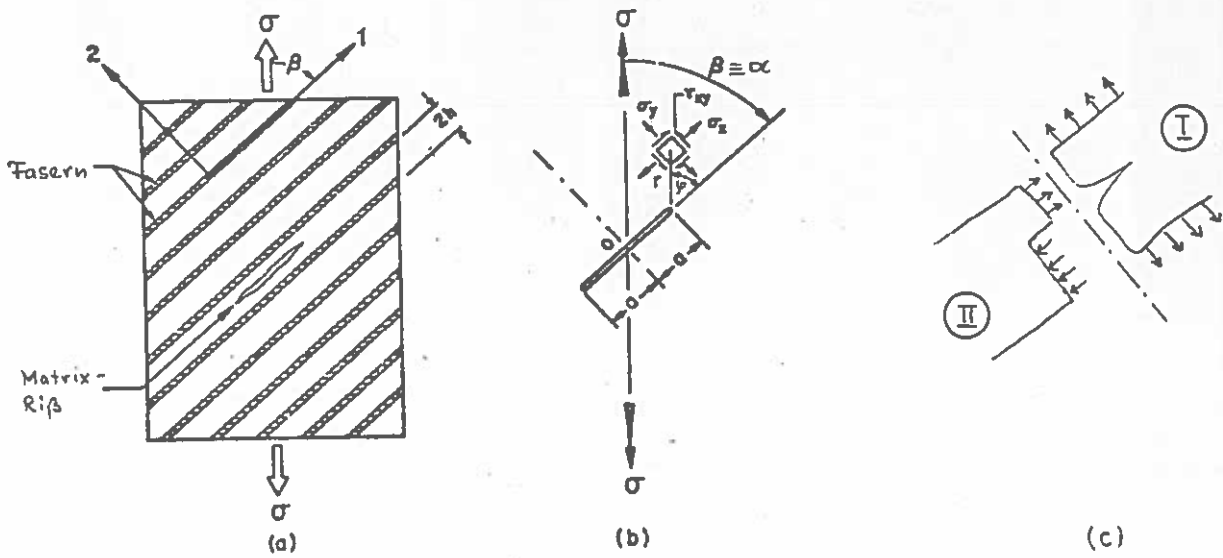


Bild 7.25 UDV unter Zug [Sih/Chen]

(a) Riß parallel zur Faser, (b) idealisierter Riß, (c) Spannungen am Riß und zugehörige Rißformen

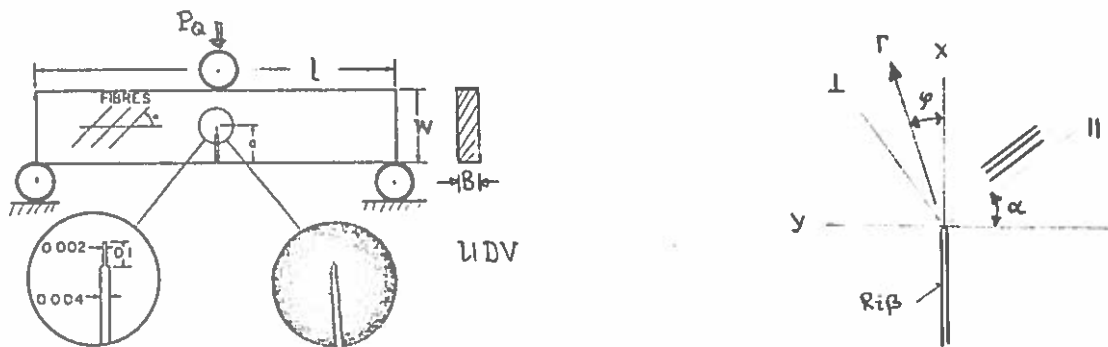


Bild 7.26

Dreipunktbiegeprobe  
 $a$ =Rißlänge,  $b=0,5$  in

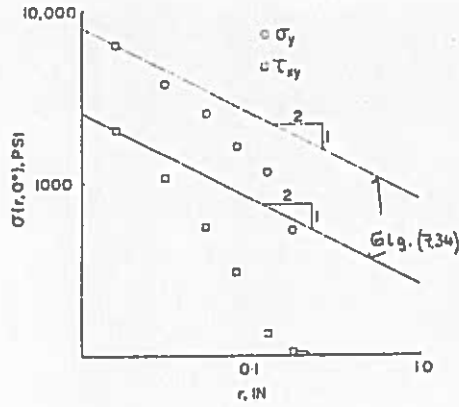


Bild 7.27

Ergebnisse der Finite-Element-Rechnung zur Ermittlung von Glg. (7.34) [Konish/Swedlow/Cruse]  
Werkstoff: CFK

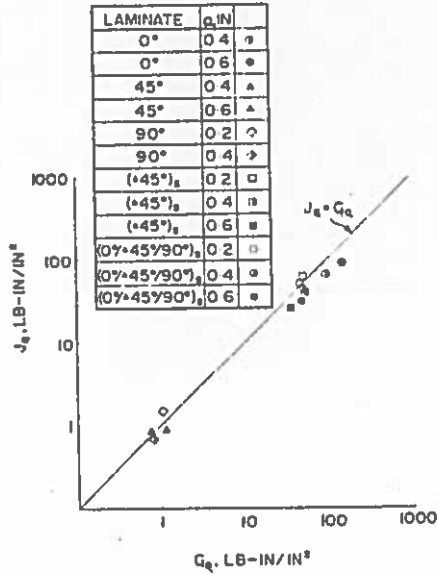


Bild 7.28

Darstellung von  $J_0$  als Funktion von  $G_0$  [Konish/Swedlow/Cruse]  
Werkstoff: CFK

1 in = 2,54 cm  
1 psi =  $7,0 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm}^2$   
1 ksi =  $10^3 \text{ psi}$   
1 lb = 4,5 N

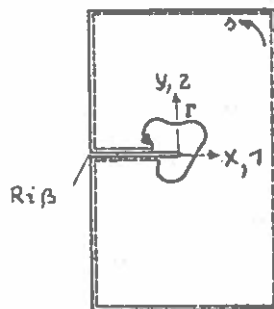


Bild 7.29

Integrationspfad beim Riceschen Integral I

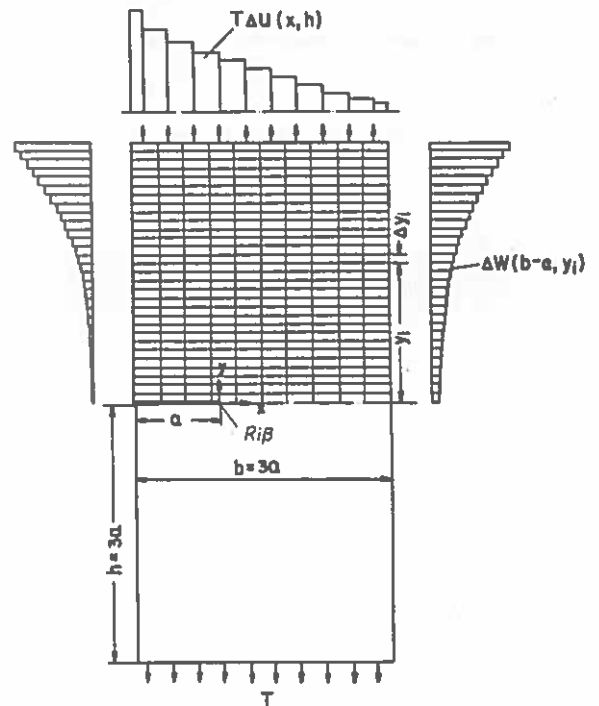
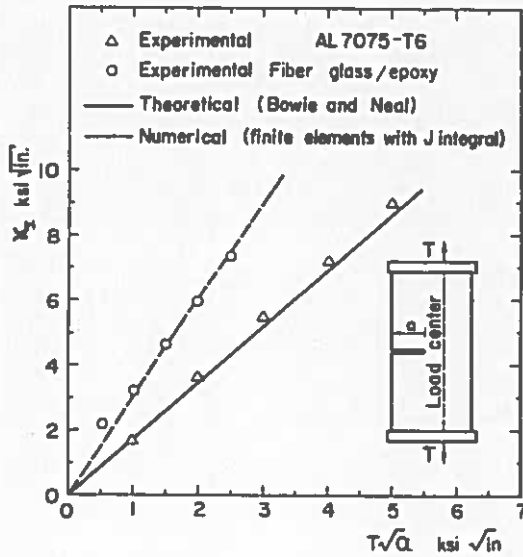


Bild 7.30

Energieverteilung (schematisch) entlang dem Integrationspfad bei konstanter Zugspannungsverteilung. Es wird hier nur eine geringfügige plastische Zone an der Rißspitze vorausgesetzt. Orthotropes GFK. [Tirosh/Berg]  
Das rechteckige Netz stellt die finiten Elemente für die numerische Berechnung dar.



$E_2$  (along the fibers) =  $4.75 \times 10^6$  psi  
 $E_1$  (transverse the fibers) =  $1.38 \times 10^6$  psi  
 $G_{12}$  =  $0.375 \times 10^6$  psi  
 $\nu_{21}$  = 0.32

UD - GFK - Epoxidharz

Bild 7.31

Experimentelle und numerische Ergebnisse für zwei anisotrope Materialien (Uniform grip displacement test)

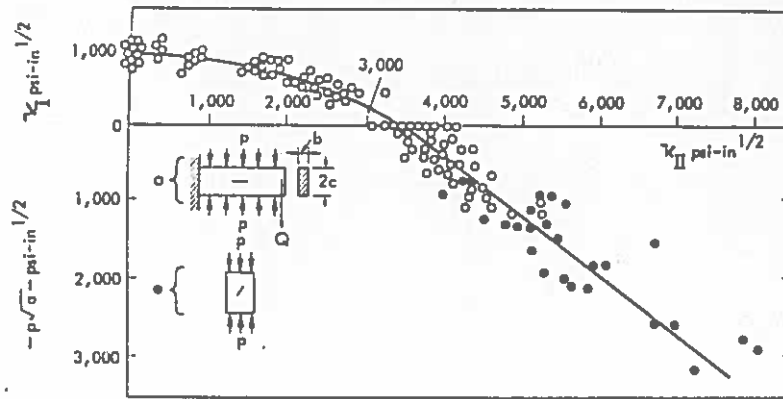


Bild 7.32

Interaktionskurve für Spannungs-Intensitätsfaktoren für parallelfaseriges Scotchply [Gorten]

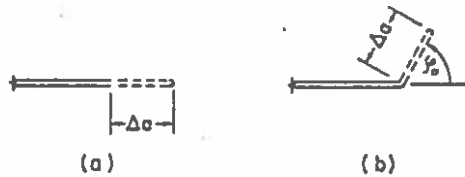


Bild 7.33

Rißfortschritt [Sih/Chen]  
 (a) gerade (collinear)  
 (b) abbiegend (non-collinear)

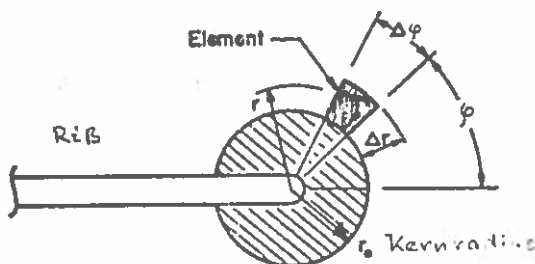


Bild 7.34

Element vor der Rißspitze außerhalb des Kernbereiches [Sih/Chen]

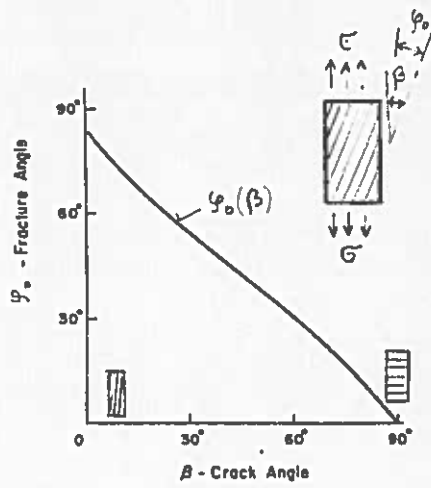


Bild 7.36

Bruchwinkel als Funktion des Rißwinkels [Sih/Chen]

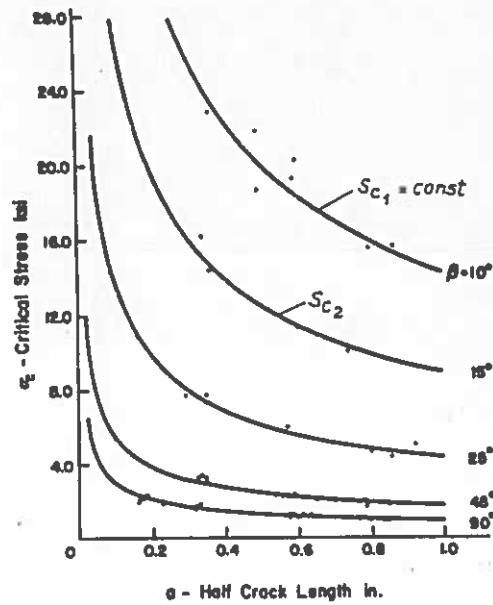
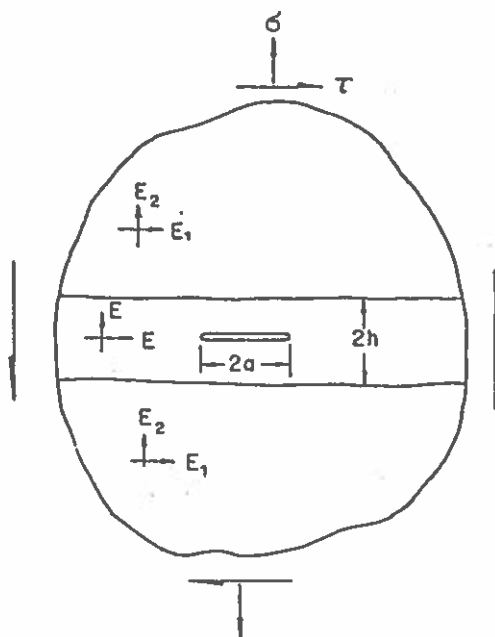


Bild 7.37

Variationen der kritischen Spannung als Funktion der halben Rißlänge [Sih/Chen]



$$\frac{2h}{d_f} = \sqrt{\frac{\pi}{\varphi}} - 2$$

Bild 7.35

Matrix-Crack-Propagation-Modell [Sih/Chen u. a.]

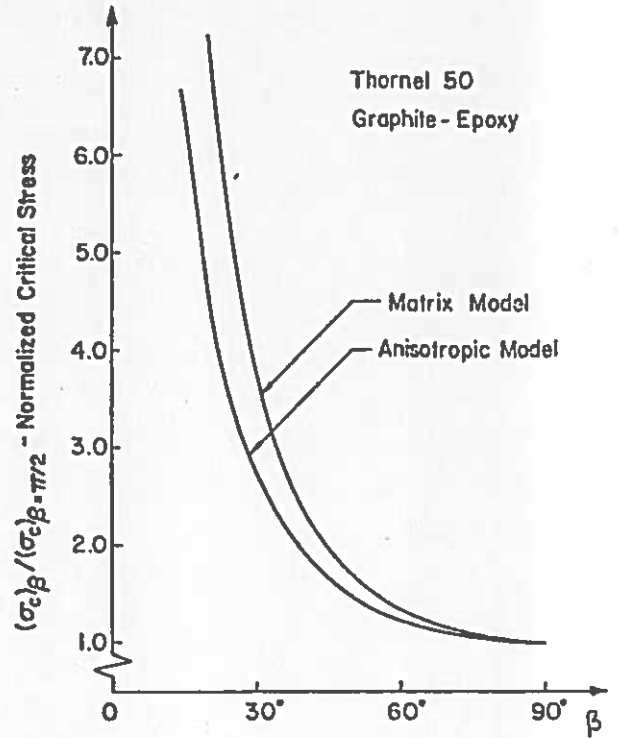
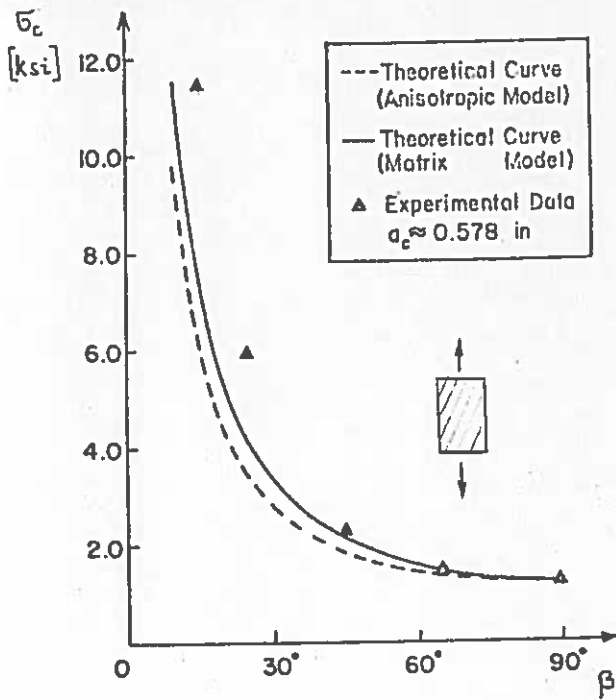


Bild 7.38

Kritische Spannung  $\sigma_c$  in Abhängigkeit vom Rißwinkel  $\beta$  ( $\equiv \alpha$ ) für Scotchply 1002 [Sih/Chen u. a.]

Bild 7.39

Normierte Spannung  $\sigma_c^{(R)} / \sigma_c(\beta = \pi/2)$  in Abhängigkeit vom Rißwinkel  $\beta$  für Thornel 50-Epoxidharz [Sih/Chen u. a.]

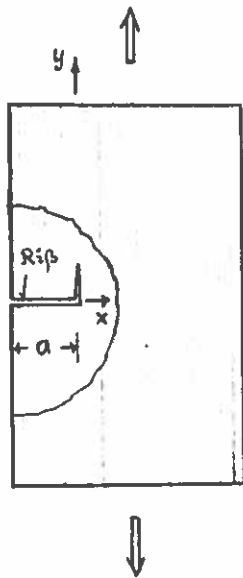


Bild 7.40

Aufspaltung eines Risses (UDV)

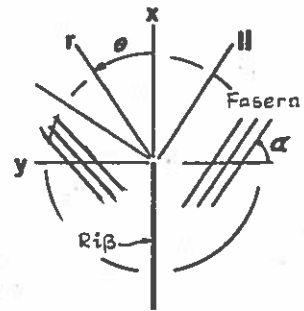


Bild 7.41

Rißspitzengeometrie in einem AWW-Laminat [Konish/Cruise/Swedlow]

fiber orientation angle, $\alpha$	$a = 0.2$ in	$a = 0.4$ in	$a = 0.6$ in	$K_Q$ lb/in <sup>2</sup> √in × 10 <sup>-4</sup>	$\bar{K}_Q$ lb/in <sup>2</sup> √in × 10 <sup>-3</sup>	$G_Q$ in lb/in <sup>2</sup>
0°	—	28.8	36.3	32.6	+11% -11%	117.
90°	1.66	1.46	—	1.56	+ 6.3% - 6.3%	0.943
45°	0.690 <sup>3</sup>	2.22	2.39	2.30	+ 3.9% - 3.8%	—
(±45°) <sub>s</sub>	18.5	18.5	16.3	17.7	+ 4.8% - 9.4%	45.0
(0°/±45°/90°) <sub>s</sub>	23.5	21.7	20.5	21.9	+ 7.3% - 8.6%	55.1

Notes:

1. Specimen was crushed before crack propagation occurred.
2. Instrumentation failure.
3. This value omitted when calculating  $K_Q$ .
4. No  $G_Q$  available because the crack propagated in a mixed mode, which could not be directly uncoupled.

$E_{11}$ lb/in. <sup>2</sup>	21 × 10 <sup>6</sup>
$E_{22}$ lb/in. <sup>2</sup>	1.7 × 10 <sup>6</sup>
$G_{12}$ lb/in. <sup>2</sup>	0.65 × 10 <sup>6</sup>
$\nu_{12}$	0.21
$\sigma_{1B}$ lb/in. <sup>2</sup>	151 × 10 <sup>3</sup>
$\sigma_{2B}$ lb/in. <sup>2</sup>	7.70 × 10 <sup>3</sup>

Tabelle 7.4

Versuchswert CFK [Konish/Swedlow/ Cruse, 1972] (s ≐ symmetrischer Aufbau)

$$1 \frac{lb}{in^{3/2}} = 3,5 \cdot 10^{-2} N/mm^{3/2}$$

$$1 \frac{lb}{in.^2} = 7,0 \cdot 10^{-3} N/mm^2$$

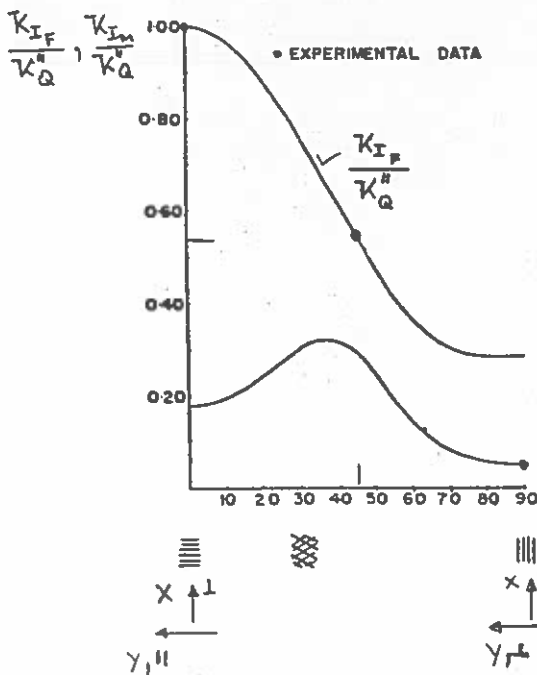


Bild 7.42

Vergleich halbempirisch ermittelter Bruchzähigkeiten eines CFK-AWV mit rein aus Versuchen ermittelten (Riß in x-Richtung) [Konish/Swedlow/ Cruse]

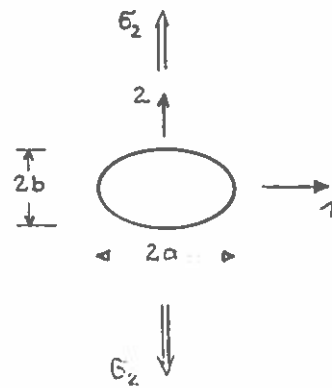
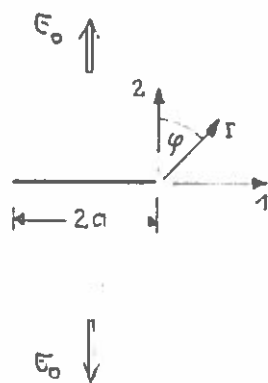


Bild 7.43

Ideale Rißgeometrie und elliptisches Rißmodell [Cruse, 1973]



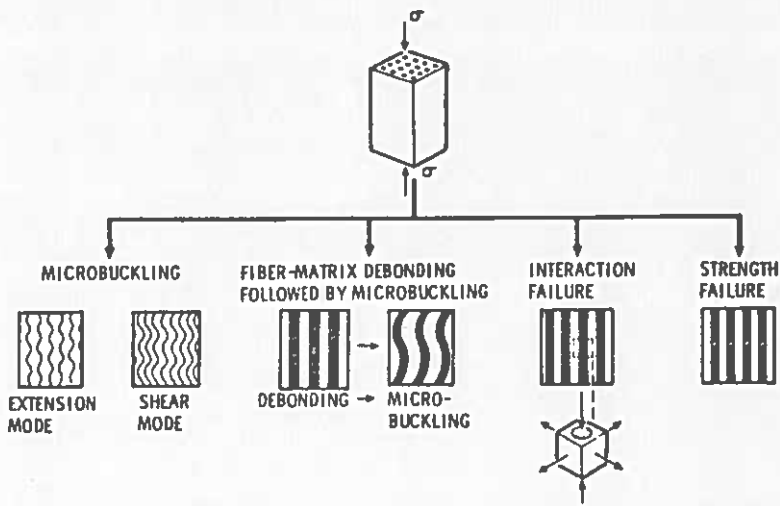


Bild 7.44

Bruchformen für UDV unter Drucklast [Greszczuk]

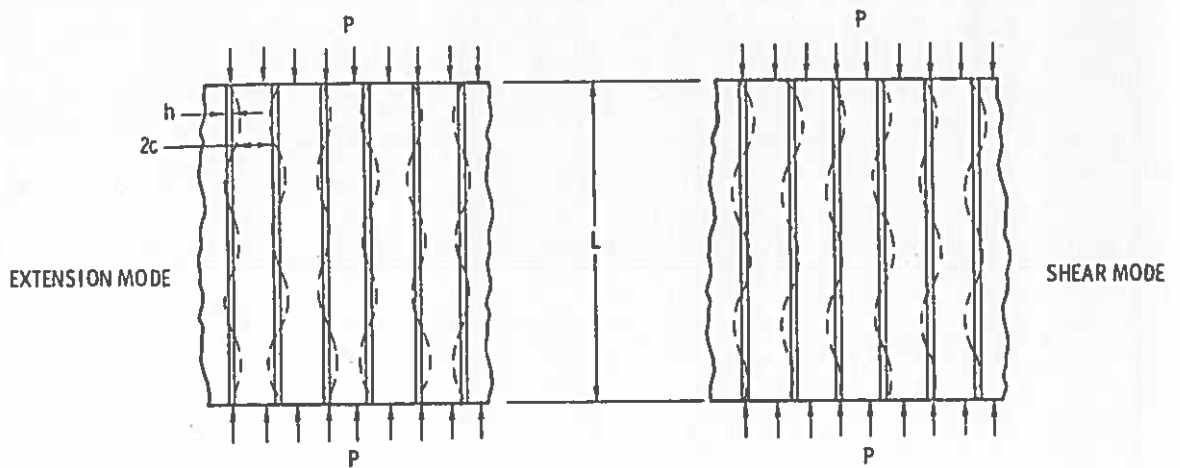


Bild 7.45

Mögliche Knick- bzw. Beulformen für UDV (zweidimensional) [Greszczuk, STP 546]

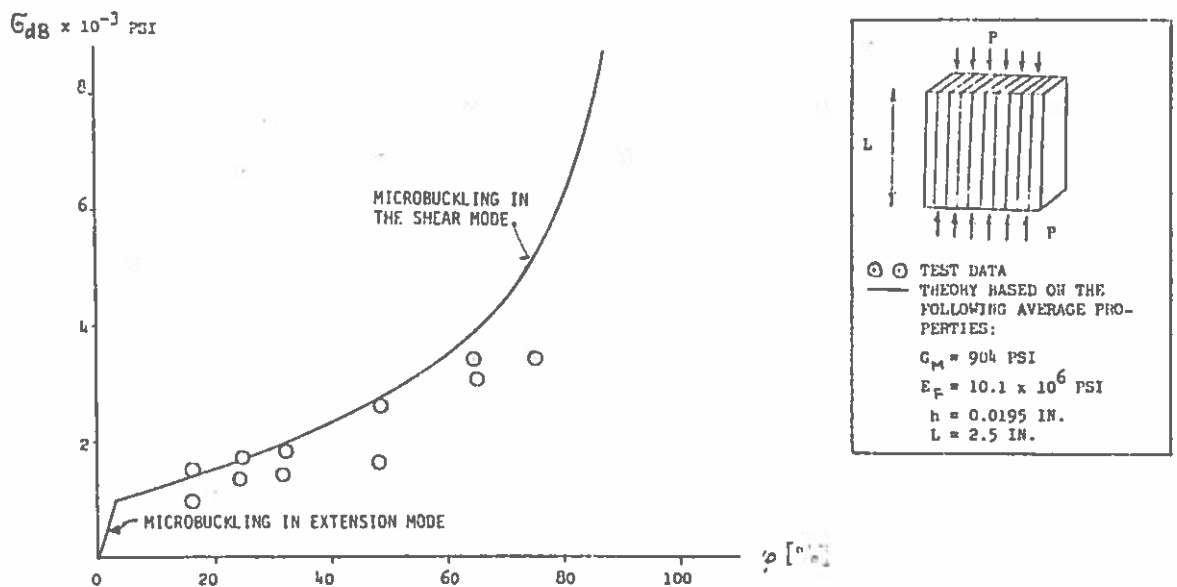


Bild 7.46

Vergleich von Versuchs- und Rechenergebnissen der Mikrobeulfestigkeit von schichtverstärkten Verbunden [Greszczuk, STP 546]

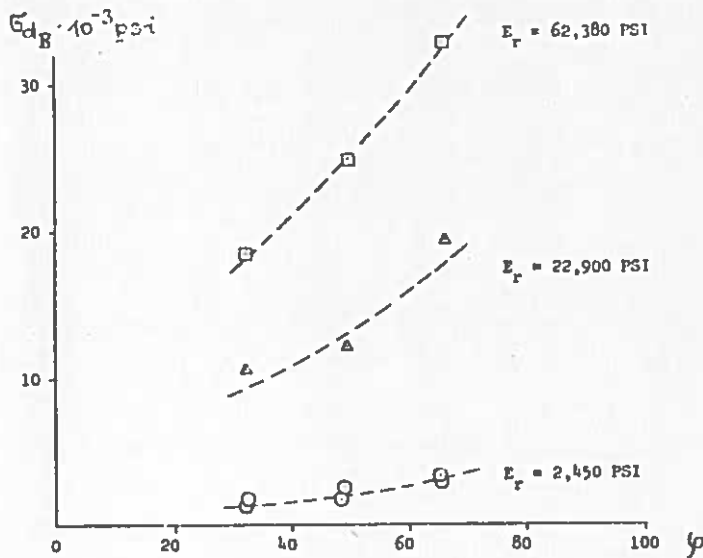
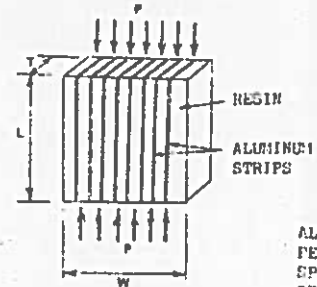


Bild 7.47

Einfluß der Matrixeigenschaften auf die Mikro-  
beulfestigkeit von  
schichtverstärkten  
Verbunden  
[Greszczuk, STP 546]



ALL COMPRESSION TESTS  
PERFORMED ON COMPOSITE  
SPECIMENS WITH FOLLOWING  
GEOMETRY

- $L = 2.5 \text{ IN.}$
- $T = 1.0 \text{ IN.}$
- $w = 2.0 \text{ IN.}$
- $h = 0.0195 \text{ IN.}$   
(LAMINAE THICKNESS)

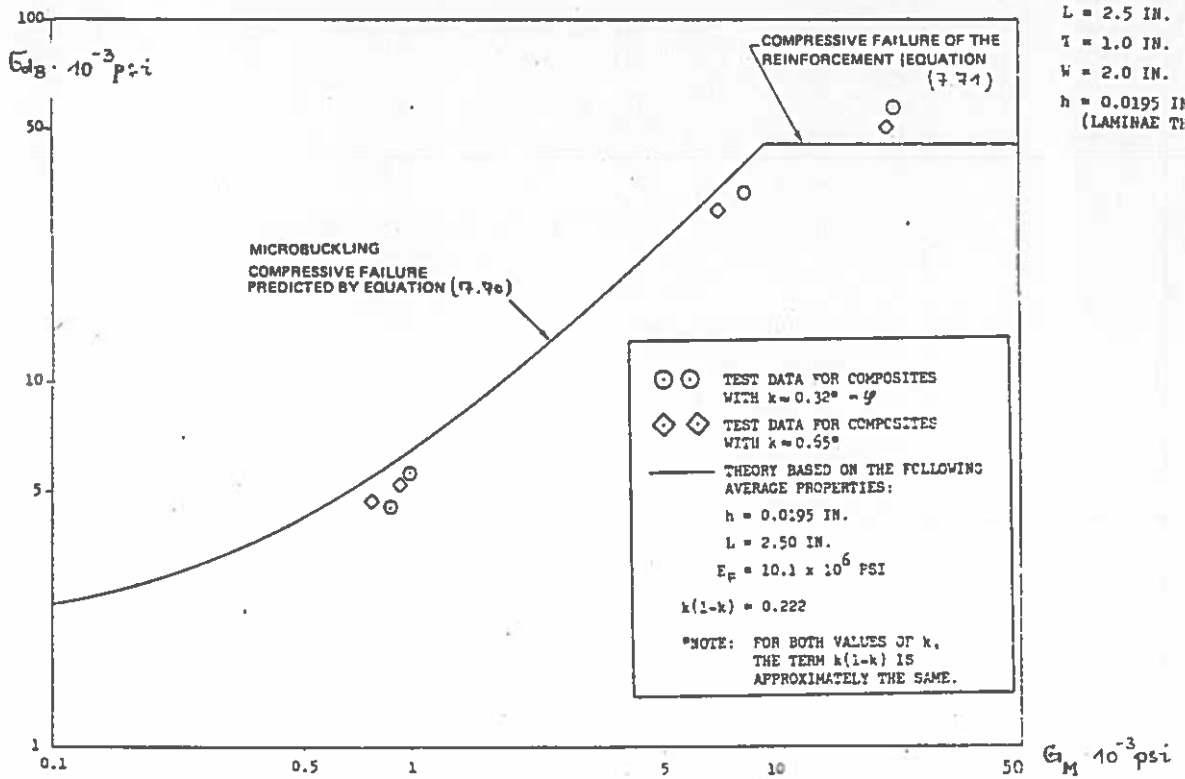


Bild 7.48 Vergleich von Theorie und Versuch bei der Druckfestigkeit von schichtverstärkten Verbunden in Abhängigkeit des Schubmoduls des Harzes [Greszczuk, STP 546]

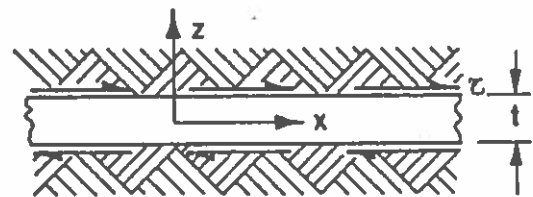
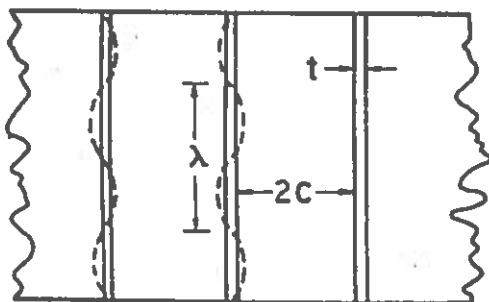


Bild 7.49 Bezeichnungen bei der Schubknickung [Lovell]

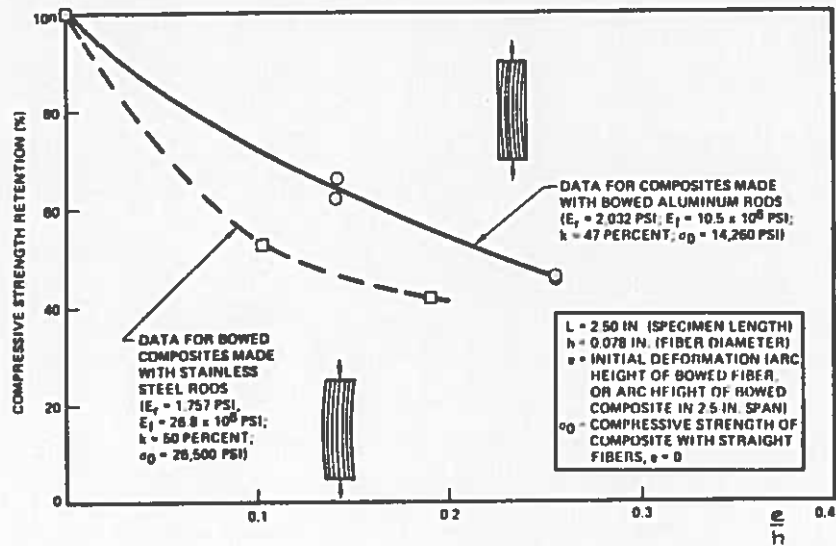


Bild 7.50 Auswirkung schlecht ausgerichteter Fasern auf die Mikrobuulfestigkeit [Greszczuk, STP 521]

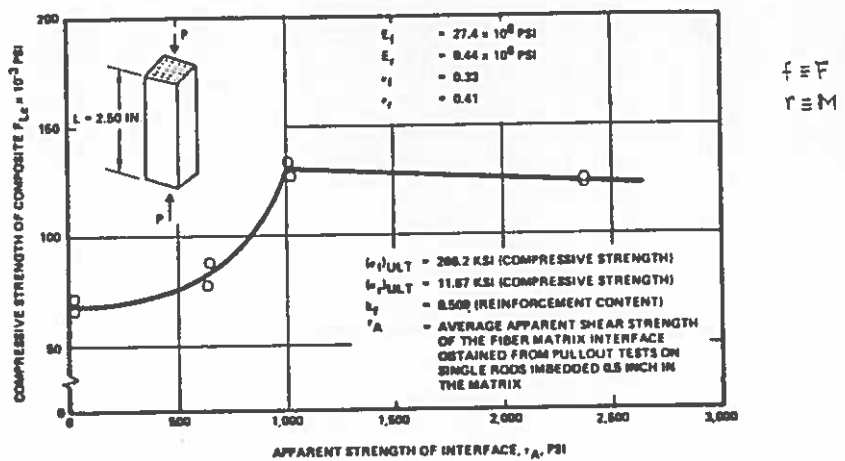


Bild 7.51 Einfluß der Faser - Matrix - Haftung auf die Druckfestigkeit [Greszczuk]

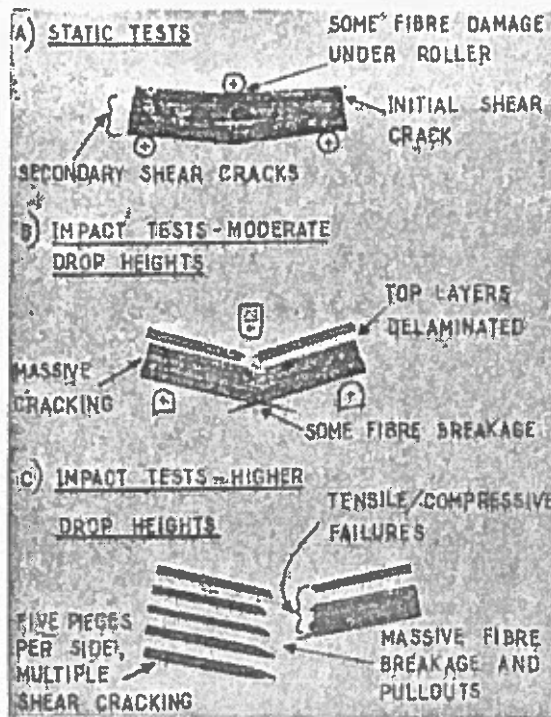


Bild 7.52 Bruchbilder bei der Delamination eines unidirektionalen Balkens  
 [Sayers/Harris, J.o.Composite Mat. 1973]



Einfacher Schubbruch



Mehrfache Schubbrüche bei der Delamination



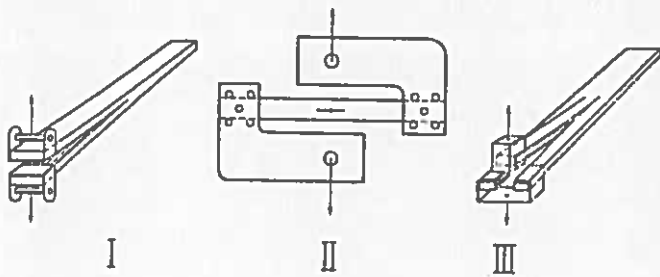


Bild 7.53

Vorrichtungen zur Bestimmung der G-Werte der drei Rißfälle [Sidey/Bradshaw]

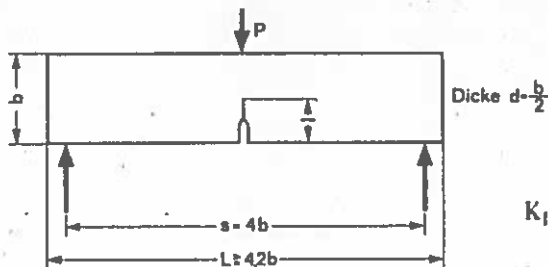
	Carbon raw		Carbon treated		'E' glass	
	Initial	Final	Initial	Final	Initial	Final
	kJ/m <sup>2</sup>		kJ/m <sup>2</sup>		kJ/m <sup>2</sup>	
G <sub>I</sub>	0.04	0.7	0.1	0.9	0.06	2.0
G <sub>II</sub>	0.2	1.5	0.5	2.3	1.0	3.0
G <sub>III</sub>	0.1	3.6	0.2	2.1	0.2	7.0

Tafel 7.5

Vergleich der Rißfreisetzungsenergien für Bruch parallel zu den Fasern. Izod-Schlagversuch. [Sidey/Bradshaw]

(Epikote BZB/MNA/BDMA)

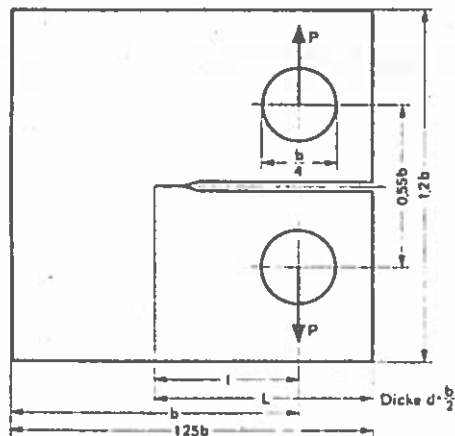
Bilder 7.54 Probenformen, die von verschiedenen Verfassern bei der Ermittlung bruchmechanischer Kennwerte benutzt wurden (s. [ASTM Designation, E 399-72, 1970], [Radač], [Heckel])



(a)

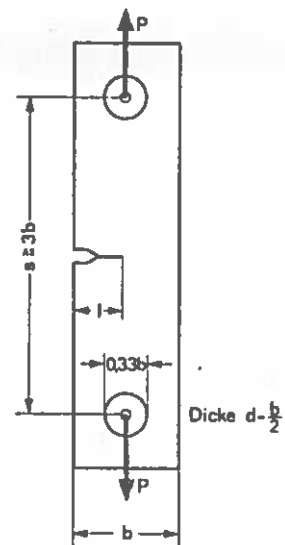
$$K_I = \frac{P\sqrt{a}}{b \cdot d} \left\{ 11,6 - 18,4 \left(\frac{a}{b}\right) + 87,2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 151 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 155 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \right\}$$

$$\frac{a}{b} \leq 0,6$$



(b)

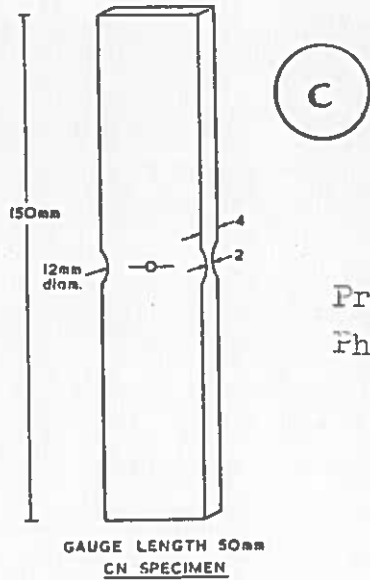
$$K_I = \frac{P\sqrt{a}}{b \cdot d} \left\{ 29,6 - 185,5 \left(\frac{a}{b}\right) + 655,7 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1017 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 638,9 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \right\}$$



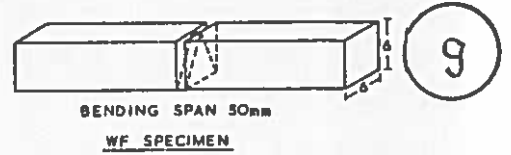
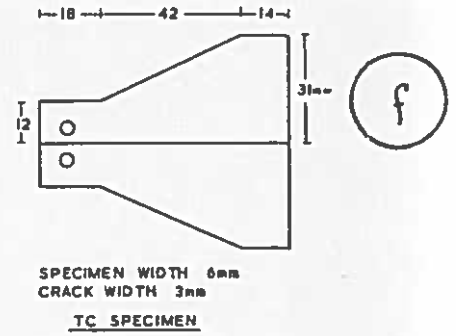
(d)

$$K_I = \frac{P\sqrt{a}}{b \cdot d} \left\{ 1,99 - 0,41 \left(\frac{a}{b}\right) + 18,7 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 38,48 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 53,85 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \right\}$$

$$\frac{a}{b} \leq 0,6$$

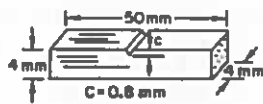


Proben von  
Phillips



$$K_I = \frac{P\sqrt{a}}{b \cdot d} \left\{ 1,77 + 0,227 \left( \frac{2a}{b} \right) - 0,510 \left( \frac{2a}{b} \right)^2 + 2,7 \left( \frac{2a}{b} \right)^3 \right\}$$

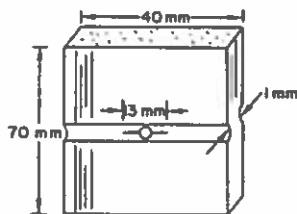
$$\frac{2a}{b} \leq 0,7$$



CHARPY  
SPECIMEN



SLOW BEND  
SPECIMEN



CENTRE-NOTCHED  
TENSILE SPECIMEN



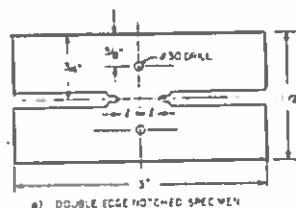
TYPE A BEND  
SPECIMEN

Proben von  
Beaumont/Harris

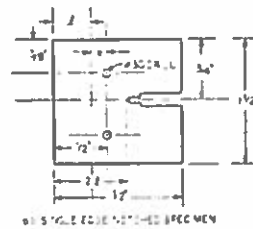
DEN -

SEN - Probe

e



a) DOUBLE EDGE NOTCHED SPECIMEN



b) SINGLE EDGE NOTCHED SPECIMEN

Proben von  
Sanford/Stonesifer

$$K_{Ic} = \frac{P}{t \sqrt{\pi \ell}}$$

$$K_{Ic} = \frac{P}{t \sqrt{\pi \ell}} \left( 0,673 + 2,71 \frac{e}{\ell} \right)$$

P = Bruchlast  
ℓℓ = (Zchnng.)  
e = Exzentrizität

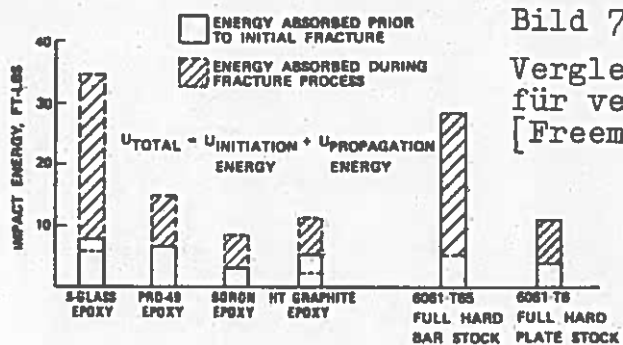


Bild 7.55

Vergleich aufnehmbarer Stoßenergien für verschiedene Materialien [Freeman/Kuebler]

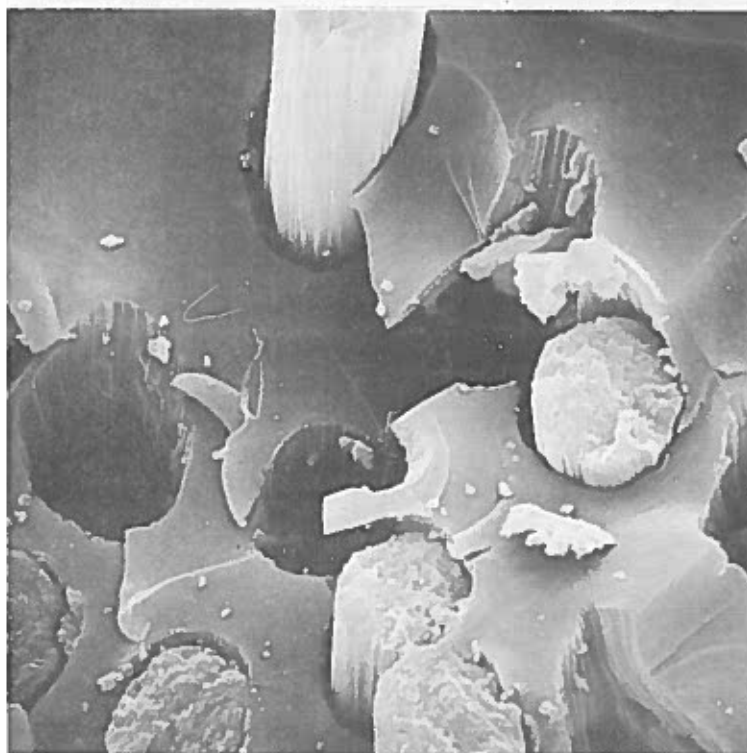
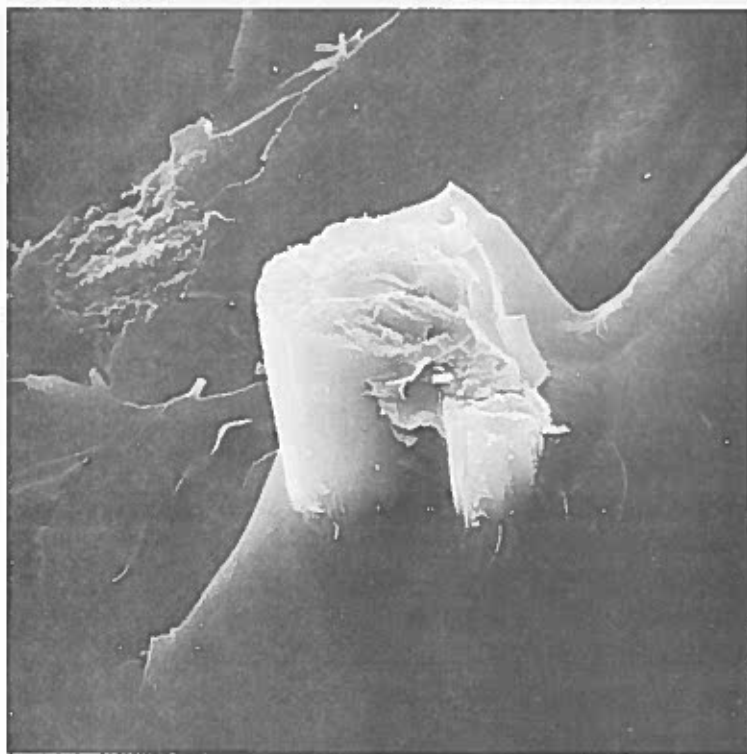


Bild 7.56  
 Gute und schlechte Benetzung von C-Fasern (M\*1:2500, MAN-NT)

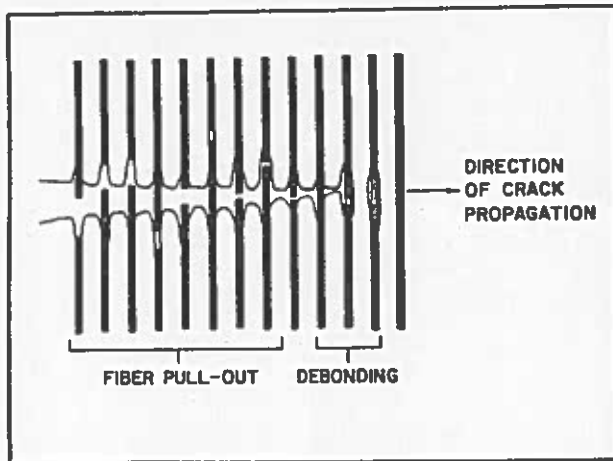


Bild 7.57

Transversaler Riß mit Faserherauszug und Ablösung von Fasern [Dorey]



Bild 7.58

Faserbrücken bei longitudinaler Aufsplitterung

Material	Experimental $\bar{\sigma}$ (kJ m <sup>-2</sup> )	Theoretical (kJ m <sup>-2</sup> )	
		Debonding $\bar{\sigma}_d$	Pull-Out $\bar{\sigma}_{po}$
Type I, surface treated, carbon fibre composite	4.0	0.07	2.2
Type I, surface untreated, carbon fibre composite	18.7	0.70	26.0
Type II, surface treated, carbon fibre composite	14.6	1.1	13.8
S-glass fibre composite	121	105	436

Tabelle 7.6

Rechnerische und versuchsmäßige Werte von Brucharbeiten [Beaumont/Phillips]



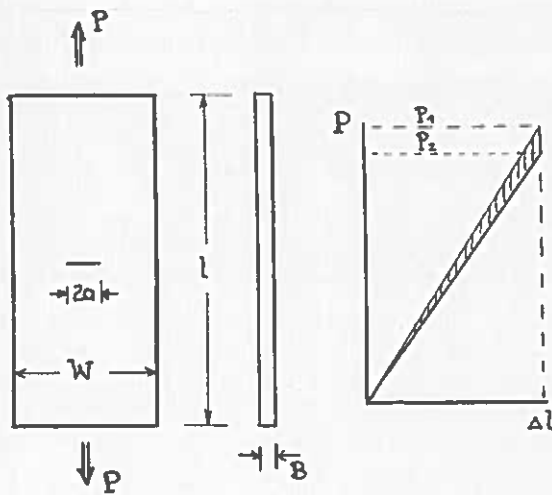


Bild 7.59

Mittenriß-Zugprobe und zugehöriges Last-Verformungsdiagramm

$\varphi$ %	$E_1$ psi x 10 <sup>6</sup>	$E_2$ psi x 10 <sup>6</sup>	$\nu_{21}$	$G_{12}$ psi x 10 <sup>6</sup>
0	0.50	0.50	0.35	0.35
10	1.51	0.60	0.33	0.33
20	2.52	0.66	0.32	0.32
50	5.55	1.33	0.28	0.30
60	6.56	1.70	0.26	0.29

$\varphi$ %					% Abweichung	
$\varphi$ %	$G_c(1)$	$K_c(1)$	$G_c(2)$	$K_c(2)$	$G_c$	$K_c$
0	0.75	373	0.77	380	+2.5	-2
10	4.05	1,020	2.98	865	-36	+15
20	3.63	965	2.47	800	-47	+17
50	2.32	1,090	2.31	1,090	-0.5	0
60	1.97	1,100	1.81	1,060	-9	+4

$G_c \frac{\text{in lb}}{\text{in}^2}$   
 $K_c \frac{\text{lb}}{\text{in}^{3/2}}$

Tabelle 7.7

Vergleich von Bruchkennwerten für orthotropes GFK (ERL-2256/ZZ L 0820)  
[Sih/Pagano]

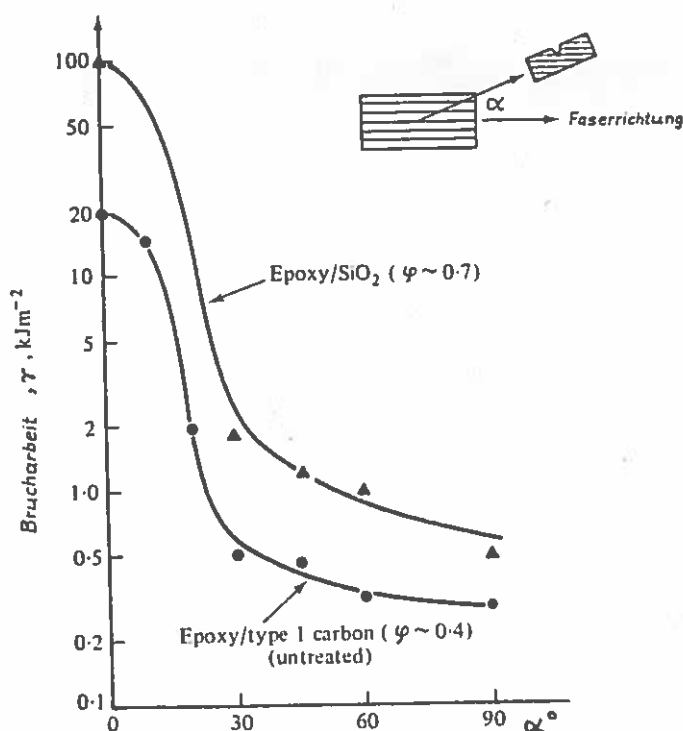


Bild 7.60

$\alpha$ -Abhängigkeit der Brucharbeit für Type 1 - Kohlenstofffaser/Epoxidharz [Ellis]

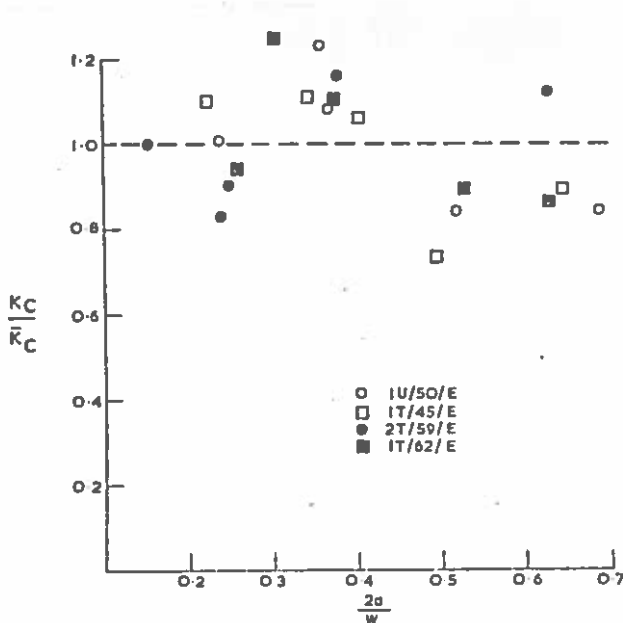
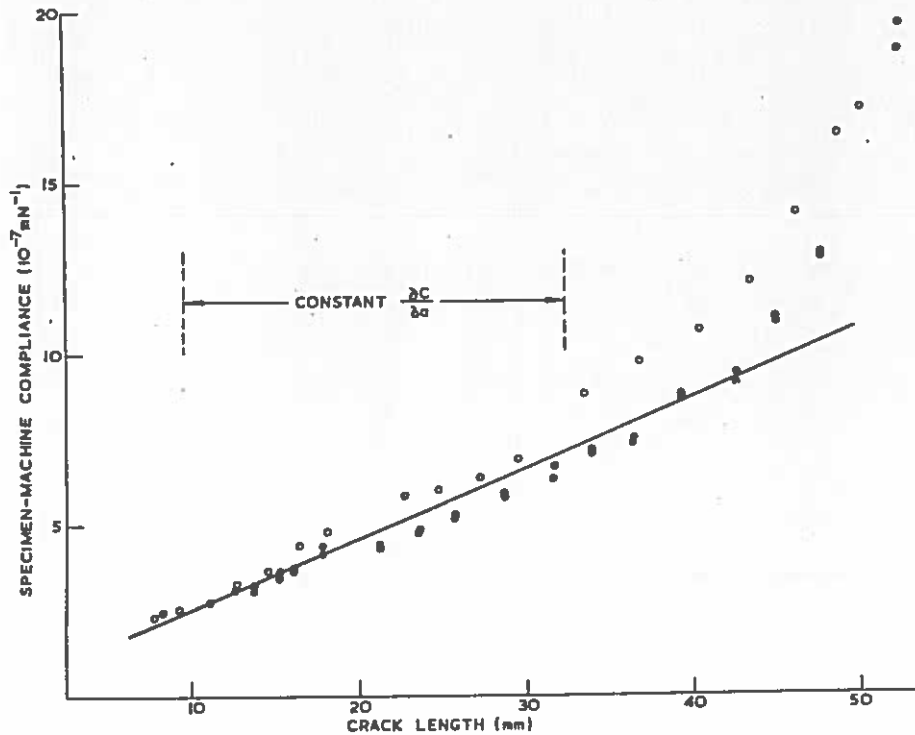
MATERIAL	FIBRE	MATRIX	LAMINA THICKNESS (mm)	$V_f$	FIBRE STRENGTH (MNm <sup>-2</sup> )	FIBRE MODULUS (GNm <sup>-2</sup> )	I.L. STRENGTH (MNm <sup>-2</sup> )
1T/45/E	A.E.R.E.	CIBA MY750/MNA/BDMA	0.33	0.45	1270	409	67
1T/62/E	GRAFIL HM-S (COURTAULDS)	SHELL DX 210/BF <sub>3</sub> 400	0.25	0.62	1950	380	78
1U/50/E	A.E.R.E.	CIBA MY750/MNA/BDMA	0.33	0.53	1270	409	23
2T/59/E	GRAFIL HT-S (COURTAULDS)	SHELL DX 210/BF <sub>3</sub> 400	0.25	0.59	2300	265	90
1T/38/G	GRAFIL HM-S (COURTAULDS)	PYREX GLASS	0.23	0.38	2300	370	70
2T/40/G	GRAFIL HT-S (COURTAULDS)	PYREX GLASS	0.23	0.38	2900	253	70

Tabelle 7.8

Werkstoffwerte bei den von Phillips verwendeten Proben

Bild 7.62

Die Abhängigkeit der Nachgiebigkeit C von der Rißlänge a, gemessen bei zwei ähnlichen TC-Proben Phillips



COMPOSITE	YOUNG'S MODULUS (GNm <sup>-2</sup> )	EFFECTIVE MODULUS (GNm <sup>-2</sup> )		
		CALCULATED		MEASURED
		PLANE STRAIN	PLANE STRESS	
1T/45/E	91	44	31	33±4
1T/62/E	104	56	39	42±6
2T/59/E	69	49	33	30±4

Tabelle 7.9

Gemessene und berechnete effektive Moduln E\* [Phillips]

Bild 7.61

Normierte kritische Bruchzähigkeitswerte in Abhängigkeit von der bezogenen Rißlänge [Phillips]

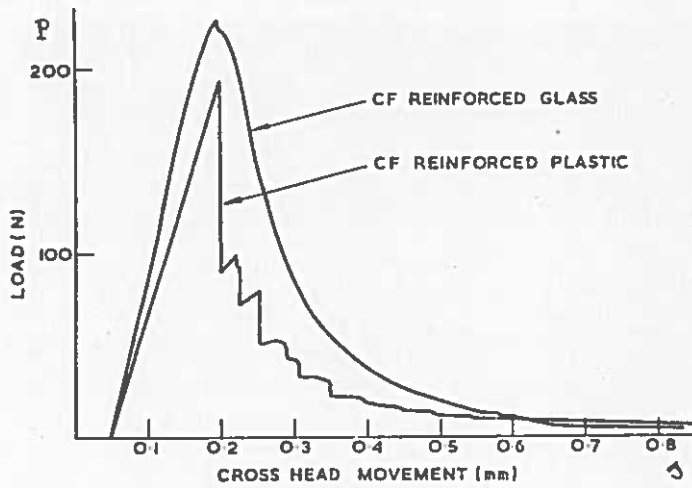


Bild 7.63

Last-Verschiebungskurven bei der Brucharbeit [Phillips]

$$\gamma = \frac{1}{2A} \int P d\delta$$

FIBRE	V <sub>f</sub>	K <sub>C</sub> (10 <sup>6</sup> Nm <sup>-3/2</sup> )		G <sub>C</sub> (kJm <sup>-2</sup> )		
		TC	CN	TC	CN	WF
1T	0.45	5.9 ± 0.3	6.6 ± 0.4 (6-2)	1.1 ± 0.2 (8)	1.3 ± 0.3 (5)	1.5 ± 0.1 (4)
1T	0.62	12.5 ± 1.3	13.5 ± 1.0 (13-2)	3.8 ± 1.1 (6)	4.4 ± 1.1 (5)	2.8 ± 0.1 (4)
1U	0.50	—	17.5 ± 1.3 (22-0)	—	20.2 ± 0.3 (5)	26.6 ± 2.2 (4)
2T	0.59	23.4 ± 1.1	24.2 ± 1.5 (20-0)	19.0 ± 3.8 (5)	19.9 ± 4.4 (5)	11.7 ± 0.3 (4)

CARBON FIBRE REINFORCED GLASS

1T	0.38	9.2 ± 0.5	8.3 ± 0.1	3.0 ± 0.8 (2)	1.4 ± 0.2 (2)	1.8 ± 0.1 (4)
2T	0.40	10.3 ± 0.5	7.1 ± 0.2	1.8 ± 0.4 (2)	0.9 ± 0.2 (2)	3.1 ± 0.1 (4)

(1)=DATA OBTAINED FROM UNWAISTED CN SPECIMENS  
(1)=No. OF MEASUREMENTS

Tabelle 7.10

Bruchzähigkeiten und Reißfrei-  
setzungsenergie verschiedener  
CFK-Materialien [Phillips]

No.	Resin System		Glass		Single-Edge-Notched Specimen		Double-Edge-Notched Specimen	
	Source	Type	Diameter (×10 <sup>-3</sup> in.)	Type	K <sub>IC</sub> (psi √in.)	G <sub>c</sub> (lb./in.)	K <sub>IC</sub> (psi √in.)	G <sub>c</sub> (lb./in.)
1	Shell	Epon 826/CL	0.4	S-HTS	1270	0.9	1080	1.0
2	Union Carbide	ERL 2256/0820	0.4	E-HTS	1520	1.2	1310	1.3
3	Shell	Epon 826/CL	0.4	E-HTS	1340	1.6	1100	1.1
4	Union Carbide	ERL 2256/0820	5.0	E-HTS	1030	0.3	850	0.3
5	Shell	Epon 826/CL (B - Stage only)	0.4	S-HTS	320	0.5	270	0.3
6	Shell	Epon 826/MABA*	0.4	S-HTS	1480	2.8	1250	3.1

\*MABA prepared by Chemistry Division, NRL.

Note: Each K<sub>IC</sub> and G<sub>c</sub> value is the average from 21 specimens.

(Epon 826/CL, E-HTS glass, 0.4-mi diameter).

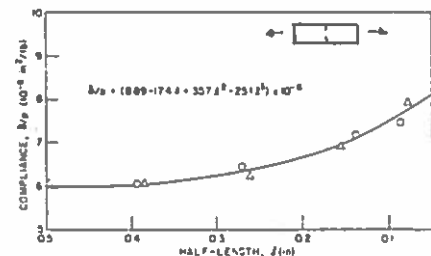


Bild 7.64 Nachgiebigkeitskurve C als Funktion der Reißlänge a [Sanford/Stonesifer]

Tabelle 7.11 Bruchkennwerte für GFK bei zwei verschiedenen Probentypen [Sanford/Stonesifer]

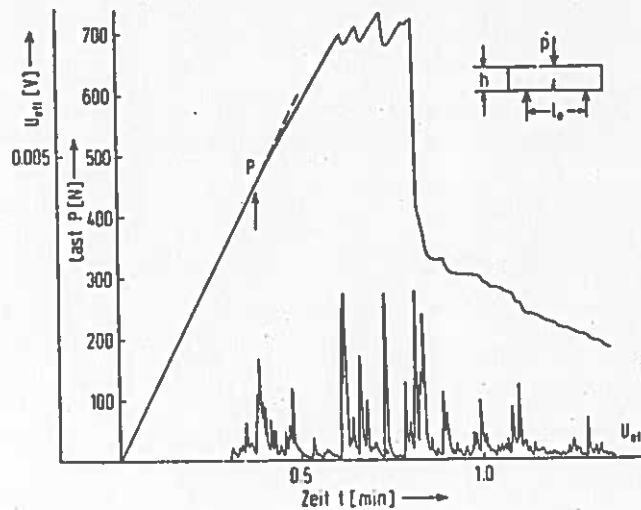


Bild 7.65

Last  $P$  und mittlere Amplitude  $U_{eff}$  der Schallemission als Funktion der Zeit bei einer Dreipunktbiegeprobe aus unidirektionalem Kohlenstoffaser-Aluminium. [Becht u.a.]

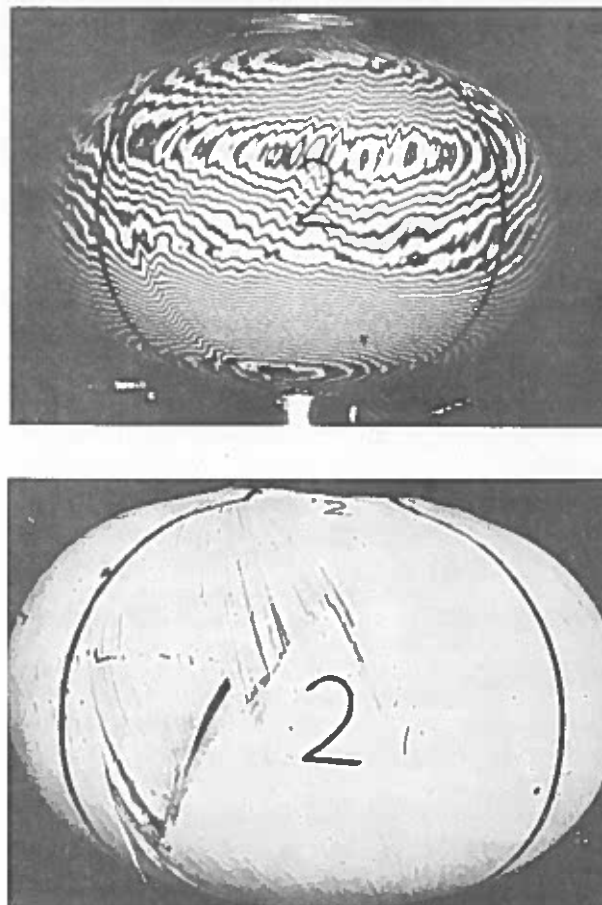


Bild 7.66

Interferogramm eines fehlerhaften Tanks und die dazugehörige Photographie des geborstenen Tanks. Die Fehlstelle machte sich dadurch bemerkbar, daß die auf dem Interferogramm erkennbare Faserrichtung mit der der äußeren, nicht mit der inneren Lage übereinstimmt. GFK-Tank, Typ 3, Druckbelastung 20 + 10 atü. [Gruenewald/Fritzschn]

## 8. Festigkeitsberechnungsgrößen

### 8.1. Allgemeines

Bedingt durch die verschiedenen Belastungsarten eines Bauteils sowie die unterschiedlichen Beanspruchbarkeiten ( $\sigma_u, \sigma_L, \tau_u$ ) des Faser-verbundwerkstoffes muß sehr darauf geachtet werden, mit welchen Werten ein Festigkeitsnachweis oder eine Vordimensionierung durchgeführt wird.

Eine erste Orientierung gibt das zeitliche Verhalten des Werkstoffes bei Belastung. Die aus diesem Verhalten resultierenden Festigkeiten werden in Kurzzeitfestigkeit, Zeitstandfestigkeit, Schwingfestigkeit und Schlagfestigkeit unterschieden. Die Schwingfestigkeit kann wiederum entsprechend der Art der auftretenden Betriebsbelastung weiter unterteilt werden. Sie hat als oberen Grenzwert die (statische) Kurzzeitfestigkeit und als unteren die Dauerfestigkeit oder eine bestimmte Zeitfestigkeit, falls das Material keine Dauerfestigkeit wie z.B. Stahl aufweist.

Zur Ermittlung der Festigkeitswerte werden in der Regel bestimmte, einfache, einachsige belastete Proben herangezogen. Festigkeitswerte aus späteren Bauteilversuchen, die zumeist als Qualifikationsnachweis des mit Probenwerten ausgelegten Bauteils dienen, können nur noch für Rechnungen beim Nachweis herangezogen werden. Wie man hieraus sieht, steht der Festigkeitsingenieur bei der Auslegung vor dem Problem der Übertragbarkeit der Versuchswerte von Proben. Grundsätzlich sollten deswegen nur Daten von solchen Probenformen gewählt werden, die ein ähnliches Beanspruchungsverhalten haben, wie es am Bauteil auftritt. Damit wird die Forderung nach glatten, schwach und stark gekerbten sowie Proben mit Anriß laut. Erst mit Hilfe entsprechend geeigneter Probenformen und den daraus resultierenden Festigkeitswerten kann man die letztlich gefragte, sog. Gestaltfestigkeit des Bauteils abschätzen.

Bei allem darf nicht vergessen werden, daß die der Festigkeitsberechnung zugrunde liegenden Festigkeitswerte zumeist aus einachsigen Belastungen stammen. Von den in Kapitel 7 erwähnten Festigkeitshypothesen erhofft man sich dann eine Aussage für mehrachsige Beanspruchungszustände, wobei die Anwendbarkeit der Hypothesen je nach Material und Beanspruchungsverlauf unterschiedlich gut sein wird. Eine Verwendung zweiachsig belastbarer Proben zur Überprüfung der Festigkeitshypothesen stellt äußerst hohe Anforderungen an die mo-

mentenfrei auszubildende Einspannung der Probe. Menges/Dolfen untersuchten jedoch schon zweiachsig belastete Rohrproben und Kreuzproben [Kunststoffe, 1969].

Welche einzelnen Festigkeitswerte zu ermitteln sind, zeigt Bild 8.1. Es sind dies die Zugfestigkeiten  $\sigma_{u,z}$  und  $\sigma_{L,z}$ , die Druckfestigkeiten  $\sigma_{u,d}$  und  $\sigma_{L,d}$ , die Scherfestigkeiten  $\tau_{u,s}$  und  $\tau_{L,s}$  und auch Biegefestigkeiten  $\sigma_{u,b}$  und  $\sigma_{L,b}$ . Um ein Gefühl für diese stark unterschiedlichen Festigkeitswerte zu bekommen, sei Tabelle 8.1 aus [Puck, 1968] angeführt. Diese Tabelle gibt allerdings nur Kurzzeitfestigkeitswerte an. Bei zeitlich veränderlichen und zeitlich andauernden Beanspruchungen sind entsprechende Werte zu ermitteln.

Bei der Auslegung eines Faserverbundbauteils kann der Festigungsingenieur noch zu selten auf ausreichende Werkstoffangaben aus Firmenprospekten etc, zurückgreifen. Er muß versuchen, auf einfache, schnelle Weise über Werkstoffuntersuchungen zu den notwendigen Angaben zu kommen. Dazu sind relativ einfache Proben herzustellen, mit denen sich schnell, für die Auslegung ausreichend gute Werkstoffwerte ermitteln lassen. Für Festigkeitsnachweise genügen solche Werte in der Regel nicht mehr.

Vogt u.a. teilen im AFML - Report - TR 66 - 274 die Gesamtheit der Proben in fünf Kategorien auf: flache Proben, kurze Balken, Ringe, Zylinder und Behälter. Diese Einteilung basiert auf einer Umfrage in amerikanischen Firmen.

In jeder Kategorie wiederum sind - aus verschiedenen Gründen sicherlich - keine gleichen Abmessungen bei einer Probenform anzutreffen. Die Versuchsergebnisse hängen aber von den Probenabmessungen mehr oder weniger stark ab. Man kann zwar mit einer bestimmten Probenform Werkstoffwerte gewinnen oder eine Eingangskontrolle des Materials vornehmen, darf die erhaltenen Werte aber nicht als Qualitätswerte betrachten. Bei der Prüfung von NOL-Ringen (1 bis 4 mm dick) steigt z.B. die Zugfestigkeit bei den kleineren Wanddicken an, während es bei den ILSS-Werten umgekehrt ist. Um Werte der Literatur vergleichen zu können, sollen deshalb die genormten Proben nach ASTM D 2344 - 6 ST, DIN 53452, 53455 und 53180 usw. verwendet werden

Neben den Probenabmessungen müssen auch die Lagerungsbedingungen, die Größe und Art der Lasteinbringung sowie die Belastungsgeschwindigkeit- und -frequenz festgelegt werden. Das ist eine grundlegende Aufgabe für die Normenausschüsse, die bei Faserverbunden noch nicht vollständig gelöst ist. Dazu müßtenzuerst die Probeneigenheiten bei

der Anwendung auf Faserverbund theoretisch vollständig erfaßt sein.

Zum Schluß sei noch der Einfluß der Herstellung der Proben erwähnt. Ein erster Versuch die Faktoren "Herstellen nach Rezept" und "Prüfen nach Norm" zur besseren Beurteilung des Werkstoffs GFK zu erfassen, wurde in [Ehrenstein], [Neitzel/Schik, 1972] beschrieben. Es wurde dort ein Vergleich der ziemlich streuenden Ergebnisse verschiedener Hersteller am Beispiel einer handlaminierten GFK-Platte gezogen. Geprüft wurden u.a. nach DIN 53455 die Zugfestigkeit nach DIN 53452 die Biegefestigkeit und nach DIN 53395 der Glasgehalt.

## 8.2. Festigkeitsarten und Probenformen, Faserverbundbesonderheiten

In diesem Abschnitt werden die einzelnen Festigkeitskenngrößen angeführt, die beim Faserverbund zu beachten sind. Außerdem wird auf die zugehörigen Probenformen eingegangen, und es werden einige Besonderheiten des Faserverbundes herausgestellt.

### 8.2.1. Zugfestigkeit $\sigma_{zB}$

#### a) Zugfestigkeit $\sigma_{zB}$

Um die Zugfestigkeit  $\sigma_{zB}$  des Verbundes zu bestimmen, bieten sich mehrere Möglichkeiten an. Man kann einmal eine größere Anzahl von Einzelfasern (Filaments) gemäß Bild 8.2 zerreißen und erhält eine Faserfestigkeit, die man in eine theoretisch erreichbare Verbundfestigkeit umrechnen kann.

Man kann aber auch direkt Verbundproben (analog Tabelle 5.3) wie z.B. einen Strang gemäß Bild 8.3 prüfen und eine Verbundfestigkeit finden, die man natürlich wiederum auf eine Faserfestigkeit zurückrechnen kann. Unter der Belastung  $P_B$  gilt bei einer Querschnittsfläche  $A$  der Strangprobe für die Zugfestigkeit dieser Verbundprobe

$$\sigma_{zB} = \frac{P_B}{A} = \frac{\sigma_F A_F + \sigma_M A_M}{A} = \sigma_F \varphi + \sigma_M (1 - \varphi)$$

Da aber unter Zug

$$\epsilon_{zB} = \epsilon_F = \epsilon_M \quad ,$$

so kann im Hookeschen Bereich, weil

$$\frac{\sigma_F}{E_F} = \frac{\sigma_M}{E_M} \quad ,$$

schließlich die Beziehung

$$\sigma_{\parallel zB} = \sigma_F \left[ \varphi + (1-\varphi) \frac{E_M}{E_F} \right] \quad (8.1a)$$

gesetzt werden. Für geringe Faseranteile bzw., wenn der Matrixanteil vernachlässigt werden kann, wird

$$\sigma_{\parallel zB} \approx \sigma_F \cdot \varphi \quad (8.1b)$$

Ehrenstein u.a. zeigen in einem Aufsatz über glasfaserverstärkte thermoplastische Kunststoffe, daß in bestimmten Fällen ( $\varphi_{krit} > \approx 10\%$ ) eine geringe Faserverstärkung zu einem Absinken der Verbundzugfestigkeit unter die Harzzugfestigkeit führt. Da die Harzmatrix in der Regel eine größere Bruchdehnung als die Faser hat, wird nämlich bei einem geringen Faseranteil schon die Bruchfestigkeit der Fasern erreicht, wenn das Harz erst einen Teil seiner Bruchdehnung erlangt hat. Nach dem Bruch dieser Fasern liefert die Harzmatrix allein die Zugfestigkeit. Sie ergibt sich dann zu  $\sigma_{\parallel zB} = \sigma_{M_B} (1-\varphi)$ . Mit zunehmendem Fasergehalt erreicht die Bruchfestigkeit bei  $\varphi_{krit}$  den Matrixbruchwert  $\sigma_{\parallel zB} = \sigma_{M_B}$ . Für Glasfasern in Polyimid beträgt  $\varphi_{krit}$  ungefähr 6%.

Entgegen der Zugfestigkeit wird aber die Steifigkeit schon bei kleinsten Fasermengen heraufgesetzt.

Verbundgrößen zu messen ist in der Regel für die Berechnung sinnvoller, da schließlich Verbundwerte eingesetzt werden müssen. Allerdings lassen auch Zerreißversuche an Einzelfasern Aussagen zu, mit welchen Spannungen gerechnet werden darf. Eine im Literaturverzeichnis aufgeführte Arbeit von Pepina gibt darüber Auskunft.

#### Einzelfaserprüfung:

Für eine Einzelfaserprüfung, auch Elementarprfung genannt, wird der Faden in ein Papierrhmchen eingeklebt und mit 0,6 mm/min Geschwindigkeit in der Prüfmaschine zerrissen. Um noch eine einigermaßen repräsentative Aussage zu erhalten, wurden von Pepina (beispielsweise an C-Fasern) für z.B. 10 000 Filaments 20 Elementarfäden herangezogen.

Im Bild 8.4 ist das Spannungs - Dehnungs - Diagramm der Einzelfaserprüfung angegeben. Man erkennt darin, daß die mittlere Elementarfestigkeit von einem recht großen Streubereich um den Mittelwertpunkt umgeben ist. Die zumeist hochfesten, mit einer groeren Deh-



nung behafteten Fäden der Spule kommen bei Belastung wegen des frühzeitigen Reißens der Fäden mit geringer Bruchdehnung praktisch nie voll zum Tragen, da der Restquerschnitt unter der aufgebrachtten Last schon vor Erreichung der zum Mittelwert gehörigen Dehnung (hier 0,96%) reißt. Kleinere Streubreiten heben bei gleichem Mittelwert die ausnutzbare Faserfestigkeit an.

Durch die Einzelfaser kann eine Aussage gemacht werden, bei welcher mittleren Dehnung oder Festigkeit die Fasern reißen. Man kann nämlich zwei Kurven aufzeichnen: Die gestrichelte Kurve, die den mittleren Elementarfestigkeitsanstieg der restlichen Fasern angibt - da eine festigkeitsmäßig schwächere verglichen mit dem Mittelwert gerissen ist, ergibt sich ein Festigkeitsanstieg - und die dick ausgezogene Kurve, die den Ist-Spannungsanstieg bezogen auf den Restquerschnitt zeigt. Diese Kurve verläuft anfangs wie die rechnerische Spannungs-Dehnungs-Linie, macht aber nach einer gewissen Anzahl von gerissenen Fäden fast einen Knick, der das beginnende maschinengewehrartige Reißen bei den Zugproben charakterisiert.

Der Schnittpunkt beider Kurven zeigt den totalen Bruch an. Projiziert man diesen Punkt auf die rechnerische Spannungs-Dehnungs-Linie, ergeben sich die mittlere erreichbare Festigkeit und Dehnung der verwendeten C-Faser.

Wird als Annahme eine Ausgleichsgerade an die steil verlaufende zweite Kurve gelegt, wobei die letzten zwei Punkte, die oberhalb von  $260 \text{ kp/mm}^2$  liegen, die äußerste Grenze darstellen, so erhält man im Schnittpunkt mit der Spannungs-Dehnungs-Linie die theoretisch erreichbare Festigkeit und Dehnung.

#### Strangprüfung:

Weil wegen der Vielzahl von notwendigen Einzelfaserprüfungen der Aufwand zu groß ist, können auch Strangprüfungen an verschiedenen Stellen der Spule vorgenommen werden. Damit wird ein etwas besserer Einblick in das Zugfestigkeitsverhalten des verwendeten Verbundmaterials erhalten. Der Versuchsaufbau sieht dabei so aus: Der durch das Harzbad geführte Strang wird an den Enden gemäß Bild 8.3 in einer Vorrichtung mit Bettungsharz umgossen und dann ausgehärtet. Unter Gewährleistung einer möglichst zentrischen Einklemmung - keine Einspannmomente - wird der Prüfling mit 15 mm/min Prüfgeschwindigkeit gerissen.

Je Spule werden etwa zehn Einzelstrangprüfungen durchgeführt und daraus der Mittelwert der Zugfestigkeit, die Standardabweichung und der Variationskoeffizient des Mittelwertes berechnet.

Das am Faserstrang anhaftende Harz braucht bei der Bestimmung der Zugfestigkeit nicht berücksichtigt zu werden, da es z.B. bei Grafil und Modmor (ca. 10 000 Filaments) nur um 2 - 3% der Gesamtfestigkeit beisteuert.

Da zur Berechnung der Spannung außer der Zugkraft auch der Fadenquerschnitt des Stranges bekannt sein muß, wird er aus mehreren (z.B. fünf) Einzelwerten von Fasersträngen oder Rovings der Länge  $l$  nach der Beziehung (Faserwerte)

$$\left(\frac{\text{Vol.}}{l}\right)_{\text{Strang}} = A_{\text{Strang}} = \frac{G_F / \delta_F}{l} \quad (8.2)$$

ermittelt. Das Gewicht des Faserstranges ist zu messen, während die Probenlänge  $l$  festliegt. Das spezifische Fasergewicht ist in den Herstellerangaben zu finden, der Faservolumenanteil  $\varphi$  ist zu bestimmen [Puck/Wurtinger]. Damit folgt

$$\sigma_{\parallel zB} = \frac{P_B}{A_V} \quad \text{mit} \quad A_V \approx \frac{A_F}{\varphi}, \quad \varphi = \frac{1}{1 + \frac{G_M \delta_F}{G_F \delta_M}} \quad (8.1c)$$

Im Bild 8.4 sind auch die Spannungs-Dehnungs-Diagramme der (Verbundstrangmessungen aufgezeichnet. Es zeigt sich eine recht gute Übereinstimmung mit der Einzelfaserprüfung.

Als weiteres konkretes Beispiel sei für die organische Faser Kevlar 49 (Aramidfaser von Du Pont) das Spannungs-Dehnungs-Diagramm für den Verbundstrang (umgerechnete Faserwerte) und das verwendete Reaktionsharz angegeben (Bild 8.5).

#### NOL-Ring-Prüfung:

Außer der Strangprüfung gibt es noch weitere Prüfungsarten für Verbundproben. Zur Bestimmung der Bruchfestigkeit kunstharzgebundener Rovings eignet sich sehr gut der NOL-Ring (Bild 8.6). Bei dieser Probe erfolgt die Lasteinbringung über zwei in den Ring eingelegte Halbkreissegmente, die voneinander weggezogen werden. Die bei mittlerer Belastungsgeschwindigkeit durchgeführte Prüfung liefert die Verbundzugspannung

$$\sigma_{\parallel zB} = \frac{P_B/2}{A_V} \quad \text{mit} \quad A_V = \frac{\text{Gewicht des NOL-Ringes}}{\rho_V \cdot 2\pi R_m} \quad (8.1d)$$

Eine genauere Betrachtung der Beanspruchungen im NOL-Ring ergibt, daß sich infolge des Auseinanderrückens der Halbkreissegmente im Spaltbereich eine Biegebeanspruchung überlagert. In [Puck/Wurtinger] wird eine von K. Weise für die Abschätzung des Momentes angegeben:

$$M = \frac{R_m}{8} \left( \frac{\pi}{EA_v} \right)^2 \left( \frac{P_B}{2} \right)^3 \quad \text{mit } E \approx E_{\parallel} \text{ bzw. } E_{\text{Biegung}} \quad (8.3)$$

Die aus diesem Moment resultierenden Biegespannungen können je nach  $\varphi$  und Fasersorte bis zu  $\approx$  zehn Prozent zusätzliche Beanspruchung ausmachen. Um diese Biegebeanspruchung um den Faktor 2 bis 3 zu reduzieren, werden ovale NOL-Ringe (mit kurzen, geraden Stegen) verwendet (s. [Wendt u.a.], S. 35).

Ergebnisse von NOL-Ring-Prüfungen sind ebenfalls im Bild 8.4 dargestellt. Man sieht, daß der Schnittpunkt der Ausgleichsgerade mit der  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurve des Faserbündels im NOL-Ring-Bereich liegt.

#### Schleuderring:

Wird derselbe Ring als Schleuderring einer langsam zunehmenden Belastung unterworfen, so liegt die erzielte Festigkeit etwas niedriger als bei der NOL-Prüfung. Die Formel zur Ermittlung der Bruchspannung ist

$$\sigma_{\parallel zB} \approx S_v (R_m \Omega)^2 \quad \text{mit } S_v = \frac{G_{\text{Ring}}}{\rho \cdot \text{Vol}_{\text{Ring}}} \quad (8.1e)$$

#### Zugproben:

In der Regel werden Flachzugproben verwendet (Bild 8.7), die aus Wickelplatten herausgeschnitten werden. Bild 8.8 zeigt eine Auflistung von Proben, wie sie in [Holmes/Al-Khayat] angegeben sind. Die von diesen Verfassern verwendete Zugprobe ist aufwendiger als die Flachzugprobe herzustellen.

Für nicht-axiale Belastung unidirektionaler Faserverbundproben eignet sich die Flachzugprobe besonders.

Bild 8.9 zeigt die Abhängigkeit der Verbund-Zugfestigkeit (Faserwerte angegeben) vom Faserorientierungswinkel  $\alpha$ . Das Spannungs-Dehnungsverhalten eines nicht-axial (schräg) belasteten Borfaserkunststoffes wird in der Literatur [Pipes/Cole] aufgeführt.

Wesentliche Unterschiede gegenüber isotropen Proben liegen vor,

wenn Laminatfestigkeiten ermittelt werden. Wird z.B. aus einem AWV eine Flachprobe herausgeschnitten und wird diese durch Zug belastet, so führt (s. Abschnitt 8.2.5.) der Randeffect zu einem frühzeitigen Versagen infolge Delamination. Es ist deshalb anzustreben, solche mehrschichtigen Zugproben relativ breit zu machen, um den Randeinfluß zu verkleinern. Leider ruft diese Verbreiterungsmaßnahme wieder größere Probleme an den in der Prüfmaschine einzuspannenden Rändern hervor.

#### Der Faserausnutzungsgrad:

Bei der Anwendung von Faserverbunden ist es von großem Interesse, den Ausnutzungsgrad der Faser im Verbund zu kennen. Als erreichbarer Ausnutzungsgrad wird der Quotient aus der im Faserverbund erreichten Bruchfestigkeit (bezogen auf den vorhandenen Faserquerschnitt) und der mittleren Faserfestigkeit definiert. Die Prüfungen wurden in Bild 8.4 als Strangprüfungen und als Einzelfaserprüfungen (s. [Pepina] ) durchgeführt.

In Bild 8.4 sind die Ergebnisse von 10 Strangprüfungen und 20 Einzelfaserprüfungen dargestellt. Dabei wurde angenommen, daß mit der Prüfungszahl 20 genügend genau der Faser-Qualitätsunterschied in einem Strang aus 10 000 Einzelfasern repräsentiert wird.

Wie die Spannungs-Dehnungs-Kurven z.B. für Grafil AS-Einzelfasern (Elementarfasern) zeigen, ist der mittlere  $\sigma$ - $\epsilon$ -Verlauf von einem großem Streubereich umgeben. Hochfeste und große Dehnbarkeit aufweisende Fasern kommen praktisch nie zum Tragen.

Mit Hilfe der Annahme einer Ausgleichsgeraden ergeben sich für zügige Belastung eine theoretisch erreichbare Einzelfaserfestigkeit von  $1660 \text{ N/mm}^2$ , eine theoretisch erreichbare Faserfestigkeit im Strang von  $1730 \text{ N/mm}^2$  und eine mittlere, theoretische Einzelfaserfestigkeit von  $2090 \text{ N/mm}^2$ . Als theoretischer Ausnutzungsgrad ergibt sich  $1730/2090 = 83\%$  im Strang und  $1660/2090 = 79,4\%$  bei der Einzelfaserprüfung. NOL-Ring Messungen bestätigen diese Aussage. Daß die Ausnutzung beim Strang höher liegt, ist durch eine gute Harzhaftung und Fehlen einer Verarbeitungsbeschädigung bedingt.

Zur Beurteilung der Unterschiede von Strang- und Einzelfasermessungen muß noch gesagt werden, daß bei der Einzelfaserprüfung automatisch keine gerissenen Fäden erfaßt werden, die im Strang immer vorhanden sind. Allerdings sorgt beim Strang die Matrix für einen gewissen Ausgleich.

Vergleiche zwischen verschiedenen Fasersorten zeigen, daß Ausnutzungsgrad und Variationskoeffizient recht verschieden sein können. Ein hoher Variationskoeffizient führt dazu, daß eine hochfeste Faser kaum mehr ausgenutzt werden kann als eine mittelfeste. Ziel jeder Qualitätssicherung muß es deswegen auch sein, Spulen mit möglichst niedriger Streubreite zu bekommen, weil sonst ein besserer Mittelwert  $\sigma_{FB}$  nichts bringt.

#### b) Querzugfestigkeit $\sigma_{1zB}$

Besondere Beachtung beim Verbund findet die Querzugfestigkeit, in manchen Fällen auch interlaminaire Zugfestigkeit genannt. Sie ist die Grenzgröße für die in Einzelschichten von Laminaten verwirklichte Spannung quer zur Faserrichtung. Da bei Querzugbeanspruchung die niedrigen Querzugfestigkeitswerte der UD-Schicht maßgebend sind, kommt es häufig vor, daß der Bruch eines Bauteils durch Überschreitung der Querzugfestigkeit eingeleitet wird.

Eine Probe zur Bestimmung der Querzugfestigkeit ist in Bild 8.7 (v. Tabelle 5.3) zu sehen. Aus der Messung ist die Verbundgröße abzuleiten

$$\sigma_{1zB} = \frac{P_B}{A_V} \quad \text{mit gemessenen } A_V, \varphi. \quad (8.4)$$

Sehr wichtig ist dabei der Faseranteil  $\varphi$ . Mit größer werdendem wächst  $\sigma_{1zB}$  zunächst an, um dann bei hohen Fasergehalten ( $\varphi > \approx 70\%$  bei Glas) erheblich abzufallen. Das liegt daran, daß die einzelne Schicht vom Harz abgelöste Fasern und Luftnester enthält. Eine solche Schicht verträgt aber keine Querbelastung. Allgemein wird auch der für Querzug günstigste Fasergehalt die maximal erreichbaren Matrix-Zugfestigkeiten nicht erreichen. Es bleibt infolge der Spannungskonzentrationen an den Fasern (Bild 8.10)

$$\sigma_{1zB} < \sigma_{MB} \quad (8.5)$$

Bild 8.11 zeigt den Verlauf von  $\sigma_{1zB}$  für ein spezielles GFK.

#### 8.1.2. Druckfestigkeit $\sigma_{dB}$

##### a) Druckfestigkeit $\sigma_{1dB}$

Ähnlich wie die Querzugfestigkeit ist die Druckfestigkeit im wesentlichen von der Matrix abhängig. Nur ist hier die Einbettung der

Fasern für die Druckbeanspruchbarkeit verantwortlich. Nach Abschnitt 7.4 ist es richtig, statt von einer Faserdruckfestigkeit von einer inneren Knickfestigkeit zu sprechen. Man sollte deshalb nur von Verbund- Druckfestigkeiten reden, weil die Matrix erst das Instabilwerden der gedrückten Einzelfaser durch ihre Stützwirkung verhindert. In Bild 8.12 zeigen Berg/Salama mögliche Bruchbilder des Verbundes.

Im [Puck/Wurtinger] wird eine Druckprobe mit rovingumwickelten Enden vorgeschlagen (Bild 8.13). Diese Form, deren Schlankheit außerhalb des Knickbereichs liegt, ergibt Druckbrüche zwischen den Verstärkungen. Die Grenzdruckspannung lautet

$$\sigma_{\text{udB}} = \frac{P_B}{A} \quad . \quad (8.6)$$

Da diese Prüfkörperform aufwendiger herzustellen ist, könnte zur schnelleren Erzielung erster Festigkeitswerte die ASTM-Standardprobe D 695-54 gewählt werden. Wie Wurtinger zeigte, liegen laut Bild 8.14 die damit erhaltenen Werte auf der sicheren Seite.

Für Druckversuche an Laminaten gibt Wurtinger einen zylindrischen Prüfkörper an, dessen Beullast kleiner als die Knicklast ist. Als geometrische Verhältnisse wählte er  $H/D/t_v = 15/15/1$ .

Infolge des kleinen Faserdurchmessers und der großen Anzahl von Fäden in den Bündeln ist es nicht einfach, einen Faserverbund mit einheitlich parallel und gerade liegenden Fäden herzustellen, weshalb in der Regel eine nicht optimale Druckfestigkeit in Kauf genommen werden muß.

Da die Vorkrümmung der Glasfasern sich auf die Druckfestigkeit auswirkt, sollten bei Druckbelastung die Fasern möglichst gerade im Laminate liegen. Roving-Gewebe ergeben deshalb höhere Druckfestigkeiten als z.B. Leinengewebe. Es sind Gewebe mit niedrig gedrehten Fäden solchen mit gezwirnten Fäden vorzuziehen (aus BW 983 von H. Schönwald). Desgleichen ergeben normale Rovings gegenüber Spinnrovings höhere Druckfestigkeiten.

Oberhalb eines bestimmten Faservolumenanteils beobachtet man, wahrscheinlich durch die mit steigendem  $\varphi$  schlechter werdende Durchtränkbarkeit verursacht, im Gegensatz zur Zugfestigkeit, keinen linearen Zusammenhang mehr zwischen Druckfestigkeit und Glasvolumenanteil (Bild 8.14).

An der Oberfläche eines FK-Teils werden die Fasern nicht allseitig abgestützt. Sie knicken deshalb leichter aus. Dadurch sinkt bei plattenförmigen Gebilden die Druckfestigkeit mit zunehmendem Verhältnis Oberfläche zu Volumen, d.h. die Druckfestigkeit  $\sigma_{1dB}$  wird mit abnehmender Wanddicke kleiner. Daran ist die Problematik der Plattenprobe von Bild 8.13 geknüpft.

Die mechanischen Eigenschaften der Gießharze ändern sich mit der Temperatur. Bei näherer Betrachtung findet man [BW 983] zwischen der Druckfestigkeit  $\sigma_{dB}$  von GFK z.B. und dem Elastizitätsmodul  $E_M$  des Harzes den Zusammenhang  $\sigma_{dB} \sim E_M^{2/3}$ . Da manche Bauteile - z.B. durch Sonneneinstrahlung - rasch in höhere Temperaturbereiche geraten, ist auf diesen Umstand bei der Auslegung des Bauteils besonders zu achten.

Die Knickfestigkeit oder Beulfestigkeit eines Bauteils hängt stark davon ab, ob die druckbeanspruchten Lagen seitlich gehalten werden. Umfangslagen z.B. erhöhen die Knicklast bei Druckstreben ganz erheblich.

#### b) Druckfestigkeit $\sigma_{1dB}$

Bei unidirektionalen Faserverbund-Bauteilen kann eine Belastung quer zu den Fasern vorkommen. Wie man sich überlegen kann, wird die dazugehörige Querdruckfestigkeit im Bereich der Harzdruckfestigkeit liegen und höher als die Querkzugfestigkeit sein. Die Querdruckfestigkeit  $\sigma_{1dB}$  ist noch mehr als  $\sigma_{1dB}$  von der Festigkeit der Matrix im jeweiligen Betriebstemperaturbereich abhängig. Für UD-GFK sind von Förster die Werte in Bild 8.11 gemessen worden.

### 8.2.3. Scherfestigkeit $\tau_2$

#### a) Scherfestigkeit $\tau_{*2}$

Bedingt durch den lagenweisen Aufbau faserverstärkter Kunststoffe kommt der Scherfestigkeit besondere Bedeutung zu. Liegt eine zu große Scherbelastung vor, so werden die einzelnen Lagen voneinander getrennt. Zur Beurteilung, wann ein solcher Delaminierungsvorgang das Bauteil zerstören wird, dient die interlaminare Scherfestigkeit (engl. ILSS = Interlaminar Shear Strength).

Die Bestimmung des ILSS-Wertes, oft nur ILS-Wert genannt wird häufig nach der ASTM-Norm 2344 bei einer Belastungsgeschwindigkeit von

1 mm/min vorgenommen. Als Probe kann der kurze Träger (Short Beam Method) als Dreipunktbiegeträger dienen, wie es in Bild 8.15 zu sehen ist. Allerdings ist der dortige Träger aus einem vorhandenen NOL-Ring herausgeschnitten worden und liegt somit als Alternativprobe zum üblichen, aus Platten herausgeschnitten, geraden, kurzen Träger vor (Bild 8.16). Daraus läßt sich ersehen, wie schwer es ist, Versuchswerte unterschiedlicher Probenformen zu vergleichen. Hat man nur zwischen verschiedenen Faserverbundwerkstoffen zu wählen, so reicht der im jeweiligen Fall einfachste Versuch aus; für den Festigkeitsnachweis sind aber genaue Werte notwendig.

In den Versuchen wird zumeist der UD-Träger benutzt. Jedoch gilt für ihn wie für einen mehrschichtigen Träger die Grundregel, daß der Scherfestigkeitswert nur dann richtig ist, wenn ein echter Schubbruch erzeugt wird. Mischbrüche mit Biegung müssen vermieden werden (Bild 8.17). Es muß also für einen bestimmten Faserverbundwerkstoff mit einem speziellen  $\sigma_{11}/I_{LSS}$ -Verhältnis ein spezielles Trägerhöhe/Spannweite-Verhältnis gewählt werden.

Weitere Unsicherheiten ergeben sich durch den Einfluß der Probenbreite und im Bereich der Lasteintragung wie im folgenden aufgezeigt wird. Als einfache Berechnungsformel für den Scherfestigkeitswert wird

$$\max \tau_{zx} = I_{LSS} = 1,5 \frac{Q}{A} = \frac{3}{4} \frac{P_B}{b \cdot t_v} \quad (8.7a)$$

$$(\equiv \text{Inplane shear strength} = \tau_{*B} \text{ wenn UDV})$$

angegeben. Diese Formel ließ sich aus  $\max \tau = 1,5 Q/A$  als Spitzenwert des parabolischen Verlaufs über der Dicke ermitteln und aus  $Q = P_B/2$  beim Balken auf zwei Stützen. Bedingt durch den Spitzenwert in der Wandmitte, wird die Probe an dieser Stelle zuerst delaminiert, abgesehen von Störungen durch Unregelmäßigkeiten im Aufbau.

Aus der obigen Formel ist ersichtlich, daß der ILS-Wert unabhängig von der Länge sein <sup>muß</sup>. Das ist jedoch, wie schon angedeutet, nicht der Fall. Als Orientierungshilfe kann die folgende Beziehung herangezogen werden: Nach der einfachen Balkentheorie liegt in der Trägermitte eine Randspannung von  $\sigma_x = \sigma_{11} = M/W = \frac{P_L}{4} / \frac{bt_v^2}{6}$  vor. Das liefert ein Bruchspannungsverhältnis

$$\sigma_{11B} = \frac{6}{4} \frac{P_B}{b t_v} \cdot \frac{L}{t_v} = 2 \tau_{*B} \frac{L}{t_v} ,$$



und es muß gelten, wenn der Schubbruch früher eintreten soll

$$\frac{L}{t_v} < \frac{\sigma_{11}}{2\tau_{\#B}} \quad .$$

Ein Anhaltswert für GFK liefert

$$\frac{\sigma_{11B}}{\tau_{\#B}} = \frac{100}{5} = 20 \quad \text{bzw.} \quad \frac{L}{t_v} = \frac{20}{2} = 10 \quad . \quad (8.8)$$

Nachdem auf ein sinnvolles Trägerlänge - Trägerhöhenverhältnis eingegangen wurde, soll nun der Einfluß der Probenbreite erfaßt werden. Sattar/Kellogg untersuchten analog zu einer Arbeit von Timoschenko den (orthotropen) UD-Träger bezüglich des Breiteneinflusses auf  $\tau_{zx}$ . Dabei gehen sie von den Annahmen aus, daß das Verbundmaterial homogen orthotrop ist und nur die Spannungen  $\sigma_x, \tau_{zx}, \tau_{yx}$  vorliegen, wobei die Biegespannung  $\sigma_x$  linear über der Wanddicke  $t_v$  ist. Sie wenden das allgemeine Hookesche Gesetz für orthotrope Körper an, das bei UD-Schichten infolge  $E_z = E_y, \nu_{zx} = \nu_{yx}$  und  $G_{zx} = G_{yx}$  in den transversal-isotropen Fall überführt wird und bestimmen  $\tau_{zx}$ .

Das Auftragen von  $\tau_{zx}$  zeigte ihnen, daß die höchsten Werte am Rande liegen. Das bedeutet, daß die wirklichen Schubspannungen in der Probe höher als die nach der Balkentheorie ermittelten sind. Für den gebräuchlichen Wert  $b/t_v = 2,5$  ist die auftretende Spannung bei CFK ca. 10% höher. Bei Winkellagen ist der Einfluß erheblich größer.

Eine weitere Korrektur ergibt sich bei Betrachtung der Schneideneinleitung. Im Bereich der Lasteinleitung liegen große  $\sigma_z$ -Spannungen vor, die durch Schubspannungen abgebaut werden müssen. Eine Abschätzung der maximalen Schubspannungen ergibt für den homogenen, isotropen Träger Timoschenko im Schnitt  $x = 0,125 t_v$  einen maximalen Wert. Er lautet (Bild 8.18)

$$\max \tau_{zx} = 1,1 \frac{P_B}{bt_v} = \tau_{\#B} \quad . \quad (8.7b)$$

Eine einfache Superposition von Breiten- und Lasteinleitungseinfluß dürfte nicht richtig sein. Es wird deshalb Aufgabe einer räumlichen Rechnung sein, alle Einflüsse gleichzeitig zu erfassen.

Wie sich zeigt, ist die Schubfestigkeit relativ gering, weil die Schubkräfte durch das Harz übertragen werden müssen. Da man jedoch Schubkräfte in Zug- und Druckkräfte unter  $45^\circ$  zur Richtung der

Schubkräfte zerlegen kann, legt man zweckmäßigerweise zur Aufnahme des Schubs Gewebe mit  $k_u = 0,5$  mit Fadenrichtungen unter  $45^\circ$  zur Richtung der Schubkräfte ein. Bei Torsionsrohren z.B. müssen die Fadenrichtungen unter  $+45^\circ$  und  $-45^\circ$  zur Axialrichtung verlaufen. Die Tordierung eines solchen AWV-Rohres liefert die Bruch-Schubspannung (Bild 8.19)

$$\hat{\tau}_B = \text{ILSS oder } \tau_{\#B} (\text{inplane}) = \frac{M_T}{A_{\text{Querschnitt}}} \quad (8.9)$$

für ein Laminat, in dem Schubspannungen in der Schichtebene (in-plane) und interlaminar auftreten.

Für das tordierte, rein umfangsgewickelte Rohr (UDV) erhalten wir wieder

$$\tau_{\#B} = \frac{M_T}{A_{\text{Querschnitt}}} \quad (8.10)$$

Der ILSS-Wert, natürlich auch  $\tau_{\#B}$ , ist sehr stark von der Harzfestigkeit, der Haftung der Faser im Harz, Luft einschließen und dem Faseranteil  $\varphi$  abhängig. Gut eingebettete Fasern ohne Luftnest zeigen späteren interlaminaren Rißbeginn. In diesem Zusammenhang ist auch das frühe Reißen des strohigen Verbundes bei hohem Fasergehalt zu sehen.

#### b) Scherfestigkeit $\tau_{11B}$

Die Ermittlung der Quer-Quer-Schubfestigkeit kann mit der Dreipunktbiegeprobe geschehen, nur daß jetzt die Fasern quer zur Balkenachse liegen.

Wie Bild 8.1 noch zeigt, kann man die Schubspannung  $\tau_{11}$  der UD-Probe in gleich große, zueinander senkrecht stehende Zug- und Druckspannungen  $\sigma_1$  zerlegen [Puck, 1968]. Da die Querdruckfestigkeit  $\sigma_{1dB}$  i.a. erheblich größer als die Querkzugfestigkeit  $\sigma_{1zB}$  ist, wird die Querkzugfestigkeit für  $\tau_{11B}$  maßgebend sein

$$\tau_{11B} < \tau_{1zB} \quad (8.11a)$$

Weiterhin stellte Daniels unter Benutzung der Hillschen Gestaltänderungshypothese für orthotropes Material fest, daß

$$\frac{1}{\tau_{11B}^2} = \frac{4}{\sigma_{1zB}^2} - \frac{1}{\sigma_{1dB}^2} \quad \text{bzw.} \quad \tau_{11B} = \frac{\sigma_{1zB}}{\sqrt{4 - \sigma_{1zB}^2 / \sigma_{1dB}^2}}$$

ist, was für kleine Quotienten  $\sigma_{1zB} / \sigma_{1dB}$  eine untere Grenze

$$\tau_{11B} \geq \frac{\sigma_{1zB}}{2} \quad (8.11b)$$

liefert. Daniels fand bei Proben von kohlefaserverstärkten Epoxidharzen  $\tau_{11B} \approx 0,7 \sigma_{1zB}$ .

Mit der vorgenannten Dreipunktbiegeprobe wurden Biege-Scherfestigkeiten ermittelt. Außerdem gibt es noch Prüfmethode, die die Zug-Scherfestigkeit oder die Schneidscherfestigkeit (Bild 8.16) ermitteln.

#### 8.2.4. Biegefestigkeit $\sigma_{11bB}, \sigma_{1zbB}, \hat{\sigma}_{zbB}$

Bei UDV wie auch bei Laminaten können senkrecht zur Schichtebene sich ändernde Eigenschaftswerte (bedingt durch unterschiedliche Faserverteilung, Aushärtung, ~~stiff~~ kleinste Anfangsdelaminationen usf.) im <sup>Druck- und</sup> Zugversuch nur ungenügend erfaßt werden. Die Auslegung einer biegebelasteten Schichtplatte - mit  $z_{11}\sigma_z$  für die Zugseite und  $z_{11}\sigma_d$  für die Druckseite - führt zu ungünstigerer Auslegung, zumindest bei Kurzzeitbelastung, da in der Regel  $\sigma_{dB} < \sigma_{zB}$  ist. Nach DIN 53452 wird die Biegefestigkeit an einem Flachstab (Bild 8.16) gemessen, der so lang ist, daß der Schubverformungseinfluß unbedeutend ist und vor allem keine Schubbrüche auftreten. Als Wert ergibt sich allgemein

$$\sigma_{bB} = \frac{3 P_b l_s}{2 b t_v^2} \quad (8.12)$$

Der Vollständigkeit halber sei noch die Verschiebung unter der Last P angegeben

$$\delta = \frac{P l_s^3}{48 E J} = \frac{P l_s^3}{4 E b t_v^3} \quad (\text{ohne Verformungsweichheit der Maschine}).$$

(Bei der Feststellung der Biegefestigkeit ist auf die Ausrichtung der Elastizitätsachsen der Probe zu achten (s. [Halpin et al.], STP 460).

#### 8.2.5. Schichtfolge und Freier-Rand-Effekt

Verschiedene Untersuchungen zeigen, daß die statische Festigkeit und auch die Schwingfestigkeit unsymmetrischer, aber auch symmetrisch aufgebauter, orthotroper Laminat vom Schichtaufbau abhängen.

Eine Erklärung dieser Versuchsergebnisse kann nur mit Hilfe der dreidimensionalen Elastizitätstheorie gewonnen werden, in der die interlaminaire Zugspannung  $\sigma_z$  und die interlaminaren Schubspannungen  $\tau_{zx}$  und  $\tau_{zy}$  vorkommen (Bild 8.20;  $\sigma_z$  fehlt allerdings darin).

Whitney geht für eine Abschätzung der Spannungen  $\sigma_z$  und  $\tau_{zx}$  von den Gleichgewichtsbeziehungen

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (8.13)$$

aus. Es sei hier nur auf seinen Aufsatz in [ASTM/STP 460] verwiesen.

Besondere Bedeutung hat der freie Randeffekt für die Zugproben von Laminaten. In der Dissertation Puck ist das Verformungsverhalten einer dreischichtigen Zugprobe dargestellt, womit man sich die Wirkung der Spannungen  $\sigma_z$  und  $\tau_{zx}$  erklären kann (Bild 8.21).

Bei zweischichtigen AWW-Proben zeigt Petit [STP 460], daß in den einzelnen Schichten aus Kompatibilitätsbedingungen entgegengesetzte Schubspannungen  $\tau_{xy}$  (in der Schichtebene) vorhanden sind (Bild 8.22). Aufgrund der Zuordnung der Schubspannungen müßten aber auch an einem freien Rand Schubspannungen vorliegen, was dort naturgemäß nicht möglich ist (Bild 8.23). In einem Randbereich von ungefähr der Erstreckung, wie die Probe dick ist, gelten also einige Annahmen der Theorie zweidimensionaler Flächenträger nicht mehr. Es sollten deshalb breite Proben verwendet werden, bei denen dieser Einfluß zurückgeht. Welche Verteilung die interlaminaren, ebenfalls bruchverantwortlichen Normalspannungen  $\sigma_z$  haben, zeigen Pagano/Pipes für ein achtschichtiges Laminat in Bild 8.24. Die Schichtfolge (stacking sequence) bestimmt die maximale Größe von  $\sigma_z$ .

Spannungen  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{xy}$  und  $\sigma_x$  am Rand einer Zugprobe zeigte schon Bild 8.20. Man sah, daß die Spannungen  $\tau_{xy}$  und  $\sigma_x$  weiter innen wieder nach der Membrantheorie geschichteter Faserverbunde berechnet werden können. Hiermit sicherlich zu verbinden ist, daß das durch den Randeffekt bedingte Eintreten von Delamination in einachsialen Zugproben nicht immer einen Einfluß auf die Restfestigkeit nach einer Anzahl von Lastzyklen hat.

Von großem Interesse ist der Randeffekt bei Löchern oder Ausschnitten in Strukturen sowie bei Sandwichträgern [Whitney]. Pipes u.a. beschreiben in STP 521 die bei Zugproben mit dem Randeffekt auftretenden Bruchfälle.

### 8.2.6. Das "Knie" im Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Bildes 8.25 wird der Zusammenhang zwischen der von einem mehrschichtigen Gewebe-Laminat aus GFK aufgenommenen Zugkraft und der gemessenen Dehnung dargestellt (aus [Schönewald]).

Bei kleinen Spannungen sind Spannung und Dehnung zunächst einander proportional. Bei einer Dehnung von etwa 0,3% (die Bruchdehnung des GFK liegt bei 1,5 bis 2%) setzt die Rißbildung in der Querschicht ein. Die Kurve zeigt an dieser Stelle einen Knick ("Knie"). Dieser Knick ist das Resultat einer Überdehnung der querbelasteten Schicht ( $\epsilon_1 > \epsilon_{1zB}$ ) mit nachfolgender Rißbildung. Dabei kann man näherungsweise die Faser als starr ansehen, so daß bei 70% Faservolumenanteil und idealer Faserpackung, ohne Berücksichtigung von speziellen Dehnungsspitzen im Verbund, die restlichen 30% Harzvolumenanteil die volle Dehnung allein aufnehmen müssen.

Sobald die Dehnung die zum Auftreten des Knies nötige Dehnung überschreitet, entstehen mit weiter zunehmender Dehnung laufend Risse, die sich durch ein Knistern im Laminat ankündigen. Man bezeichnet deshalb das Knie auch als Knistergrenze.

Mit zunehmender Belastung nähert sich die Kurve immer mehr der Spannungs-Dehnungs-Durve, die dem Deformationsverhalten der Längsschicht allein entspricht. Die gesamte Querschicht ist dann zerstört und die Last wird im wesentlichen nur noch von der Längsschicht getragen. (Im Bild 8.25 ist dieser Punkt noch nicht erreicht).

Bei Entlastung der Probe ergibt sich eine bleibende Dehnung  $\epsilon_{bl} = 0,03\%$ , die im wesentlichen dadurch verursacht wird, daß sich die Risse nicht mehr ganz schließen und daß örtliche plastische Verformungen in der Querschicht auftreten. Belastet und entlastet man ein zweites Mal (2. Zyklus) bis zur gleichen Höchstlast wie im 1. Zyklus, so erhält man kein Knie mehr. Die Fläche, die von der Be- und Entlastungskurve des 2. Zyklus umrandet ist, ist durch viskoelastisches Verhalten (s. auch Abschnitt 8.2) des an der Verformung beteiligten Harzes bedingt: darauf deutet auch hin, daß die zunächst bei der Last Null noch vorhandene Dehnung nach kurzer Zeit verschwindet. Die Glasfasern verformen sich in dem vorliegenden Belastungsbereich rein elastisch.

Die Differenz der Verlustarbeiten des 1. und des 2. Zyklus, die sich im Diagramm als die von den Belastungskurven des 1. und 2.

Zyklus und der Dehnungsachse eingeschlossenen Fläche darstellt, ist ein Maß für die - infolge Schädigung des Laminats - auftretende Verlustarbeit (der Leser vergleiche auch mit [Puck, 1967, Teil 3] und der Dissertation Puck). Die Bezeichnung "Schädigungs-Hysterese" statt Verlustarbeit ist nicht ganz korrekt, da Hysterese streng genommen nur das zeitliche Zurückbleiben der Dehnung hinter die sie verursachende, veränderliche Spannung bezeichnet. Eine Folge der Hysterese bei viskoelastischen Stoffen ist eine Verlustarbeit. Die Schädigungs-Verlustarbeit ist aber nicht Folge einer Hysterese.

Von theoretischer Seite wäre es zur Steigerung der Reißgrenze bei Faserverbunden wünschenswert, eine Faser zu haben, bei der  $E_{F_1} \ll E_F$  ist, wobei also die Faser zur Dehnungsaufnahme mit beiträgt. Ebenfalls erwünscht wäre eine Matrix, die bei gleichem E-Modul eine elastische Dehnung von größer 10% erreicht und die außerdem gut an der Faser haftet [Puck, 1968].

#### 8.2.7. Spannungszustand bei kurzen Fasern (Zugbelastung)

Wegen des Auftretens von Faserbrüchen und infolge des ständigen Vorhandenseins endlicher Faserlängen muß man das Lastübertragungsverhalten studieren. Dabei kann man in der Regel von der Tatsache ausgehen, daß die Bruchdehnung der Matrix immer erheblich größer als die der Faser ist [Ehrenstein, 1970]. Eine große Bruchdehnung der Matrix muß zur Erzielung hoher  $\sigma_{\perp zB}$  - und  $\sigma_{\parallel zB}$  -Werte bei kontinuierlichen Fasern wie diskontinuierlichen Fasern oder Kurzfasern sogar gefordert werden.

Theoretische Betrachtungen über die verstärkende Wirkung diskontinuierlicher Fasern ergeben, daß nicht die absolute Faserlänge, sondern das Verhältnis einer kritischen Länge  $l_c$  zum Durchmesser ein wesentlicher Faktor für die Kraftübertragung im Verbundwerkstoff ist und daß Kurzfaserverbunde, je nach dem  $l/d$ -Verhältnis und der verwendeten Matrix, bis zu 90% der Kurzzeitfestigkeit von Endlosfaserverbunden erreichen könne.

Das Gleichgewicht an einem Faserende, das in einem zugbelasteten Verbundbauteil liegt, kann nach [Riley] durch die einfache Beziehung (Bild 8.26, Faser starr)

$$\sigma_F \frac{\pi d^2}{4} = \pi d \int_0^{l_c/2} \tau_m(x) dx = \pi d \int_0^{l_c/2} \tau_m \left(1 - \frac{x}{l_c}\right) dx$$

beschrieben werden. Damit ergibt sich das kritische Verhältnis einer Faser, ab dem der volle Lastanteil erst aufgenommen ist, unter der groben Annahme des linearen Schubspannungsabfalles vom Faserende her, zu (s. auch [Dietz, S. 128])

$$\frac{l_c}{d} \approx \frac{\sigma_{Fz}}{2\tau_M} \quad , \quad (8.14)$$

wobei  $\tau_M$  die Fließspannung (bei sehr kurzen Belastungen nach Meinung des Verfassers auch Werte größer als die Fließspannung einsetzbar) und  $\sigma_{Fz}$  die Faserbruchspannung ist. Wie das Zug- und das Schubspannungsverhalten bei verschiedenen Faserlängen aussieht, zeigt Bild 8.27.

In Wirklichkeit hängt das kritische Verhältnis  $l_c/d$  auch vom unterschiedlichen elastischen Verhalten von Faser und Matrix ab. Unter Berücksichtigung dieser Erkenntnis erhielten Schuster/Scala für eine einzelne Borfaser in einer Harzmatrix ( $E_F/E_M = 125$ ) für  $l_c/d=20$  dieselbe Zugspannung wie im endlosen Faden.

Im Fall vieler kurzer Fasern untersuchten sie die Überlagerung der Spannungskonzentrationen mehrerer Faserenden als Funktion des Faserabstandes und der Überlappung. Überlappen sich Fasern innerhalb der halben kritischen Distanz  $l_c$ , so entstehen Schubspannungskonzentrationen, die zu lokalem Fließen und Faserablösung führen. In spröden Harzen liegen dort die Stellen der Rißentstehung.

Schuster/Scala geben in ihrem Aufsatz weiterhin an, daß in dem von ihnen betrachteten Fall (Borfaser) die Faserenden sich nicht mehr beeinflussen, wenn sie mehr als sechs Faserdurchmesser voneinander entfernt waren.

Geiger/Füller führen für Kurzfaserverbund an, daß zumindest bei zügiger Kurzzeit-Beanspruchung die Verbundfestigkeit bis zu höheren Temperaturen nicht so schnell beeinflußt wird, auch wenn die Matrix schon wesentlich an Festigkeit verloren hat (zum Kriechen ist Zeit notwendig).

Fukuda/Kawata untersuchten theoretisch und experimentell eine Einzel faser und eine bestimmte Mehrfaseranordnung. Dabei stellten sie unter anderem für  $l_c/d = 100$ ,  $E_F/E_M = 10$  und  $\nu_M = 0,3$  einen Abfall des E-Moduls (Kurzzeit-Zugbelastung) von 5 bis 8% fest.

### 8.3. Statische Festigkeit

#### 8.3.1. Kurzzeitfestigkeit

Bauteile, die nur für eine kurze, hohe Beanspruchung auszulegen sind, werden mit im Kurzzeitversuch ermittelten Festigkeitswerten dimensioniert. Dazu werden Proben nach Abschnitt 8.2 zügig belastet.

Man nennt die unter solchen Bedingungen erhaltenen Werte Kurzzeitfestigkeitswerte. Sie stellen die obere Grenze der Festigkeitswerte des Schwingfestigkeitsbereichs dar, der in Abschnitt 8.4 beschrieben wird.

#### Auswirkung der Viskoelastizität

Bei Faserverbund-Werkstoffen besteht in der Regel keine Proportionalität zwischen Spannung und Verformung. Das gilt sowohl für die Werte  $\sigma_M$  und  $\tau_M$  der Harzsysteme, für die  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \tau_{*}$  beim Kurzfaserverbund wie auch bei kontinuierlichen Glas-, C-, Bor und Kevlarfasern für  $\sigma_{11}$  und  $\tau_{*}$ . Die Nichtlinearitäten (Bild 8.25) geben im wesentlichen das viskoelastische Verhalten des Harzsystems wieder, das man qualitativ mit dem Verhalten eines Modells aus zwei Federn und einem Dämpfungsglied nach Bild 8.28 beschreiben kann. Dieses Verhalten drückt sich [Puck, 1965] darin aus, daß der Verlauf der  $\sigma$ - $\epsilon$ - bzw.  $\tau$ - $\gamma$ -Kurven von den Verformungsgeschwindigkeiten  $d\epsilon/dt$  bzw.  $d\gamma/dt$  abhängt.

Die im allgemeinen verwendeten Sekantenmoduln  $E_S = \sigma/\epsilon$  und  $G_S = \tau/\gamma$  sind also sowohl von der Spannung oder Verformung als auch von der Zeit abhängig. Ferner fallen Belastungskurve und Entlastungskurve nicht zusammen, und wir erhalten für die gleiche Dehnung bei Entlastung einen kleineren Sekantenmodul als bei Belastung.

#### Auswirkung von Kerben

Schon bei Verwendung statischer Festigkeitswerte muß die Gestalt des Bauteils beachtet werden, so wenn plötzliche Querschnittsänderungen, Nuten, Bohrungen, Kehlen, Riefen, Löcher vorliegen (bei der Schwingfestigkeit sind diese Unregelmäßigkeiten von noch größerem Einfluß). Es gilt also die Gestaltfestigkeit eines Bauteils nachzuweisen.

Entsprechend dem Auftreten von glatten, stark und schwach gekerbten, sowie etwaigen angerissenen Stellen in einem Bauteil wird man Festigkeitswerte zur Berechnung des Bauteils allgemein mit glatten,



gekerbten und angerissenen Proben ermitteln.

Bei jeder Belastung zeigen sich Unregelmäßigkeiten im Bauteil als Stellen örtlich begrenzter Spannungskonzentration. Die an diesen Stellen zu berücksichtigenden Spannungskonzentrationsfaktoren  $K_T$  werden unter der Annahme berechnet, daß an diesen Stellen das Material bei der Beanspruchung elastisch geblieben ist. Die Zahlenwerte von  $K_T$  hängen somit von der Lastart und der Bauweise ab.

Die Auswirkung konstruktiv bedingter Kerben unter statischer Beanspruchung (Fliehkraft als quasistatisch mit eingeschlossen) ist bei Vorhandensein von genügend weniger belastetem und verformungsfähigem Material so, daß die theoretische Spannungsspitze [Dietmann]

$$K_T = \alpha_k \sigma_N$$

$\alpha_k$  = Formzahl

$\sigma_N$  = Nettospannung

durch Fließen des Materials abgebaut wird. Dabei bleiben, bei Vorhandensein ausreichender "Stützwirkung" der elastischen Umgebung, der Fließbereich und die plastische Verformung begrenzt.

In einigen Fällen sind Angaben über die Größe dieses Faktors auf die tatsächlichen Flächen (Netto) bezogen, während sie in anderen Fällen auf die Nennflächen der Proben bezogen (Brutto) sind und dabei eine Flächenreduktion, wie sie von der Spannungserhöhung herührt, vernachlässigen. Wenn man Tabellen- oder Kurvenverläufe von Spannungskonzentrationsfaktoren verwendet, muß man die Basis, auf die sie bezogen worden sind, beachten (Bild 8.29). Das Bild zeigt auch den stromlinienangepaßten Kraftverlauf um die Bohrung.

Bei der Anwendung auf Faserverbund sind einige abweichende Eigenschaften zu bemerken:

Als wesentliches Ergebnis stellten Waddaps u.a. für Zugproben mit Loch eine große Abhängigkeit von der Lochgröße fest (Tabelle 8.2). Bei Bohrungen in Faserverbundbauteilen ist somit eine wesentliche Abnahme der Festigkeit zu verzeichnen.

Durch Bild 8.30 wird für eine bestimmte Probe mit Loch gezeigt, welchen Einfluß der Faserwinkel und das Loch haben. Weiter zeigt ~~in~~ Bild 8.31, wie sich die Spannungen bei einer Zugprobe an einem Kreisloch und vergleichsweise an einem elliptischen Loch konzentrieren. Durch Bild 8.32 wird dem Leser mitgeteilt, daß die Stelle der Spannungskonzentration bei Faserorientierungswinkeln zwischen  $0^\circ$  und  $60^\circ$  nicht an der üblichen Stelle (quer zur Zugkraft liegt, jedoch die voraussichtliche Bruchstelle im Bereich  $\alpha = 0^\circ$  bleibt

(Einfluß von  $\sigma_{23}$ ).

Laut Freeman/Kuebeler kann die Kerbempfindlichkeit am besten durch Verwendung einer Matrix hoher Dehnfähigkeit verringert werden. Es führt <sup>aber</sup> auch eine Verringerung der Verbundschubfestigkeit bzw. der Faser-Matrix-Adhäsion zu einer kleineren Kerbempfindlichkeit, wobei <sup>jedoch</sup> unerwünschte Eigenschaftsänderungen des Werkstoffs mit <sup>Verbund-</sup>inkauf genommen werden müssen.

In einigen Bildern und Tabellen war eine Abhängigkeit der Festigkeit von der Größe der Löcher festzustellen [Cruse]. Dieses Phänomen kann nicht durch die Spannungskonzentration erklärt werden. Cruse liefert für kleine Löcher eine physikalische Erklärung mit Hilfe der Rißbruchmechanik. Er sagt:

Im Material vorliegende Mikrorisse bestimmen die Festigkeit des ungekerbten Faserverbundes, während eingebaute Risse, die größer als die Mikrorisse sind, dann ihrerseits für den Bruch verantwortlich sind. Bei großen Rissen wird die Festigkeit von den Spannungskonzentrationen und der Nennspannung bestimmt.

Geht man von einem mittleren Faserabstand  $x_1$  aus, so kann man gewiss Bereiche mit Hilfe des Bildes 8.33 abschätzen. Für Werte  $x_1/a \approx 0,01$  gehorcht der Faserverbund im Nahbereich des Risses dem Verhalten bei Spannungskonzentrationen. Sind bei gleichem  $x_1$  die Längen  $2a$  bzw. die Lochdurchmesser größer, hier  $x_1/a \approx 0,07$ , so gilt nur mehr die Rißtheorie. Wenn das Loch bzw. der Riß noch kleiner werden,  $x_1/a > 1$ , dann wird schließlich (im Mikrorißbereich,  $2a =$  Mikrorißlänge) die übliche statische Festigkeit  $\sigma = K_a \sqrt{r_0}$  erreicht (vgl. [Zweben, STP 521]).

Zum Vergleich ist aus Bild 8.32 noch ersichtlich, daß beim Idealriß mit der erheblich höheren Spannungskonzentration (theoretisch unendlich) die Spannungsspitze schneller abgebaut wird.

Liegt ein Anriß in einem fließfähigen Bauteil unter statischer Beanspruchung vor, so braucht in der Regel nur der Einfluß des verringerten Querschnittes berücksichtigt zu werden!

### 8.3.2. Langzeitfestigkeit, Zeitstandfestigkeit

Bei der Auslegung von Bauteilen hoher Gebrauchsdauer aus Kunststoffen und Faserverbundwerkstoffen ist die Kenntnis des Langzeitverhaltens notwendig. Dabei kann die Umgebung einen großen Einfluß auf das Langzeitverhalten haben. Man spricht dann von einem Altern des Werkstoffs. Tabelle 8.3 zeigt die Ursache, die Vorgänge und die Erscheinungen der Alterung.

Zur Feststellung der zeitabhängigen Werkstoffänderungen werden zwei verschiedene Versuche vorgenommen (Auszug aus [Woebcken]): Beim Zeitstandversuch (Kriech- oder Retardationsversuch) wird die Probe durch eine ruhende Kraft beansprucht und die entsprechende Verformung laufend gemessen; beim Entspannungsversuch (Relaxationsversuch) wird der Probe eine zeitliche konstant gehaltene Verformung aufgezwungen und die Abnahme der Spannung gemessen (Bild 8.34), wobei darauf geachtet wird, daß ungewollte Alterungseinflüsse ferngehalten werden.

Man bedient sich zur Beschreibung der Zusammenhänge zwischen Spannung, Dehnung, Zeit und Temperatur verschiedener Darstellungsarten, Bilder 8.35 I bis IV. Infolge der Belastung können Kunststoffe unter Zeiteinfluß kriechen, so daß sich die Werte der Dehnung mit zunehmender Zeit erhöhen. Man ermittelt die Dehnwerte in Abhängigkeit von der Zeit und trägt sie in doppelt-logarithmischer Darstellung mit der Spannung als Parameter auf, Bild I. Es liegen heute zahlreiche Veröffentlichungen über die Zeitdehnlinien bei verschiedenen Faserkunststoffen vor, z.T. auch in Abhängigkeit von der Temperatur bei konstant gehaltener Spannung. Aus solchen Untersuchungen ermittelt man durch Umzeichnen die Darstellung in Bild II mit den isochronen Spannungs-Dehnungs-Linien bei linearer Teilung der Koordinaten. Hierbei wird die Zeit als Parameter gewählt. Unter Umständen kann es sinnvoll sein, die Spannung bei konstanter Zeit in Abhängigkeit von der Umgebungstemperatur aufzutragen.

Wegen der Abhängigkeit der Dehnungswerte  $\epsilon$  von der Zeit  $t$  ist auch der Elastizitätsmodul zeitabhängig; man spricht vom "Kriechmodul"  $E_c$ . Sofern im Entspannungsversuch bei gleichbleibender Dehnung die zeitabhängige Spannung  $\sigma$  ermittelt wird, spricht man vom zeitabhängigen "Entspannungsmodul"  $E_r$ . Es gilt:

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma}{E_c(t)} \quad \text{oder} \quad \gamma(t) = \frac{\tau}{G_c(t)}, \quad (8.16)$$

sowie

$$\sigma(t) = \epsilon(t)E_r(t), \quad \tau = \gamma(t)G_c(t).$$

Die Kriechmodullinien sind in Bild III wiedergegeben, und zwar mit der Spannung als Parameter. Die Darstellung ist üblicherweise wieder doppelt-logarithmisch. Auch hier kann bei konstanter Spannung die Temperaturabhängigkeit durch eine Kurvenschar dargestellt werden. Die statischen Berechnungen sind mit Hilfe dieser zeitabhängi-

gen Kriechmodullinien in gleicher Weise wie bei anderen statischen Berechnungen möglich.

Schließlich findet man bei den Werkstoffen Beschreibungen durch Zeitstandschaubilder gemäß Bild IV. Die beiden Achsen sind wieder doppelt-logarithmisch geteilt, die Dehnung wird als Parameter an die Kurvenschar geschrieben. Die Kurvenscharen sind die Zeitbruchlinien. Es ist für die Bemessung der Konstruktionen wichtig, in diesen Zeitstandschaubildern auch die zulässigen Dehngrenzlinien einzutragen, falls sie ermittelt sind.

Das plastische Weiterverformen unter ruhender Last wird Kriechen genannt.

Unter Zeitstandfestigkeit versteht man die ruhende Spannung, die nach bestimmter Belastungszeit zum Bruch führt, z.B.

$$100 \sigma_{B/10.000} = 5 \text{ N/mm}^2 \quad (100 \text{ }^\circ\text{C}, 10\,000 \text{ h}).$$

Die Zeitstandkriechgrenze (kurz: Zeitkriechgrenze) ist die ruhende Spannung, die bei bestimmter Temperatur nach bestimmter Belastungszeit einen bestimmten Kriechbetrag bewirkt, z.B.

$$80 \sigma_{1/50.000} = 1 \text{ N/mm}^2 \text{ für eine Kunststofffaser (Kriechbetrag } \epsilon_{bl} = 1\%).$$

Je nach Beanspruchungsart wird die Silbe "kriech" durch "dehn", "stauch", "biege" usw. ersetzt, z.B. die Zeitstauchgrenze  $550 \sigma_{1/1000} = 12 \text{ N/mm}^2$  (bei  $550 \text{ }^\circ\text{C}$  nach 1000 h 1% bleibende Stauchung).

Eine Langzeitbelastung hat wesentlichen Einfluß auf die Ausführung eines Bauteils. Die Größe dieses Einflusses hängt vom Faserverbundwerkstoff, der Faserorientierung, der auferlegten Spannung und dem Temperaturniveau ab [Soliman].

Spannung und Temperatur sind die Haupteinflußgrößen auf das Kriechen, was sich am stärksten bei Nichtvorhandensein von Fasern in der oder den Belastungsrichtungen auswirkt.

Um den Aufwand relativ niedrig zu halten, weil man ja nicht erst Ergebnisse abwarten kann, die in 5 oder 10 Jahren da sein werden, einigt man sich auf einen Kompromiß. Für GFK-Werkstoffe empfehlen Schlehöfer/Mishra den 1000 h-Versuch. Man steht dabei vor dem Problem der Übertragbarkeit des Kurzzeitkriechtestes auf den Langzeitkriechtest (vgl. [Domke, S 345]).

In den Kriechbildern (Bild 8.36) für die einachsigen Zugproben erscheinen i.a. nur zwei der drei Kriechbereiche, wenn man sich auf Kurzzeitkriechversuche beschränken muß: das sehr schnelle Anfangskriechen, während des ersten Bereichs, und das verhaltene Kriechen des zweiten Bereiches. Das beschleunigte Kriechen im Endbereich kann dann kaum mehr festgestellt werden und wenn, dann nur bei einem relativ hohem Spannungsniveau (Bild 8.37).

Das Zeitstandverhalten der Kunststoffe wird vorzugsweise bei Zugbeanspruchung untersucht, falls bei dieser Art von Belastung die Probekörper sicher brechen oder fließen.

Als Versuchsform schätzen Schlehöfer/Mishra den Zeitstand-Biegeversuch bei UDV und geschichteten Laminaten, da bei FK die Biegeprobe zumeist stärker als die Zugprobe kriecht. Verglichen wird dabei der Quotient aus Biegebruchfestigkeit /Zeitstandfestigkeit unter Biegung mit dem Quotienten aus Zugfestigkeit/Zeitstandfestigkeit bei Zug. Die Biegebruchfestigkeit ist in der Regel größer als die Zugfestigkeit. Eine Erklärung dafür liegt darin, daß der Querschnitt der Biegeprobe praktisch nicht eben bleibt.

Nach längerer Belastungszeit kann eine bleibende Dehnung festgestellt werden, die dann auf die Matrix zurückzuführen ist. Hochfeste Kohlenstoffasern kriechen hingegen kaum, so daß in einem UDV-CFK unter Zug praktisch ( $\epsilon < 0,05$ ) keine bleibende Verformung erkennbar ist.

Welche unterschiedlichen Kriechneigungen bei den verschiedenen Verstärkungsmaterialien vorliegen, wird in Bild 8.38 für Glas gezeigt.

Aus [Hintersdorf] ist für das Verstärkungsmaterial Glas die unterschiedliche Kriechneigung für Zug, Druck und Schub zu entnehmen (Bilder 8.39).

Von Neitzel sei noch für Mattenlaminat ein isochrones Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Bild 8.40) und ein Zeitstand-Schaubild (Bild 8.41) angegeben.

Welche bezogenen Zeitstandfestigkeiten vergleichsweise S-Glas und Kevlar haben, wird durch Bild 8.42 deutlich gemacht.

Chiao/Wells u.a. stellten fest, daß Kevlar 49 III-Fasern eine Überlebenswahrscheinlichkeit von 90% bei 10 Jahren und  $\sigma_F = 2200 \text{ N/mm}^2$  haben (Bild 8.43).

Das Kriechen von Kevlar verläuft nach Tabelle 8.4 erheblich langsamer als bei GFK. CFK ist extrem kriechwiderstandsfähig, wenn endlose Fasern in Lastrichtung liegen.

Soliman stellte fest, daß die Kriechbruchdehnung bei niedriger Spannung und langer Beanspruchungszeit größer als bei hoher Spannung und kurzer Beanspruchungszeit ist (vgl. Aussage von Menges u.a.).

Temperaturerhöhungen führen infolge besseren Kriechvermögens der Matrix zu erhöhtem Kriechen.

### Erholungsverhalten

Zum Schluß dieses Abschnittes sei noch kurz auf das Erholungsverhalten eingegangen (nicht mit Relaxation bei  $\epsilon = \text{const.}$  zu verwechseln).

Dölfen versteht unter Erholung die Neigung eines kriechenden Werkstoffs in (längeren) Entlastungsperioden zeitabhängige Verformungen abzubauen und dadurch ein besseres Festigkeitsverhalten als ohne zeitweise Entlastung anzunehmen. Infolge dieser Erholung werden bei neuerlicher Belastung entweder geringere Dehnungen oder längere Belastungszeiten bis zum Versagen als sonst erreicht.

Skupin stellte für unverstärktes Epoxidharz bei gleich langen Be- und Entlastungszeiten immer noch einen stetigen Anstieg der Verformungen bei jeder Belastungsperiode fest. Für GFK (und andere Faserverbunde) ergibt sich je nach der Faserverstärkung jedoch ein besseres Verhalten.

Selbstverständlich kann die mit dem Erholungsverhalten verknüpfte Rückfederung durch bleibende Dehnungen infolge Schädigungen~~en~~ überlagert werden.

## 8.4. Schwingfestigkeit

### 8.4.1. Allgemeines

Schwingbeanspruchte Bauteile werden häufig auf Dauerfestigkeit dimensioniert. In diesem Fall darf die im Betrieb entstehende Spannung nicht die Dauerfestigkeitsgrenze der Werkstoffe erreichen bzw. überschreiten (Auszug aus [Hoffer]). Im Leichtbau ist dieses Prinzip nicht verwendbar, da dort die Beanspruchungen in der Höhe und Häufigkeit sehr verschieden sind; es ist deshalb nicht selten, daß entstehende Spannungen das Dreifache der Dauerfestigkeits-

grenze erreichen (bei Metallen) und auch erreichen dürfen (s. Abschnitt 8.4.3.).

Das Schwingfestigkeitsverhalten eines Bauteils kann von dem gewählten Werkstoff, von der Formgebung sowie von der Fertigung beeinflusst bzw. geändert werden. Bei der Auswahl der Werkstoffe soll man die folgenden wichtigen Eigenschaften ermitteln und berücksichtigen: das Schwingfestigkeitsverhalten, die Rißfortpflanzung, die Restfestigkeit und die Spannungsriß-Korrosionseigenschaften.

### Versuche

Um das Schwingfestigkeitsverhalten eines Werkstoffes zu ermitteln, müssen Versuche mit Bauteilen oder mit für die Bauteile repräsentativen Probestäben durchgeführt werden. Da die Betriebsbeanspruchungen in Höhe und Häufigkeit fast immer verschieden sind, ist es notwendig, die Zeit-, Betriebs- und Dauerfestigkeit bei verschiedenen Mittelspannungen zu ermitteln. Kommen im Betrieb z.B. korrosive Angriffe oder erhöhte Temperaturen vor, so muß man diese Einflüsse bei den Versuchen berücksichtigen, d.h. simulieren.

Die Anzahl der einzelnen Probestäbe soll so gewählt werden, daß die Streuung - ein charakteristisches Merkmal des Schwingfestigkeitsverhaltens - auch ermittelbar ist [Hoffer].

Zu untersuchende Spannungsgrößen sind Normal- und Schubspannungen. Die Proben können normalbeansprucht, biegebeansprucht und schubbeansprucht sein. Geprüft wird im Wechsel- und im Schwellbereich (Bild 8.44).

Die Schwingfestigkeitsversuche werden in Versuche mit konstanter Amplitude (dazu gehören die Einstufenversuche von Wöhler) und in Versuche mit veränderlicher Amplitude aufgeteilt (dazu gehören Programmversuche, sowie Versuche mit Zufallsfolgen [HSB 61 111-01]).

Betriebsschwingfestigkeitsversuche sind Versuche mit experimentell ermittelten Betriebsbeanspruchungskurven, die auf eine programmgesteuerte Prüfmaschine gegeben werden.

Wie bei den statischen Versuchen liegen auch hier glatte, schwach und stark gekerbte und angerissene Proben vor. Die in der Regel z.B. im Flugzeugbau vorkommenden Formzahlen liegen zwischen 2 und 5. Vom Industrieausschuß für Strukturberechnung wird vorgeschlagen,

Schwingfestigkeitskurven für die Formzahlen  $\alpha_k = 1; 2; 2,5; 3,6; 5,2$  aufzustellen.

Alle Versuche mit ungekerbten, gekerbten und angerissenen Proben dienen, laut Dietmann, letztlich dazu, das Festigkeitsverhalten von Bauteilen zu erfassen, mit und ohne Einfluß von Kerben und Rissen. Dabei muß eine Übertragbarkeit der experimentellen Ergebnisse von Proben auf das Bauteil gegeben sein. Erst damit ist eine Aussage zur gesuchten Zeit- (Dauer-)festigkeit des fertigen Bauteils, der sogenannten Gestaltfestigkeit, möglich.

Das Schwingfestigkeitsverhalten wird aber nicht nur an einfachen Proben eines Werkstoffs untersucht. Daneben werden ebenso Verbindungen wie Niet- und Klebeverbindungen und schließlich ganze Bauteile geprüft.

Die Beeinflussung der Versuchsergebnisse erfolgt durch eine Vielzahl von Faktoren [Hintersdorf], wie

- Aufbau des Werkstoffes (Harzart, Fasergehalt, Art des Verstärkungsmaterials);
- Art der Beanspruchung;
- Form der Probekörper;
- Höhe der Lastspielfrequenz;
- Prüftemperatur;
- Lagenaufbau (symmetrisch oder nicht).

Die Problematik bei Schwingfestigkeitsversuchen beginnt häufig damit, daß aus Zeitmangel die Prüffrequenz zu hoch angesetzt wird. Die in den USA im allgemeinen üblichen 30 Hz bei Schwingfestigkeitsuntersuchungen liefern andere Werte als Vergleichsuntersuchungen bei 45 Hz und 15 Hz [Rifsnider].

Bei hohen Frequenzen kann man nicht mehr von isothermen Verhältnissen ausgehen, so daß das Bruchverhalten auch thermische Gründe haben kann [Dharan]. Bei niedrigen Frequenzen haben die Werkstoffe mehr Zeit zum Verformen (Fließen). Die Tendenz ist, wie man bei Dharan und auch sonst der Literatur entnehmen kann, daß Frequenzen kleiner 5 Hz gewählt werden, wenn Faserverbunde geprüft werden. Kunz/Beaumont wählten 1 und 3 Hz.



## Auswirkung der Spannungskonzentrationen

Die Auswirkungen von Spannungssitzen bei wechselnder Belastung sind ungleich gefährlicher als bei zügiger Beanspruchung. Bei wechselnder Beanspruchung tritt infolge der dauernden Wechsel der Lastrichtung und Größe kein Ausgleich der Spannungsspitzen, sondern eine Zerrüttung des Werkstoffes ein. Man definiert eine Formziffer (für die Kerbwirkung) = theoretische Ziffer (allerdings beschränkt auf den elastischen Deformationsbereich der Werkstoffe):

$$\text{Formziffer } \alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} = \frac{\text{Spannungsspitze}}{\text{Nennspannung}}$$

Eine Gegenüberstellung der Kerbwirkungen sieht Wagner in abgekürzter Form so:

### 1. Zügige (statische) Beanspruchung

Bei zähem Werkstoff: Selbstaussgleich der Spannungsspitzen,  
bei sprödem Werkstoff: Kerbwirkung sehr gefährlich, besonders bei Stoß. Bauteile aus sehr festem (= sehr sprödem) Werkstoff sind also außerordentlich stoßempfindlich!

### 2. Wechselnde Beanspruchung

Von Kerben geht der Dauerbruch aus. Es tritt nämlich Zerrüttung (besonders bei spröden Werkstoffen) ein. Die Spannungsspitze muß allerdings eine gewisse Breite überschreiten, um wirksam zu werden (nämlich größer als das Korn (Kristall) des Werkstoffes bei Metallen sein).

Die Größe der Spannungsspitze ist von der Kerbform und Beanspruchungsart abhängig.

Die Werkstoffe zeigen verschiedene Kerbempfindlichkeit.

Man definiert eine Formziffer (für die Kerbwirkung) = praktische Ziffer.

$$\beta_k = \frac{\text{Spannungsspitze im wirklichen Werkstoff}}{\text{Nennspannung}} = \text{verschieden hohe Fähigkeit, die Spannungsspitze abzubauen}$$

( $\beta_k$  hängt von Bauteilform und Art bzw. Verhalten des Werkstoffes ab.  $\alpha_k > \beta_k > 1$ )

$\eta_k = 0$  Kerbunempfindlichkeit

$\eta_k = 1$ , größte Kerbempfindlichkeit (vollkommene Kerbempfindlichkeit) (Wirkung der Spannungsspitze)

$$\eta_k = \frac{\beta_k - 1}{\alpha_k - 1} = \text{Kerbpfindlichkeit des Werkstoffes .}$$

$$\beta_k = 1 + (\alpha_k - 1)\eta_k \quad (\text{nach Thum}).$$

Bei Dauerschwingbeanspruchung (und bei spröden Werkstoffen in allen Fällen [Dietmann]) ist die Spannungspitze mit ihrem vollem Wert entsprechend der Formzahl  $\alpha_k$  in die Festigkeitsberechnung einzusetzen.

Die Grenze zwischen statischer und schwingender Festigkeit liegt erst bei solchen Lastspielzahlen vor, wo die Tragfähigkeit abzusinken beginnt.

### Untersuchungsmöglichkeiten der Schwingfestigkeit

Bei der Ermittlung des Zeitfestigkeitsverhaltens eines Werkstoffes kann man prinzipiell (aus [Dietmann]) ein Spannungs-, aber auch ein Dehnungsverfahren anwenden. Untersuchungen haben nämlich ergeben, daß die bei jedem Lastspiel auftretende plastische Dehnung für die Werkstoffschädigung bei schwingender Beanspruchung verantwortlich ist (vgl. Bild 8.45 [Neitzel, Verbundwerkstoffe im Druckbehälterbau, 1969], Ideen von Menges u.a.). Die Gesamtdehnung resultiert in Bild 8.45 im wesentlichen aus der Geraden für die plastische Komponente. Bei höheren Zyklenzahlen wird die plastische Dehnungsamplitude vernachlässigbar klein, während dem elastischen Anteil stärkere Bedeutung wegen der geringeren Neigung der  $\epsilon_{el}$  - Linie zukommt. Der Schnittpunkt der beiden Geraden liegt für sehr viele Werkstoffe (Metalle) in der Nähe von  $10^4$  Zyklen. Man kann also bis zu  $10^4$  Lastwechseln die elastische Komponente in grober Näherung vernachlässigen, während ihr bei Zyklenzahlen von größer  $10^5$  die dominierende Rolle zufällt (aus [Neitzel]).

Von Interesse ist ein Dehnungsverfahren also vor allem im Niedriglastwechselbereich (Low Cycle Fatigue), wo große Dehnungen möglich sind. In [Krempf] wird zu den grundsätzlichen Unterschieden zwischen Spannungs- und Dehnungsverfahren Stellung bezogen.

Für viele unidirektionale Faserverbunde gilt jedoch, daß sie unter Zug und Druck im Gegensatz zu einigen Metallen nur im elastischen Bereich beansprucht werden. Damit ist auch im Niedrigzyklenbereich allein die elastische Dehnungskurve maßgebend. Anders wird das Verhalten schon unter zyklischer Zug- und Druckbelastung von Mehrschichtenverbunden sein und erst recht bei zyklischer Schubbeanspruchung von UDV und MSV.

Die Beurteilung des Beanspruchungszustandes erfolgt beim Spannungsverfahren nach der geometrisch bedingten Formzahl  $\alpha_k$  bzw. der Kerbwirkungszahl  $\beta_k$  und beim Dehnungsverfahren mit Hilfe einer Dehnungsformzahl  $\alpha'_k$ . Diese Dehnungsformzahl  $\alpha'_k$  ist analog zu  $\alpha_k$  das Verhältnis von Maximaldehnung zur lastproportionalen Nenndehnung.

An dieser Stelle sei vermerkt, daß bei geeigneten Finite-Element-Programmen die Formzahlen in den Spannungs- und Dehnungsergebnissen beinhaltet sind.

Da die Schwingfestigkeitsnachweise aus Ermangelung an ausreichenden Unterlagen noch nicht als Dehnungsnachweise durchgeführt werden bzw. werden können [Dietmann], werden nun in den beiden folgenden Abschnitten 8.4.2. und 8.4.3. die Unterlagen für einen Spannungsnachweis vorgeführt.

#### 8.4.2. Festigkeit bei konstanter Schwingungsamplitude (Einstufenversuche)

Laut DIN 50.100 werden die nach einem Wöhlerverfahren ermittelten Versuchspunkte in einem Schaubild mit logarithmisch geteilter Abszisse (Lastspielzahl) und arithmetisch geteilter Ordinate (Beanspruchung) eingetragen. Diese Punkte ordnen sich (ca. 6 Proben bei einer Belastungshöhe), wenn sie wenig streuen, zur sogenannten Wöhlerkurve (Bild 8.46).

Auf der Ordinate des Wöhlerschaubildes wird der Spannungsaus Schlag  $\sigma_a = 0,5(\sigma_o - \sigma_u)$  aufgetragen. Es muß also immer als zusätzlicher Parameter die Mittelspannung  $\sigma_m = 0,5(\sigma_o + \sigma_u)$  angegeben werden, oder das Spannungsverhältnis  $R = \sigma_u / \sigma_o$ . Für den Konstrukteur ist der Absolutwert der oberen Belastung  $\sigma_o = \sigma_m + \sigma_a = 2 \sigma_a / (1-R)$  wichtig. Die Spannungen werden auf den Nettoquerschnitt bezogen, soweit nicht die Angabe der Bruttospannung sinnvoller erscheint. Bei Angabe der Bruttospannung soll jedoch das Verhältnis von Brutto- zu Nettospannung mit angegeben werden.

In der Werkstoffprüfung ist es häufig üblich, reine Wechselbeanspruchung ( $\sigma_m = 0$ ) oder Schwellbeanspruchung ( $\sigma_m = \sigma_a$ ) zu untersuchen [Hertel]. Bei Ein- und Mehrstufenbelastungen wird die Belastung im allgemeinen sinusförmig aufgebracht.

Die Ergebnisse aus mehreren gleichartigen Versuchen streuen mei-

stens so stark, daß die Wöhlerlinie zu einem breiten Band wird (Bild 8.47), dem sog. scatter band. Aus Sicherheitsgründen ist daher eine Verwendung der Mindestwerte ratsam.

Die Beanspruchungsbereiche lassen sich in einem Haigh-Diagramm entsprechend Bild 8.48 darstellen. Dieses Diagramm eignet sich gut zur Übersicht der Sicherheitsfaktoren [Sors]. Der Zusammenhang zwischen Wöhlerlinie und Haighdiagramm ist in Bild 8.49 abgebildet.

### Versuchsergebnisse

Dharan [STP 569] teilt entsprechend seinen Versuchsergebnissen bei GFK-UDV <sup>diese in</sup> drei getrennte Schwingfestigkeitsbereiche Bild 8.50 (bei Piper ist diese Aufteilung nicht ersichtlich! Daraus kann wiederum die Problematik von Proben und Versuchsdurchführung abgelesen werden) auf, so wie es bei Metallen ebenfalls vorzufinden ist.

Das ist, laut Dharan, wahrscheinlich auf die erheblich langsamere Dehngeschwindigkeit von  $10^{-4}/s$  gegenüber  $10^{-1}/s$  bei den Schwingfestigkeitsuntersuchungen zurückzuführen. Es kann also eine Annäherung der Steigung von Bereich I an die Steigung im Bereich II vermutet werden.

Im Bereich III ist die größte Spannung nahe den Mikrorißerzeugungsspannungen. Da die wenigen Proben bei sehr niedrigen Spannungen noch nicht gerissen waren, wird hier die Feststellung von Dharan und anderen Verfassern, daß es auch für GFK-UDV unter Zug-schwellbelastung eine Dauerfestigkeit gibt, nicht widerlegt.

Welchen Bruchverlauf die Probe bei einem Ermüdungsanriß oder Fehler an der Oberfläche erfährt, zeigt Bild 8.51 von Dharan.

In den Bildern 8.52 wurden Wöhlerkurven für zwei Verstärkungsarten für Zug-Schwellbelastung, Zug-Druck-Wechselbelastung und Biege-Wechselbelastung zusammengestellt.

Zusätzliche Kurven sind in [Hintersdorf], [Dolfen] und [Hertel , Ermüdungsfestigkeit] zu finden.

Nach Müller, der Versuche bis zu  $N = 10^9$  bei Zug durchgeführt hat, ist für GFK der Begriff Dauerschwingfestigkeit gerechtfertigt. Allerdings ist diese bei  $N = 10^7$  noch nicht erreicht. Versuche bis in den Bereich der Dauerschwingfestigkeit sind bei Kunststoffen deshalb sehr aufwendig, weil die Prüffrequenzen wegen der hohen Dämpfung und der damit verbundenen Temperaturerhöhungen sehr niedrig

gehalten werden müssen. Andernfalls verursacht die Temperatur allein bereits ein vorzeitiges Versagen der Proben. Im allgemeinen empfiehlt es sich, bei der Prüfung eine Frequenz von  $f = 10\text{s}^{-1}$  nicht zu überschreiten. Ein Versuch bis zu  $N = 10^9$  Lastspielen dauert dann bereits über 3 Jahre [Dolfen].

Aufgrund vorläufiger (noch zu kleine Probenanzahl) Schwingfestigkeitsergebnisse macht Pipes aufgrund der Kurven in den Bildern 8.53 folgende Aussagen:

Die Abminderung der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{xz}$  ist für  $R = \sigma_u/\sigma_o = +0,1$  bei den betrachteten BFK und CFK größer als für Zugspannungen  $\sigma_x$  mit dem gleichen Amplitudenverhältnis, bei GFK ist es umgekehrt. Die Schubsteifigkeiten fallen hingegen bei allen drei Faserverbunden unter konstanter Ermüdungsamplitude nur wenig bis  $N = 10^6$  Zyklen ab.

Pipes regt dabei an, den Einfluß der Belastungsfrequenz (Zyklen/sec), sowie andere R-Werte zu untersuchen. Weiter sollten Versuchsreihen mit nicht-konstanter Amplitude durchgeführt werden.

Eine wesentliche Feststellung ist noch, daß die von Pipes bis  $10^5$  Zyklen bei  $\tau/\tau_{\text{statisch}} > 5$  geprüften Proben anschließende Restfestigkeitswerte ergaben, die mindestens 75% des statischen Wertes betragen.

Der Abfall des Schubmoduls wird von Pipes für einen bestimmten CFK in Bild 8.54 dargestellt. Welchen E-Modulabfall man bei Schwingbelastungen von GFK erwarten kann, stellt Dharan in Bild 8.55 heraus.

Bei CFK ist die Ermüdungsempfindlichkeit nicht so groß wie bei vieler Metallen (Tabelle 8.56). Kevlar-Werte liegen über den von Glasfaserverbunden. Der Einfluß von Kerben bei CFK äußert sich vergleichsweise mehr in einem Absinken der statischen Festigkeit, während anschließende Schwingfestigkeitsbelastungen den Wert dann nicht mehr sehr weit herabsetzen.

Owen/Morris fanden, daß die interlaminare Scherfestigkeit für  $10^6$  Zyklen mit 50 bis 75% der zugehörigen, mittleren statischen Scherfestigkeit anzusetzen ist, und daß der Ermüdungseinfluß bei drei verschiedenen getesteten Kreuzverbunden (KV) für Schub größer als für Zug und Druck war.

Weiter stellten sie fest, daß wegen des Bruchverhaltens Kreuzver-

bunde schlechtere Schwingfestigkeitswerte erbringen als UDV. Die Kreuzverbunde werden durch den Zug in der Querschicht zerstört.

Bei Verwendung oberflächenbehandelter Fasern ist die Verbesserung der Schwingfestigkeit nicht so groß wie die Erhöhung der statischen Festigkeit.

Wenn auch CFK-UDV niedrigere statische Festigkeitswerte als GFK-UDV hat, so ist der Schwingfestigkeitswert bei ~~den~~<sup>beiden</sup> Werkstoffen für  $10^6$  Zyklen praktisch gleich.

Die interlaminaren Scher- Schwingfestigkeitswerte eines KV mit oberflächenbehandelten Type II-C-Fasern waren etwas besser als die von GFK-UDV.

Für CFK sind die interlaminaren Scher- Schwingfestigkeitswerte beträchtlich niedriger als die Schwingfestigkeitswerte unter Axialbeanspruchung.

Die richtige Auslegung von im Druckschwellbereich schwingend beanspruchter Bauteile aus Faserverbund ist sehr schwierig.

Berg/Salama führten deshalb grundlegende Untersuchungen an CFK-UDV (Modmor I, Thornel 75, Celanese GY 70/Epoxidharze,  $\varphi = 62\%$ ) durch. Dabei fanden sie, daß die faserparallelen Risse (splitting) zum Mikroklicken der Fasern führen (Bild 8.12) und schließlich zum Ermüdungsbruch. Als Maßnahme zum Verlängern der Lebensdauer N empfehlen sie eine zeitweilige Wegnahme der Druckbeanspruchung im Austausch gegen eine Zugbeanspruchung. Dadurch wird der örtliche Spannungszustand an den Rißspitzen (nicht nur vorzeichenmäßig) verändert und infolge dieser Art eines Trainierens der Rißfortschritt vorübergehend unter nachfolgender Druckbelastung gebremst. Das Aufsplittern in faserparalleler Richtung kann durch geeignete Matrices verlangsamt werden.

Wie man Schwingfestigkeitsversuche (für GFK) auswertet und die Lebensdauer von (G)FK ermittelt, ist im HSB, Abschnitt Schwingfestigkeit, angegeben.

#### Problematik der Einstufenversuche

Bei den Einstufenversuchen wird das zu prüfende Bauteil mit einem konstanten, sinusförmigen Spannungsausschlag zwischen ebenfalls konstanten Ober- und Unterspannungen beansprucht (aus [Hertel]). Leider sind jedoch die Betriebsspannungen von Bauteilen nur selten von dieser einfachen Art. Deswegen dienen Einstufenversuche in solchen Fällen mehr zur Klärung grundsätzlicher Fragen nach der

schwingfestigkeitsmäßig besseren Konstruktion. Beim Vergleich zweier Wöhlerlinien aus Einstufenergebnissen wird auch die Probe oder die BauteilAusführung mit der "höheren" Wöhlerlinie auch bei Versuchen mit nicht gleichbleibender Amplitude in der Regel schwingfestigkeitsmäßig besser abschneiden.

Die Durchführung der Versuche sollte frequenzmäßig möglichst so geschehen wie die Belastungsfrequenzen in Wirklichkeit auftreten. Erfolgen Lastwechsel mit Frequenzen von 1 Hz im niedrigen und im hohen Amplitudenbereich auf, so darf man nicht einfach aus Zeitgründen die kleinen Amplituden mit Frequenzen von 10 und mehr Hz fahren. Dies gilt insbesondere für Faserverbunde und bei Vorhandensein korrosiver Medien.

#### 8.4.3. Festigkeit bei unterschiedlicher Schwingungsamplitude

Speziell im Leichtbau hat sich die wirtschaftliche Notwendigkeit ergeben, Bauteile nicht mehr allein statisch oder auf Dauerfestigkeit zu dimensionieren, sondern die i.a. regellosen Betriebsbelastungen in Verbindung mit einer angestrebten Lebensdauer und/oder Nutzungsdauer heranzuziehen. Dabei wird z.B. beachtet, daß (bei Flugzeugen, Autos etc.) bei nicht-vorhersehbarer Schädigung (sehr) wichtiger Teile kein totaler Ausfall folgen darf (vgl. Abschnitt 9).

Zu den Verfahren mit veränderlicher Amplitude zählen das Mehrstufenverfahren und alle sonstigen deterministisch (z.B. bekannte Betriebslastfolgen) oder stochastisch ablaufende Versuche.

Matting/Neitzel wenden statistische Methoden auf die Schwingfestigkeitsprüfung von GFK an. Dabei gehen sie von der Bemessung nach dem Wöhler-Verfahren weg, bei dem die auftretende Maximalbeanspruchung höchstens die Dauerschwingfestigkeit  $\sigma_D$  erreichen darf (Bild 8.57) und lassen Beanspruchungen größer  $\sigma_D$  zu. Grund für diese Vorgehensweise liefern die in der Regel vorliegenden sogenannten stochastischen Beanspruchungen eines Bauteils. Bei diesen macht die Maximalbeanspruchung nur einen geringen Anteil an der Gesamthäufigkeit der Belastung aus. Die Belastung einer Probe mit der wahren Betriebslastfolge (z.B. nach Bild 8.58) kann für Faserverbunde äußerst wichtig sein, da die Folge der hohen und niedrigen Beanspruchungen, verbunden mit etwaigen Relaxationsphasen, den Schädigungsvorgang bestimmt.

Es ist dabei üblich, die Betriebslastfolge nach Häufigkeit und

Größe zu bestimmen, um Belastungskollektive für einen Betriebsfestigkeitsversuch zu erhalten. Bild 8.59 zeigt zwei solche Kollektive, die beide praktisch logarithmischen Normalverteilungen darstellen. Im übrigen sei auf die einschlägige Literatur verwiesen [DIN Taschenbuch 21] u.a..

Von Matting und Neitzel an GFK durchgeführte Versuche mit zwei Belastungskollektiven führten gegenüber Wöhlerversuchen bei  $10^6$  Lastspielen zu 30% - 80% höheren Festigkeitswerten (Bild 8.60). Das sind zwar geringere Werte als bei Metallen, sie sind aber immer noch beachtlich.

Mit einem Querstrich über dem betreffenden Symbol ( $\bar{\sigma}$ ) wird der Spitzenwert eines Kollektivs mit veränderlicher Spannung gekennzeichnet.

Welche höheren Lastspielzahlen erreicht werden können, zeigen in Verbindung mit der zugehörigen Versuchsdauer Halpin u.a. in [STP 521]. Als Probe lag ein GFK-Laminat ( $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$ )<sub>Sym</sub> vor.

## 8.5. Rißfortschritt, Lebensdauer und Restfestigkeit

### 8.5.1. Rißfortschritt

#### Allgemeines

Bei Ermüdung wird zwischen den Bereichen I Rißeinleitung, II stabile Rißvergrößerung und III Rißauffangen oder instabiler Restbruch unterschieden. Unter Rißeinleitung (fracture initiation) wird sowohl das Entstehen des ersten Mikrorisses in glatten und gekerbten Proben als auch die Ausrichtung der Rißfront senkrecht zur ersten Hauptspannung in Proben mit Rissen, die nicht durch Ermüdung erzeugt wurden, verstanden. Auch die stabile Rißvergrößerung mit der Lastwechselzahl ist nicht immer ein kontinuierlicher Vorgang. In bestimmten Fällen werden ein Rißstillstand trotz Lastwechsel (dormant cracks), eine Rißspitzenversprödung durch zyklische plastische Formänderung an der Rißspitze und eine instabile Rißvergrößerung mit darauffolgendem Rißauffangen (Rißschritte) beobachtet (Auszug aus [Radaj]).

Ein Vergleich des Verhaltens von Metallen und Faserverbunden zieht Salkind in [STP 524]. Danach zeichnen sich die Faserverbundwerkstoffe durch gleichmäßigeren Bruchfortschritt aus. Bei Metallen ist dem Rißfortschritt hingegen eine längere Rißentstehungsphase vorgeschaltet (Bild 8.61).



Bei Metallen ist die Hauptbruchursache das kritische Rißwachstum. Die Risse wachsen, recht genau von den aufgetragenen Spannungen abhängig, bis die kritische Rißlänge erreicht ist. In der Regel ist dabei die Zyklenzahl bis zur Rißentstehung größer als die Zyklenzahl während des Rißfortschritts bis zum Bruch.

Bei Faserverbunden läßt sich eine Unterteilung in Rißeinleitungsphase und Rißfortschrittsphase nicht so deutlich machen. Einmal sind naturgemäß in einem Faserverbund mehr Fehlstellen wie gebrochene Fasern, Minidelaminationen, Matrix-Mikrorisse, Ablösungen und Hohlstellen, <sup>vorhanden</sup> zum anderen zeigt die damit verbundene Rißentstehung und Rißvergrößerung zwangsläufig ein komplexeres Verhalten.

### Homogene isotrope Werkstoffe

Vorkritisches Rißwachstum kann sowohl durch statische als auch durch dynamische Belastung hervorgerufen werden. Wie aus Bild 7.21 zu entnehmen ist, findet bei Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I < K_{I_{sc}}$  und bei statischer Belastung kein Rißwachstum statt. Für Werte  $K_{I_c} > K_I > K_{I_{sc}}$  bzw. Rißtiefen zwischen  $a_{sc}$  und  $a_c$  werden aber unter einer statischen Spannung nach einer mehr oder weniger langen Zeit Risse auftreten. Bei dynamischer Belastung kann sogar eine Rißtiefe kleiner  $a_{sc}$  nach entsprechender Zeit einen Bruch verursachen. Wie lange es im letzten Fall dauert, bis dieser Bruch eintritt, muß durch Messung der Rißwachstumsgeschwindigkeit bei statisch belasteten Proben unter korrosivem Medium und bei dynamisch belasteten Proben unter neutralem oder korrosivem Medium festgestellt werden. Mit Hilfe dieses Kenntnis ist bei Strukturen eine Aussage bezüglich Lebensdauer oder Inspektionszeiträumen möglich.

Wenn entsprechend der Skizze in Bild 8.44 Versuche unter einer bestimmten Belastung durchgeführt werden mit einer Schwingbreite

$$\Delta \sigma = \sigma_o - \sigma_u = \left(1 - \frac{\sigma_u}{\sigma_o}\right) \sigma_o = (1-R) \sigma_o \quad (8.20)$$

$$R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o} \equiv \frac{K_{min}}{K_{max}}, \quad (8.21)$$

dann erhält man bei doppelt-logarithmischer Auftragung der Versuchswerte z.B. den Kurvenverlauf des Bildes 8.62. Technisch interessant ist darin die Rißwachstumsgeschwindigkeit im Bereich II. Hierin ist das Spannungsintensitätsgefälle (auch dyn. Spannungsintensitätsfaktor genannt)

$$\Delta K = \Delta \sigma \sqrt{a} Y \quad (s. 7-35) \quad (8.22)$$

bzw.

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min} = (1-R) K_{\max} \quad (8.22)$$

mit der Rißfortschrittsrate bzw. Rißwachstumsgeschwindigkeit  $da/dN$  verbunden. Nach P.C. Paris und F. Erdogan läßt sich diese Beziehung durch (ziemlich die einfachste von vielen Formen, vgl. [Hoepfner/Krupp]). Der Index bei  $K_I$  ist weggelassen worden)

$$\frac{da}{dN} = C_0 \Delta K^n, \quad (8.23a)$$

beschreiben, wobei  $N$  die Lastwechselzahl darstellt. Die Größen  $C_0$  und  $n$  bestimmen die Wachstumsgeschwindigkeit. Die zugehörigen Zahlenwerte liefert das Experiment.

Eine andere Beziehung für den Rißfortschritt ergibt sich, wenn der kritische Spannungsintensitätsfaktor  $K_c$  verwendet wird. Das führt zu der recht häufig benutzten Forman-Gleichung für die Rißfortschrittsrate

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_1 \Delta K^n}{(1-R) K_c - \Delta K} = C_0 (1-R)^{n-1} \frac{K_{\max}^n}{K_c - K_{\max}}, \quad (8.23b)$$

worin

$$K_c = f(\sigma, Y, a), \quad Y = \begin{array}{l} \text{Korrekturfunktion} \\ \text{für Geometrie.} \end{array} \quad (8.24)$$

ist. Für unterschiedliche Metalle liefert die Auftragung über  $\log(\Delta K/\epsilon)$  statt  $\log(\Delta K)$  ein gemeinsames Streuband der Rißfortschrittskurven.

Glg. (8.23 b) läßt den Fall zu, daß bei Erreichen des kritischen Wertes - analog zur Griffithschen Annahme - der Riß sich entsprechend

$$\lim_{K_{\max} \rightarrow K_c} \frac{da}{dN} \rightarrow \infty$$

explosionsartig ausbreiten kann. Bild 8.63 bestätigt dies bei verschiedenen Spannungsverhältnissen.

Wie die experimentellen Ergebnisse aussagen, kommt es bei vorliegendem Initialriß der halben Länge  $a_i$  erst ab einem bestimmten material-eigenen Spannungsintensitätsgefälle (Bild 8.64)

$$\Delta K < K_0$$

zu einem Rißwachstum. Nach einer gewissen Zeit bzw. einer Anzahl von Lastwechseln wird die Rißlänge dann so groß, daß die kritische Länge  $a_c$  erreicht wird und der Bruch eintritt.

Sind im betrachteten Fall die Rißgeometrie bekannt - sie liefert  $Y^2$  bzw.  $M$  -, und ist weiter der  $K_c$ -Wert bekannt - er liefert die kritische Rißlänge  $a_c = K_c^2 / (\sigma^2 M)$  -, so läßt sich die maximale Lastspielzahl  $N$  ermitteln.

Überlegungen, eine Rißfortschrittsaussage bei beliebigen Belastungsarten stochastischer oder deterministischer Natur zu finden, sind bereits angestellt worden, werden hier aber nicht weiter aufgeführt.

### Faserverbund

Eine Anwendung der Kenntnisse des Rißfortschrittsverhaltens homogener Werkstoffe auf Faserverbund wird mit zunehmender Verwendung von Faserverbund Eingang finden.

Gary/Mandell und andere Verfasser stellten fest, daß sich einige Faserverbunde beim Rißfortschritt analog zu den homogenen Werkstoffen erfassen lassen.

Der Exponent  $n$  beinhaltet beim Faserverbund Materialgrößen von Harz, Matrix, Faser-Matrix-Übergang und Umgebungsbedingungen [Kunz/Beaumont].

Mandell/Meier untersuchten den Rißfortschritt in Kreuzverbunden (nur) unter einer Zugschwellbelastung bei 5 Zyklen pro Sekunde. Die Rißbilder sind schematisch in Bild 8.65 angegeben. Es entstehen vor der Rißspitze einzelne Bänder (ligaments). Der Rißfortschritt geschieht sprunghaft von Band zu Band. Innerhalb eines Bandes vergrößert sich nur die Sekundär-Aufsplitterung während einiger Lastzyklen. Sie leiten in ihrer Arbeit ein spezielles Rißfortschrittsgesetz unter Zuhilfenahme der sogenannten Minerregel bei dem bandweisen Rißfortschritt her. Darauf soll hier aber nicht weiter eingegangen werden.

Kunz/Beaumont studierten bei CFK die unterschiedliche Rißvergrößerung in Abhängigkeit von (zwei) Matrixeigenschaften und vom Schichtaufbau. Weiter zeigten sie, wie viel schneller der Rißfortschritt in salziger Lösung als in Luft stattfindet (Bild 8.66).

### 8.5.2. Lebensdauer

Bei der Abschätzung der Lebensdauer schwingbeanspruchter Bauteile sind die Einflüsse von Bauteilgröße, Bauteilform und Häufigkeit der ermüdungskritischen Stellen sehr bedeutend. Die Berücksichtigung der wirklichen Spannungsverteilung, die sich durch Finite-Element-Methoden und Dehnungsmessungen bestimmen läßt, beinhaltet schon den Formeinfluß. Bezüglich der restlichen Einflüsse sei nur noch auf

die Kennworte "Gesamtausfallwahrscheinlichkeit" für eine vorgegebene Lebensdauer und "Verfahren der Fehlstellen" verwiesen. Die Bedeutung dieser Begriffe kann in der entsprechenden Statistik-Literatur nachgelesen werden.

Während bei Bauteilen mit Rissen die Lebensdauer durch die Rißausbreitung bestimmt wird, tritt bei gekerbten Bauteilen (Bild 8.67) noch die Phase der Rißbildung hinzu. Diese Phase ist bei scharf gekerbten, metallischen Bauteilen wegen des hohen Spannungsgradienten durch die Hookesche Maximalspannung gut erfaßbar, da sich - trotz hoher Kerbgrundbeanspruchung- die plastische Zone nur auf einen kleinen Bereich in Kerbgrundnähe erstreckt. Da bei schwach gekerbten Bauteilen gegenüber stark gekerbten Bauteilen eine höhere Nennbeanspruchung möglich ist, geht die Rißausbreitung - falls sich ein Riß gebildet hat - schneller vor sich. Die Phase der Rißausbreitung wird verkürzt und die Vorgänge während der Rißbildung treten in den Vordergrund.

Es zeigt sich, daß der Anteil der gesamten Lebensdauer, welcher bei scharf gekerbten, metallischen Proben durch ein Rißausbreitungsgesetz beschrieben werden kann, nur etwa 10 - 20% der Bruchlastspielzahl ausmachen kann.

Um das Verständnis für die Vorgänge in schwach gekerbten Bauteilen zu verbessern, wurden Dauerschwingversuche an ungekerbten Proben unter gleichzeitiger Messung der Spannungen und Dehnungen vorgenommen. Dabei stellte man fest, daß die im statischen Zugversuch für den Werkstoff ermittelte Spannungs-Dehnungs-Linie im wesentlichen nur während des ersten Belastungszyklus vorliegt und infolge von Ver- oder Entfestigungsvorgängen (Bauschinger-Effekt) während der fortlaufenden Schwingbeanspruchung starken Veränderungen unterliegt (Auszug aus [Heckel]).

Bei Faserverbundwerkstoffen lassen sich ähnliche Erscheinungen, die aber andere Ursachen haben, feststellen, wenn z.B. UDV- und MSV- $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurven miteinander verglichen werden.

Heckel macht Vorschläge zur Abschätzung der Lebensdauer rissbehaffeter, sowie stark und schwach gekerbter Bauteile. Die Unterteilung in diese drei Kerbschärfenbereiche erscheint sinnvoll, da sich für jeden Bereich andere charakteristische Größen zur Beschreibung des Dauerschwingverhaltens herleiten lassen. Dabei hängt der Umfang des Informationsgehalts der experimentellen Ausgangsdaten, d.h. letztlich der Aufwand in der Bestimmung von Werkstoffdaten, stark davon

ab, welchen Anteil die Rißbildungsphase an der Gesamtlebensdauer hat. Während bei rissbehafteten Bauteilen das Rißausbreitungsgesetz im Einstufenversuch zur Abschätzung der Restlebensdauer genügt, sind bei scharf gekerbten Bauteilen eine Wöhlerlinie, bei schwach gekerbten Bauteilen zwei Wöhlerlinien unterschiedlich gekerbter Probestäbe bei jeweils gleicher Beanspruchungsart (R) nötig. Um Größeneinflüsse auszuschalten, sollten die experimentellen Ausgangsdaten an Proben vergleichbarer Größe ermittelt werden. Zur Berücksichtigung der Bauteilgeometrie ist ferner die Kenntnis des Geometriefaktors bzw. des Hookeschen Kerbfaktors nötig.

### Lebensdauerabschätzung bei Einstufenbelastung

Im Rißvergrößerungsbereich (Bereich II des Bildes 8.62) konnte die Abhängigkeit der Rißlänge von der Lastwechselzahl z.B. nach der Rißfortschrittsgleichung von Paris/Erdogan

$$\begin{aligned} \frac{da}{dN} &= C_0 \Delta K^n & \Delta K &= \Delta \sigma Y \sqrt{a} = (\sigma_0 - \sigma_u) Y \sqrt{a} \\ &= C_0 (\Delta \sigma)^n (aM)^{n/2} & \text{mit} & & = (1-R) \sigma_0 Y \sqrt{a} \end{aligned} \quad (8.26)$$

bestimmt werden. Die Größen  $C_0$  und  $n$  waren experimentell zu ermitteln. Integriert man diese Beziehung von einer vorhandenen Ausgangsrißtiefe  $a_i$  (bzw.  $2a_i$ ) bis zur kritischen Rißtiefe  $a_c$  (bzw.  $2a_c$ ), so wird mit  $Y = \sqrt{M}$  [Heckel, S. 60] und  $a_c = K_c^2 / (\sigma_0^2 M)$  das folgende Integral bestimmbar

$$\int_{a_i}^{a_c} a^{-\frac{n}{2}} da = C_0 (\Delta \sigma)^n M^{\frac{n}{2}} \int_0^N dN \quad (8.27)$$

Hierbei wurde vorausgesetzt, daß die Lastschwingbreite  $\Delta \sigma$  während des Versuches konstant ist. Für  $n = 2$  folgt aus Glg. 8.27

$$\int_{a_i}^{a_c} \frac{da}{a} = C_0 (\Delta \sigma)^2 M N \rightarrow N = \frac{1}{C_0 (\Delta \sigma)^2 M} \ln \left( \frac{a_c}{a_i} \right) \quad (8.28)$$

Für  $n \neq 2$  folgt aus Glg. (8.27) für die Bruchlastspielzahl

$$\begin{aligned} \frac{2}{2-n} a^{\frac{2-n}{2}} \Big|_{a_i}^{a_c} &= C_0 (\Delta \sigma)^n M^{\frac{n}{2}} N; \\ N &= \frac{2}{(n-2) C_0 (\Delta \sigma)^n M^{\frac{n}{2}}} \left\{ \frac{1}{a_i^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{1}{a_c^{\frac{n-2}{2}}} \right\} \quad (8.29) \end{aligned}$$

### Lebensdauerabschätzung nach der Miner-Regel

Sollen Rückschlüsse aus den Ergebnissen von Einstufenversuchen, also von Wöhlerlinien, auf Bauteile mit unterschiedlichen Belastungen erfolgen, so wird dies mit einer Umrechnung nach der sogenannten

linearen Schadensakkumulationshypothese von Palmgren/Miner versucht (s. [Hertel]).

Diese von Miner im Jahre 1945 veröffentlichte Hypothese, auch Minerregel genannt, gestattet es, Aussagen über den Grad der Zerstörung eines Bauteils zu machen. Miners Regel sagt aus, daß der Schädigungsgrad durch die vorliegende Zyklenzahl  $n_i$ , dividiert durch die zu einem Spannungsniveau  $\sigma_i$  gehörende Bruchzyklenzahl  $N_i$  ausgedrückt werden kann. Bild 8.68 veranschaulicht diese Annahme. Unter den Voraussetzungen sinusoidalen Belastungsverlaufs und daß die ganze Energie in Brucharbeit übergeht, gilt

$$\frac{w_i}{W} = \frac{n_i}{N} \quad (8.30)$$

Darin sind  $w_i$  die Teilbrucharbeit bei  $n_i$  Zyklen und  $W$  die Gesamtbrucharbeit bei  $N$  Zyklen.

Weiter gilt, wenn  $k$  die Anzahl der aufgebrachten Laststufen angibt,

$$\sum_{i=1}^k w_i = W \quad (8.31)$$

Mit diesen Gleichungen wird über

$$\frac{w_1}{W} + \frac{w_2}{W} + \dots = \sum_{i=1}^k \frac{w_i}{W} = 1$$

die Bruchbeziehung

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \frac{n_3}{N_3} + \dots + \frac{n_k}{N_k} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (8.32)$$

erhalten.

Glg. (8.32) drückt aus, daß die Schädigung eines Versuchstückes unter Schwingbelastung mit dem Quotienten der Lastwechselzahlen ( $n_i/N_i$ ) linear zunimmt.

Nach Erfahrungen des Laboratoriums für Betriebsfestigkeit (LBF) in Darmstadt liefert die lineare Schadensakkumulationshypothese für Metalle eine sichere Abschätzung bei positiver Mittelspannung und eine unsichere Abschätzung bei Beanspruchungs-Zeit-Funktionen mit großen Mittelspannungsschwankungen und bei vielen Amplituden, die unterhalb der Dauerfestigkeit liegen.

Welches kumulative Verhalten bei Faserverbund gegeben ist, ist noch ziemlich unbekannt. Lediglich Broutman/Sahu fanden für GFK (KV, E-Glas/Epoxid, Scotchply 1002) ebenso wie für Metalle, daß der Lastwechselquotient von der Reihenfolge der aufgebrachten unterschiedlichen Belastungen abhängt. Bei einem Zweistufenversuch stellten sie fest, daß  $\sum \frac{n_i}{N_i} > 1$  für  $\sigma_1 > \sigma_2$  und kleiner 1 für  $\sigma_2 > \sigma_1$  war.

### Lebensdauerabschätzung nach Versuchsergebnissen mit betriebs- ähnlicher Lastfolge

In jüngerer Zeit wurde eine bessere Methode zur Lebensdauerabschätzung entwickelt, die Ergebnisse (falls vorhanden) aus Versuchen mit betriebsähnlichen Lastfolgen verwendet, z.B. nach Bild 8.69.

Die Aussagesicherheit einer Vorhersage mit Hilfe der linearen Schadensakkumulationshypothese kann danach am sinnvollsten durch einen Vergleich der abgeschätzten Lebensdauer mit dem Ergebnis eines entsprechenden Versuches mit betriebsähnlicher Lastfolge belegt werden. Eine Maßzahl für diese Treffsicherheit ist der Quotient

$$C = \frac{\text{bei betriebsähnlichem Versuch erreichte Lebensdauer}}{\text{nach betriebsähnlicher Lastfolge errechnete Lebensdauer}}$$

Diese vom LBF vorgeschlagene Methode (näheres demnächst im HSB) benutzt diesen Faktor, um damit die Lebensdauervorhersage bei Annahme einfacher, linearer Schadensakkumulation zu korrigieren in der Art

$$\text{verbesserte abgesch. Lebensdauer} = C * \text{nach Miner errechnete Lebensdauer.}$$

### Lastspielzahl und Inspektionszeit

In Bild 8.70 sind einige Rißfortpflanzungskurven dargestellt. Bei einigen Werkstoffen, besonders bei denen mit hohen statischen Bruchfestigkeiten, können sich Risse sehr schnell ausbreiten und schon bei verhältnismäßig kurzen Rißlängen zum Bruch führen. An anderen Werkstoffen - meistens an denen mit niedrigeren Bruchfestigkeiten - werden Risse später auftreten und sich gleichzeitig langsamer fortpflanzen. Dieses Verhalten ist auf jeden Fall günstiger, da man dadurch die Inspektionsintervalle länger wählen kann. Dabei soll erwähnt werden, daß diese Werkstoffeigenschaften von den Umgebungseinflüssen abhängig sind. Sind während der Rißausbreitungsphase chemische Einflüsse, sowie höhere oder niedrigere Temperaturen vorhanden, so sollen diese - meist negativen - Einflüsse bei der Werkstoffauswahl mit berücksichtigt werden (aus [Hoffer]). (Bedingt durch die Forderung größtmöglicher Werkstoffausnutzung wird der Festigkeitsingenieur gezwungen, bei der Dimensionierung von Bauteilen die geforderte Lebensdauer oder Inspektionszeit als Bemessungskriterien einzubeziehen. Dazu muß er die Gesamtzahl der unter Betriebslast

ertragbaren Zyklenzahl wissen.

Die Gesamtzahl der ertragenen Zyklen setzt sich aus der Zahl zusammen, die für die Rißentstehung notwendig ist,  $N_i$ , plus der Zahl, die für den Rißfortschritt (Index  $p$ ) bis zum Bruch bei Erreichung der kritischen Rißlänge  $a_c$  notwendig ist (Bild 8.71)

$$N = N_i + N_p .$$

Es besteht somit die Notwendigkeit, auf einen langsamen Rißfortschritt hin zu dimensionieren unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Inspektionszeiten. Kurve B in Bild 8.72 ist erheblich besser als Kurve A.

Halpin legt die Größe des Anfangsrisses  $a_i$  nach der Wahrscheinlichkeit der Feststellbarkeit einer bestimmten Rißgröße fest und betrachtet diesen Wert als B-Wert ( $S_z = 90\%$ ,  $S_v = 95\%$ , s. Abschnitt 9.2.). Natürlich kann man mit einem Test das Vorhandensein bestimmter Rißgrößen (Bild 8.73) ausschließen und eine genauere Rißfortschrittsbetrachtung sowie Festlegung der Inspektionszeit vornehmen. Diese Möglichkeit ist aber vorläufig auf homogene, sich spröd verhaltende Werkstoffe beschränkt.

#### Zur Anwendung der vorgenannten Methoden bei FK

Wenn wir die vorgenannten, für homogene Werkstoffe entwickelten Methoden auch für FK einsetzen wollen, so besteht die Schwierigkeit, eine Fehlstelle im FK als einen bestimmten Riß zu definieren.

Ermüdungsbrüche werden bei FK aus verschiedenen Kombinationen von Matrixrissen, Ablösung der Fasern von der Matrix, Faserausreißen, Delamination der Schichten, Hohlraumvergrößerung und Faserbruch verursacht (aus [Reifsnider]). Diese Ermüdungsbrüche können somit nicht als eine einzelne Bruchart beschrieben werden, wie es bei Metallen möglich ist. Kritische Rißlängen können nicht gut definiert werden, und auch nicht bei allen FK mittels  $N$  (on)  $D$  (estructive)  $T$  (esting) entdeckt werden. Beobachtet werden kann hingegen ein Abfallen der Steifigkeit des untersuchten Bauteils bzw. der Probe schon in frühen Stadien der Ermüdung. Reifsnider schlägt deshalb vor, das Ermüdungsverhalten nicht mehr nur in Verbindung mit der Rißbeobachtung zu sehen, sondern in bestimmten Fällen mit der Reduktion der Steifigkeit zu verknüpfen.

Eine weitere Schwierigkeit besteht - wie bei homogenen Werkstoffen - darin, die Rißentstehungsphase (soweit man, abgesehen von Gewaltbeschädigungen, bei FK überhaupt von Rißentstehung reden darf)



beschreiben und erfassen zu können.

Natürlich liegt auf dem Gebiet der Anwendung der (Riß-) Bruchmechanik auf FK noch zu wenig Erfahrung vor. Das Bemühen weniger, hauptsächlich amerikaischer Forscher ist nicht ausreichend.

Daß die genannten Methoden bei spröden unverstärkten und spröden kurzfaserverstärkten Kunststoffen eher angewendet werden können, ist einleuchtend. Jedoch werden aus solchen Werkstoffen hergestellte Bauteile kaum dort eingesetzt, wo die Anwendung der Rißbruchmechanik bei der Auslegung notwendig oder sinnvoll ist.

### 8.5.3. Restfestigkeit

Vorhandene Schwingfestigkeitskurven liefern noch keine Aussage, wie sich die statische Kurzzeitfestigkeit im Verlauf der Schwingbelastung ändert. Die Kurzzeitfestigkeit nach einer vorangegangenen Schwingbelastung - auch Rest-Kurzzeitfestigkeit oder Restfestigkeit genannt - ist aber für die Beurteilung eines Werkstoffs unter Dauerschwingbelastung gleichfalls von Bedeutung. Die Restfestigkeit gibt nämlich eine Information darüber, wie sich während einer Schwingbeanspruchung die Sicherheit eines Bauteils gegenüber statischem Bruch ändert. Mit der Restfestigkeit läßt sich ebenfalls abschätzen, welche einmalige kurzzeitige Überbeanspruchung ein dynamisch belastetes Bauteil ohne Bruch ertragen kann (aus [Knappe/Wurtinger]).

#### Anwendung bei homogenen Werkstoffen

In der Schwingfestigkeit werden auch angerissene Proben untersucht. Diese Proben haben bei der Ermittlung der statischen Restfestigkeit eine Rißlänge (womit natürlich eine entsprechende Lastspielzahl in Verbindung gebracht werden kann), die in einem bestimmten Verhältnis zur Probenbreite (hier der Mittenrißprobe) steht. Hoffer zeigt ein schematisches Bild (Bild 8.74), aus dem zu ersehen ist, daß nur bei einem idealen Werkstoff ein Riß die statische Festigkeit nicht einflußt. Dieses Tragverhalten ist in Wirklichkeit sehr selten und nur bei Werkstoffen mit niedrigen Bruchfestigkeiten vorhanden. Bild 8.74 zeigt deutlich, daß bei hochfesten Legierungen eine Querschnittsabminderung von rd. 20% zu einer Tragfähigkeitsabminderung von rd. 75 bis 80% führen kann [Hoffer].

Die Auswahl der Werkstoffe und Bauweisen (z.B. im Flugzeugbau) sollte unter Zuhilfenahme der Gesichtspunkte der sogenannten Damage Tolerance erfolgen. Hierfür sowie für die Festlegung etwaiger Inspek-

tionsintervalle und für die Abschätzung kritischer Rißlängen sind Rißfortschritts- und Restfestigkeitsrechnungen durchzuführen. Dabei werden sowohl Ergebnisse von einfachen Proben als auch kennzeichnenden Bauteilproben, wie etwa Hautfeldern mit Stringern und einem Riß zwischen zwei Versteifungen [Gerharz/Huth, LBF], verwendet.

Mit Hilfe eines Restfestigkeitsdiagrammes  $\sigma_c(a)$  für Zug bzw. Druck, kann die Güte einer Konstruktion beurteilt und eventuell optimiert werden. Zudem kann mit Bekanntsein des Restfestigkeitsverhaltens ein rechnerischer Nachweis wichtiger Bauteile vorgenommen werden. Die Abschätzung der Lebensdauer erfolgt durch Annahme der Anfangsrißlänge  $a_i$  und Ermittlung der kritischen Rißlänge  $a_{krit}$ . Die kritische Rißlänge wird mit Hilfe der Oberspannung  $\sigma_o$  (oder der Spannung bei Fail Safe Last) im Restfestigkeitsdiagramm bestimmt. Der Rechnung liegt die Rißfortschrittsgleichung zugrunde, die  $a_i$  mit  $a_{krit}$  verbindet und  $N$  liefert. Bei Gültigkeit der bruchmechanischen Beziehung  $\sigma_c = f(K_c, Y, a_{krit})$  ist mit bekannter Oberspannung  $\sigma_o = \sigma_c$  die kritische Rißlänge  $a_{krit}$  und die Zyklenzahl bzw. Lebensdauer ermittelbar.

#### Anwendung auf Faserverbundwerkstoffe

Knappe/Wurtinger führten Restfestigkeitsuntersuchungen an verschiedenen, nicht angerissenen Glasgewebelaminaten nach vorangegangener Zug- oder Druck-Schwellbelastung durch. Dabei verwendeten sie Längsprobekörper (Fall I) und Diagonalprobekörper (Fall II). Von diesen beiden Proben kann bei der ersteren das Fasergerüst auch ohne Matrix die Last aufnehmen, weil die Fäden von Einspannung zu Einspannung verlaufen. Im Fall II ist die Matrix zur Lasteinleitung und Lastweiterleitung unbedingt erforderlich. In diesem Fall ist das Freie-Rand-Problem bei der Deutung der Ergebnisse zu berücksichtigen.

Betrachtet man die Restfestigkeiten über der Oberspannung in Bild 8.75, so zeigt sich, daß zunächst bei niedrigen Oberspannungen nach  $10^5$  Lastspielen kein Festigkeitsabfall erfolgt. Erst ab einer bestimmten Oberspannung fällt die Restfestigkeit stärker ab. Die Restfestigkeit kann nur bis zu einem Wert abfallen, der gleich dem der aufgebrauchten Oberspannung ist, gegeben durch die Gerade  $\sigma_N = \sigma_o$  denn ein Abfall unterhalb dieses Werts führt zum Bruch während der Schwingbelastung, d.h. zum Dauerbruch. Wo die Restfestigkeit die Gerade  $\sigma_N = \sigma_o$  trifft, erfolgt der Übergang vom Restfestigkeitsdia-

gramm zum Zeitfestigkeits- oder Wöhler-Diagramm (aus [Knappe/Wurtinger]).

Zusammenfassend soll für FK festgehalten werden: nach schwingenden Belastungen kann manchmal eine Restfestigkeit des Materials höher als die statische Festigkeit festgestellt werden.

CFK und BFK sind wenig ermüdungsempfindlich. GFK ist hingegen bei Vorhandensein von Kerben und Löchern weniger empfindlich. Grob gesehen unterscheiden sich nach den Bildern 8.76 und 8.77 die Restfestigkeitswerte für gekerbte und ungekerbte FK kaum. Spannungskonzentrationen haben geringen Einfluß auf lange Lebensdauer. Ein quadratischer Ausschnitt in einem Zugfeld z.B. ist praktisch nicht ungünstiger als ein Kreisloch.

Faserverbundbauteile des Types I können mit Oberspannungen  $\sigma_0$  größer als die Reißbildungsspannung  $\sigma_{rb}$  belastet werden.

## 8.6. Schlagfestigkeit und Durch-Stoßfestigkeit

Neben ruhenden und schwingenden Belastungen können Bauteile auch plötzlichen Belastungen unterworfen werden, die einmalig oder wiederholt auftreten. Dabei kann das Verhalten des Werkstoffs von dem unter ruhender oder zügiger Beanspruchung erheblich abweichen.

Bei einmaligen Belastungen muß man zwischen den möglichen, verschiedenen hohen Belastungsgeschwindigkeiten unterscheiden. Bei hohen Belastungsgeschwindigkeiten ist außerdem noch die Durchstoßfestigkeit eines Bauteils von Interesse (z.B. Vogelaufprall gegen Flugzeugflügel).

Sind die Schlag-Belastungen von längerer Dauer, so werden Dauerschlagversuche durchgeführt (n. [Wellinger/Krägeloh]). Diese Prüfungen an Proben oder Bauteilen werden zumeist (wie auch bei einmaliger Schlagbeanspruchung) im Schlagzug- und Schlagbiegeversuch mit und ohne Kerbe (Beanspruchungszeit etwa  $10^{-3}$ s) durchgeführt, wobei in der Regel Wöhler-Kurven ermittelt werden.

### 8.6.1. Einmalige Belastung

Welchen Einfluß das schlag- bzw. stoßartige Belasten eines Bauteils hat, sei kurz anhand einer Beschreibung von Domke für Metalle durchgeführt. Für Kunststoffe, zum Teil auch für FK, würde sich ähnliches ergeben, weil sie häufig noch spröder als Metalle sind.

Wenn verschiedene metallische Werkstoffe bei statischer Beanspru-

chung gleich gute Werte für Festigkeit, Dehnung und Einschnürung aufweisen, so können sie dennoch bei stoßartiger Beanspruchung sehr unterschiedliche Neigung zu dem im Betrieb gefürchteten Trennbruch zeigen, der plötzlich und ohne warnende (bleibende) Verformung einsetzt. Ein Trennbruch tritt dann auf, wenn in einem Körper die Trennfestigkeit (Kohäsion) von der größten Zugspannung erreicht wird, ehe die Schubspannung den Gleitwiderstand überschreitet. Die für einen Trennbruch benötigte Arbeit ist gering im Vergleich zum Verformungsbruch, der Werkstoff erscheint spröde.

Mit steigender Verformungsgeschwindigkeit wächst in Metallen die Trennfestigkeit nur wenig, der Gleitwiderstand jedoch erheblich (Bild 8.78). Denn im Gegensatz zum Trennen ist das Gleiten mit der (atomar gesehen) zeitraubenden Wanderung von Versetzungen verbunden und läßt sich nur durch eine Steigerung der Belastung beschleunigen so daß bei einer "kritischen Geschwindigkeit" schließlich die Trennfestigkeit erreicht wird, bevor der Gleitvorgang einsetzen kann. Eine gewisse Beurteilung dafür, wie gefährlich die Schlagbelastung bei einem Werkstoff ist, liefert die Schlagzähigkeit.

Vergleicht man die Reißzähigkeit mit der Kerbschlagzähigkeit, so muß betont werden, daß sie nur die Spannungsversprödung und bedingt (infolge experimenteller Schwierigkeiten) die Temperaturversprödung, jedoch nicht die Geschwindigkeitsversprödung erfassen kann. Bei hochfesten Werkstoffen scheint dies nach amerikanischen Angaben kein allzu großer Nachteil zu sein. Genaue Unterlagen für die Festigkeitsrechnungen werden aus Kerbschlagversuchen nicht erhalten, jedoch können die Kerbschlag-Versuchswerte als Vergleichswerte dienen.

> Die Ermittlung der Kerbschlagbiegeversuche von Kunststoffen (fehlt noch für FK) findet nach DIN 53 453 statt. Als Versuchstypen sind der Biegebalken (Charpy) und der Kragbiegebalken (Izod) üblich. Die Proben können gekerbt und ungekerbt sein. Bei sehr spröden Kunststoffen kann man auf die Kerbe verzichten. Durch die Kerbe wird die Verformung auf ein immer kleineres Volumen beschränkt und die Verformungsgeschwindigkeit im Kerbgrund wird sehr groß. Außerdem entsteht durch die Querkontraktionsbehinderung ein dreiachsiger Spannungszustand am Kerbgrund, der einen Trennbruch begünstigt.

Die in Firmenunterlagen angegebenen, nach den Deutschen Kunststoffnormen (DIN 53 448 und 53 453) ermittelten Werte für die Schlag- und Kerbschlagzähigkeit gestatten einen Vergleich verschiedener Kunststoffe untereinander. Dabei ist darauf zu achten, daß ent-

sprechend dem Vorgenannten eine der Betriebsbelastung möglichst ähnliche Belastungsgeschwindigkeit vorliegen sollte, wobei die Vergleichswerte wiederum bei gleichen Belastungsgeschwindigkeiten ermittelt sein sollten.

Manche Schlagversuchs-Maschinen können einen Last-Zeit-Verlauf, wie in Bild 8.79, aufzeichnen, so daß mit einer Verschiebungsmessung (Weg- Zeit- oder Weg- Last-Kurve) in jeder Bruchphase der jeweilig absorbierte Energiebetrag bzw. <sup>die</sup> Verformungsarbeit angegeben werden kann (s. [ASTM STP 563]). Diese Methode entspricht der schlagartigen Durchführung einer  $G_c$ -Wert Messung.

Die Fläche unter der Last-Zeit-Kurve des Bildes 8.79 kann mit drei verschiedenen Bruchphasen in Verbindung gebracht werden. Fläche 1 ist mit der Vorschädigung zu verbinden, Fläche 2 mit dem Bruchbeginn und Fläche 3 mit der Energieaufnahme nach Bruchbeginn, also während des Bruch- oder Rißfortschritts.

Die Energieaufnahme von Materialien vor Bruchbeginn ist allein von der aufnehmbaren elastischen Formänderungsenergie abhängig. Nach Bruchbeginn hängt die Energie bei Metallen von der plastischen Formänderungsenergie und der Rißöffnungsenergie ab; bei Faserverbundwerkstoffen sind zusätzlich die Größen Faserherauszug, Faserablösung und Delamination einzubeziehen, wobei mit ihnen aber eine bei weitem nicht so große quasiplastische Energieaufnahme möglich ist.

### Versuchsergebnisse

Bei der Beurteilung der Versuchsergebnisse an schlagartig belasteten Proben muß sorgfältig auf mögliche Einflußgrößen geachtet werden.

Wie man weiß, machen sich bei statischen Schubbelastungen von Verbundbiegeproben je nach Material größere oder kleinere viskoelastische Effekte und Krieeffekte bemerkbar. Es ist deshalb zu erwarten, daß Messungen - beispielsweise der ILSS-Werte - bei stoßartigen Belastungen andere Zahlenwerte ergeben. Für Hyfil-Fasern in HR4-Epoxidharz z.B. stellten Sayers/Harris für stoßartige Belastungen (0,3 ms) einen Abfall auf etwa 70% der statischen Werte fest (Bild 8.80). Untersucht wurden von ihnen UDV und KV.

Der Abfall der Kurven im obigen Bild widerspricht dem Verhalten viskoelastischer Materialien (einer Matrix), die bei plötzlicher Belastung höhere Werte zeigen (keine Zeit für Krieeffekte) als

bei statischer Belastung. Als Erklärung kann wohl angegeben werden, daß das bei Faserverbunden vorliegende Randproblem zum Tragen kommt, weil die damit verbundenen Spitzenschubspannungen keine Zeit zum Abbauen haben. Die von Sayers/Harris verwendeten Plattenstreifen waren aus UDV und  $0^{\circ}+90^{\circ}$  Kreuzschichtverbund ( $\varphi = 60\%$ ) in Streifen von  $2" \times 0,3" \times 0,3"$  ( $\approx 30$  Schichten,  $l/d = 5,0$ ,  $l = 1,5"$ ), der Fallbär wog  $14,3$  lb.

Tabelle 7.55 stellte einen Vergleich der Bruchenergien mehrerer Werkstoffe dar. Es zeigte sich als wesentliches Ergebnis, daß die Energieaufnahme bis zum Bruchbeginn ähnlich groß ist. Für eine rein elastisch zunehmende Stoßenergie ergeben sich deswegen auch bei Faserverbunden keine Probleme. (Dies wird z.B. bei Autokarosserien aus GFK für niedrige Aufprallgeschwindigkeiten ausgenutzt).

Wie in Kapitel 7 angegeben teilen sich die Brucherscheinungen in FB und ZFB auf, wobei ZFB Harz- und Grenzschicht (Interface)-Risse beinhaltet. Um eine große stoßartige Beanspruchung aufnehmen zu können, müssen die mit diesen Brucherscheinungen verbundenen Bruchenergien so hoch wie möglich sein. Die Höhe dieser Bruchenergien kann sehr unterschiedlich sein. Es seien hier nur einige Werte für CFK gegeben: bei UDV ergaben sich für ZFB z.B.  $0,1 \text{ kJm}^{-2}$  für ein bestimmtes CFK-System; je nach Auftreten von Faserbrücken ergeben sich Steigerungen um eine Größenordnung [Dorey]. Kommen oberflächenbehandelte Fasern zum Einsatz, so ist bei transversalen Rissen der Wert  $20 \text{ kJm}^{-2}$  und bei unbehandelten Fasern der Wert  $60 \text{ kJm}^{-2}$  erreichbar.

Wenn vielschichtige Lamine zur Anwendung kommen, dann nimmt das Bauteil nach Bruchbeginn noch viel Energie auf. Es führen nämlich die Faserbrücken zu Brucherscheinungen an der Rißspitze, die derjenigen plastischer Zonen bei Metallen vergleichbar ist und die Spannungskonzentration herabsenkt. Man kommt dadurch dem Ziel näher, ein dem Plastizieren bei Metallen ähnliches Verhalten zu erreichen.

Zur Heraufsetzung der Schlagfestigkeit von Faserverbunden wurden verschiedentlich sogenannte hybride Faserverbunde untersucht. Perry/Adams fügt CFK als dritte Komponente (neben C-Fasern und Epoxidharz) Glas, Kevlar 49 und Nylonfasern zu. Unter Anwendung unterschiedlichen Schichtaufbaus konnten sie erhebliche Verbesserungen der Schlagfestigkeit erzielen, allerdings ging das zum Teil auf Kosten der statischen Festigkeitswerte. Bild 8.81 zeigt die Energie und

den Kraftverlauf beim Schlag und außerdem die zerstörte Probe.

Weitere Versuchsergebnisse lieferten Novak/De Crescente für faserparallel belastete UDV aus CFK, BFK und GFK. Hier sollen aber nur noch einige interessante Ergebnisse von Chamis/Hanson/Serafini vorgestellt werden.

Diese Verfasser untersuchten theoretisch und praktisch mit dem in Bild 8.82 aufgeführten, schematischen Versuchsaufbau viele verschiedene UDV. Ihre Untersuchungen ergaben, daß die faserparallele Schlagbelastbarkeit durch die Faser bestimmt wird, wenn  $E_f/E_m > 20$ . Die Quer- und Schub-Schlagbelastbarkeit hängt im wesentlichen von der Matrix (Bilder 8.83) und dem erzielten Faservolumenanteil ab.

Eine Zusammenstellung aller von ihnen im faserparallelen (longitudinal) und quer zur Faser (transversal) erreichten Izod-Schlagenergien findet man in Bild 8.84.

### Durchstoßfestigkeit

Bei dünnwandigen Tragstrukturen, die schlagartig von einer Masse getroffen werden, tritt das Problem der Durchstoßfestigkeit von Platten auf. Es sind dabei im wesentlichen die Belastungsgeschwindigkeit, die Energie des auftreffenden Mediums und die Prallfläche gegenüber der Gesamtstrukturfläche von Wichtigkeit [STP 568].

Werden dabei Faserverbunde, die aus spröden Fasern (z.B. C-Fasern) in einer spröden Matrix bestehen, stoß- bzw. schlagartig belastet, so kann die Energie durch elastisches Verhalten und/oder Brucharbeit aufgenommen werden [Dorey]. Bei sehr schneller Belastung wird die Struktur einfach durchgeschlagen. Bei Metallen gibt es hingegen noch die dritte Möglichkeit, die Stoßenergie über plastische Verformungen aufzunehmen, wie wir es in Bild 8.79 gesehen haben. Es kann durchaus sinnvoll sein, einen Durchschlag in Kauf zu nehmen (bei großer Auftreffgeschwindigkeit), allerdings nur dann, wenn eine ausreichend große Restgestigkeit vorliegt. Bei der Auslegung ist also jeweils die Frage zu stellen: Welche Zerstörung kann toleriert werden? Mittlere Geschwindigkeiten (lt. Dorey ca. 70 m/s) bringen meistens die größten Schwierigkeiten, da bei ihnen die Zerstörung kleinere Restspannungen bedingt. Daß der Zerstörungsbereich nicht zu groß wird, kann durch Aufbringen eines Glasgewebes erzwungen werden.

Dem Ziel, möglichst schlag- und durchstoßfeste Strukturen zu erhalten

kommt nicht allein durch Verwendung von Materialien mit relativ guten Werten aus einem oder mehreren gezielten Schlagversuchen näher. Man muß vielmehr drei Dinge beachten: Erstens möglichst viel Aufprallenergie elastisch aufzufangen, zweitens viel Brucharbeit zu erzielen, sowie drittens möglichst hohe Restfestigkeiten nach einem Stoß zu haben.

#### 8.6.2. Oftmalige Schlagbelastung

Dauern Schlagbelastungen länger an, so müssen Wöhlerkurven aufgestellt werden als Funktionsverlauf zwischen Schlagstärke und Schlagzahl. Die Schlagstärke (= Schlagarbeit) wird aus dem Gewicht und der Fallhöhe als Arbeitsintegral ermittelt. Bei gleicher Schlagarbeit liefern größere Gewichte bei kleineren Fallhöhen höhere Beanspruchung.

Als Dauerschlagfestigkeit gilt [Wellinger/Krägeloh] entweder die auf den Probenquerschnitt bezogene Dauerschlagarbeit oder die entsprechende Spannung in der Probe. Als Dauerschlagarbeit oder Grenzschatlagarbeit gilt die größte Schlagstärke, die von der Probe ohne Bruch und ohne bleibende Formänderung theoretisch unendlich oft ertragen wird. Für Stähle gibt es eine Dauerschlag(biege)festigkeit, die bei der Dauerschwing(biege)festigkeit liegt. Für Faserverbunde sind noch keine Angaben erhältlich.

Dauerschlagwerke unterwerfen Proben Biegungs-, Zug-, Druck- oder kombinierten Beanspruchungen. Die dabei verwendeten Prüfmaschinen unterscheiden sich nach der Art der Erzeugung der Schlagenergie. Ihre Leistungsfähigkeit hängt davon ab, ob sie für Ein-Schlagversuche oder Dauer- bzw. Zeitschlagversuche benutzt werden.



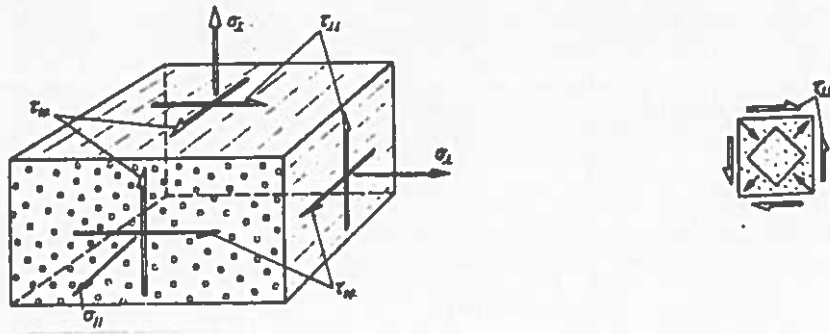


Bild 8.1 Die Beanspruchungsarten bei Faserverbund [Puck, 1968]

Beanspruchungsart		Festigkeit [kp/mm <sup>2</sup> ]		Bruchdehnung bzw. -schiebung [%]	
		des GFK	des Harzes	des GFK	des Harzes
$\sigma_{II}$	Zug	110	8	2	3
	Druck	70	12 bis 14	1,3	> 10
$\sigma_I$	Zug	1,4 bis 4	6	0,1 bis 0,25	3
	Druck	12 bis 14	12 bis 14	1	> 10
$\tau_{II}$		4 bis 6,5	4 bis 6	2 bis 3	8 bis 12
$\tau_{I\#}$		1,4 bis 4		0,2 bis 0,5	

Bei  $\sigma_I, \tau_{II}$  und  $\tau_{I\#}$  gelten die niedrigeren Werte für GFK mit Epikote 162, die höheren für GFK mit Araldit CY 232.  
 $\varphi = 65 \%$

Tabelle 8.1 Anhaltswerte für Festigkeiten und Bruchverformungen von unidirektionalem Roving-GFK und das verwendete Harzsystem [Puck, 1968].

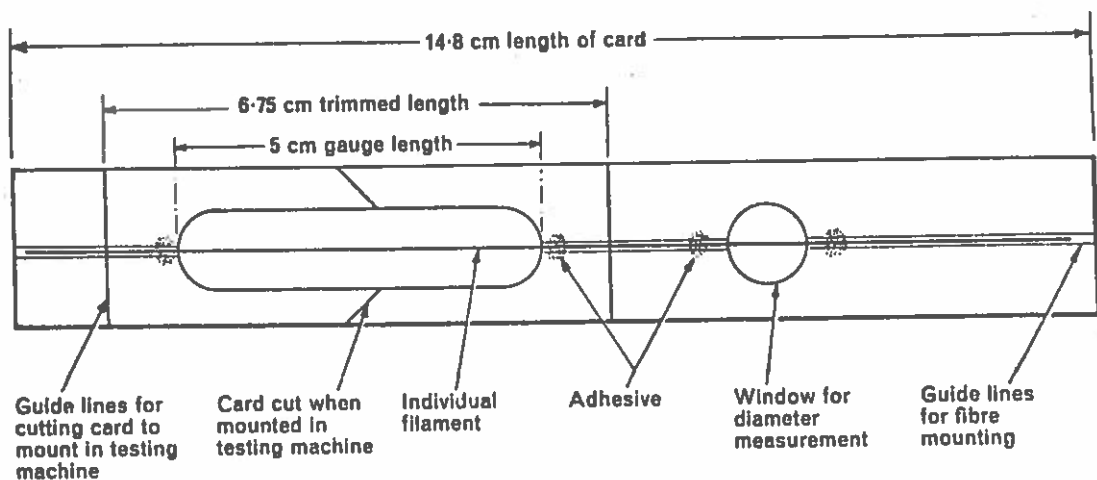


Bild 8.2 Einzelfaser. Zugfestigkeitsprüfung bei Courtauld

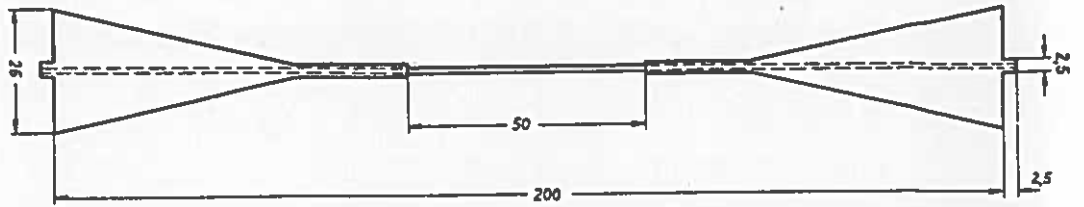


Bild 8.3 Probekörper für den Strangversuch

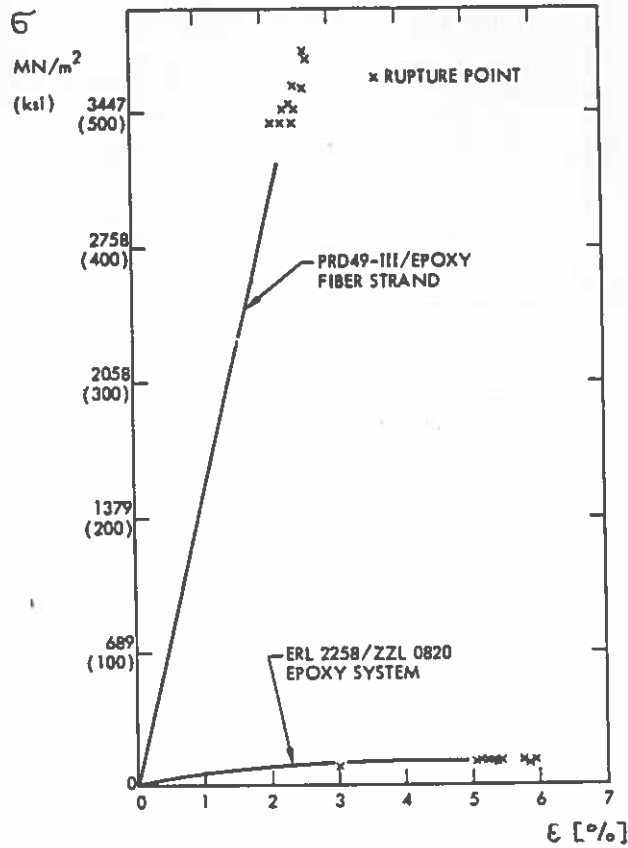


Bild 8.5

Spannungs-Dehnungskurve für ein Aramidfaser Kevlar 49III/Epoxidharzsystem (Faserwerte). [Chiao u.a., STP 546]

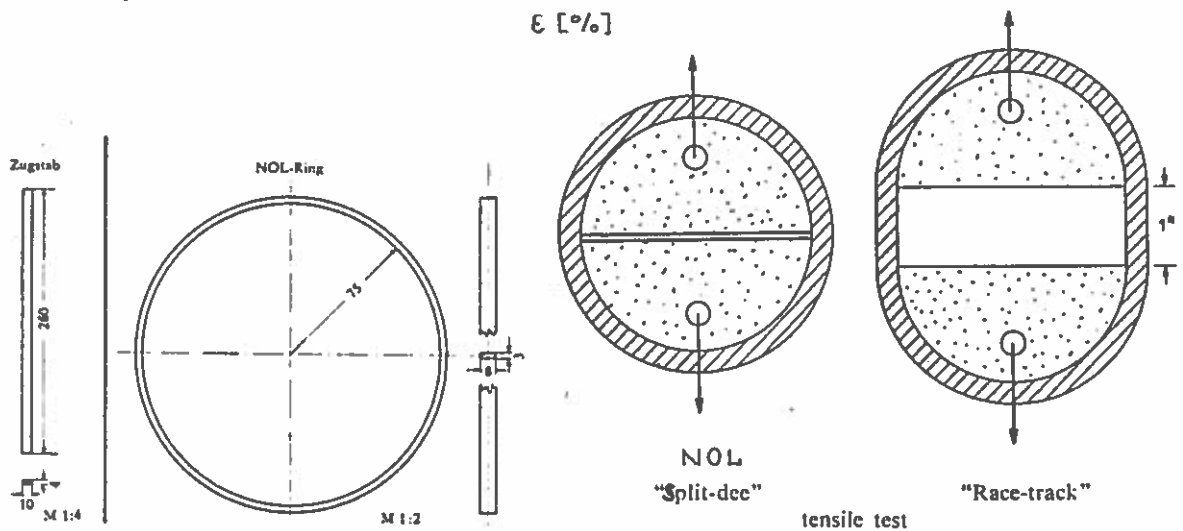
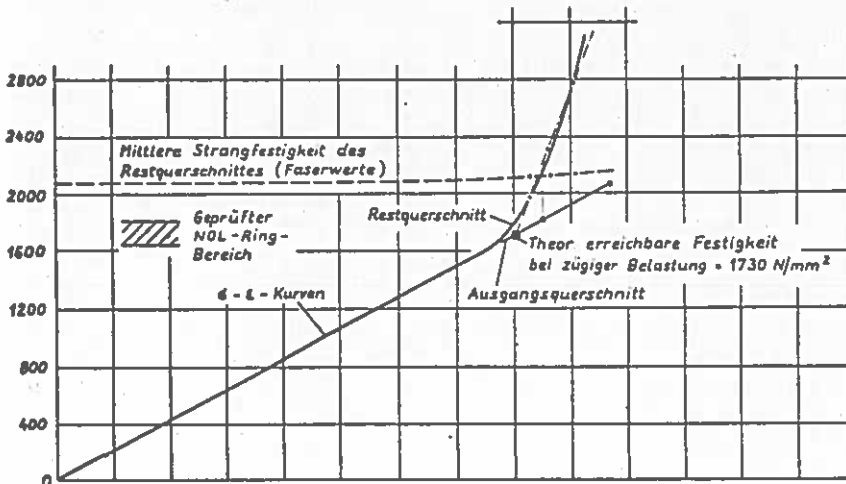
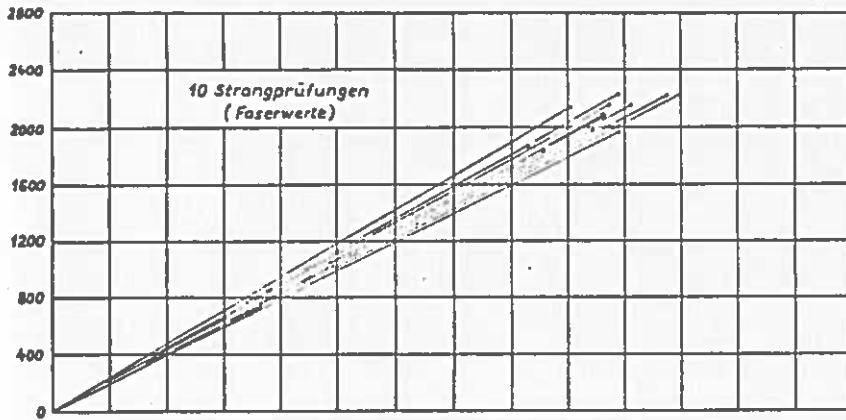
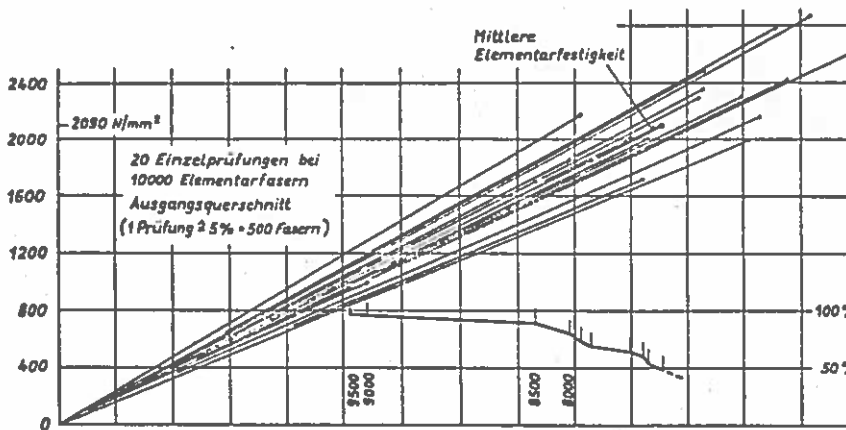


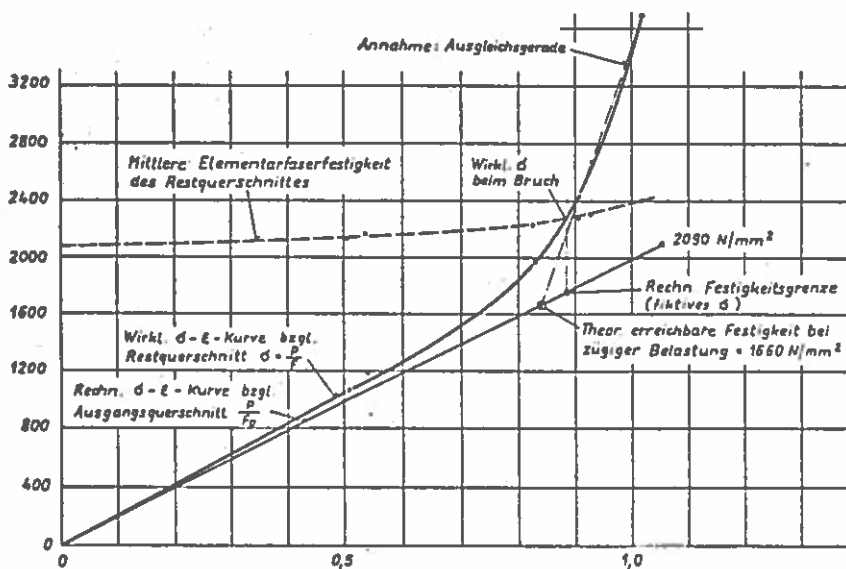
Bild 8.6 NOL-Ringe zur Prüfung von kunstharzgebundenen Rovings (aus [Puck/Wurtinger] und [Wendt u.a.] )



Theor. Ausnutzung  
 $\frac{1730}{2090} = 83\%$

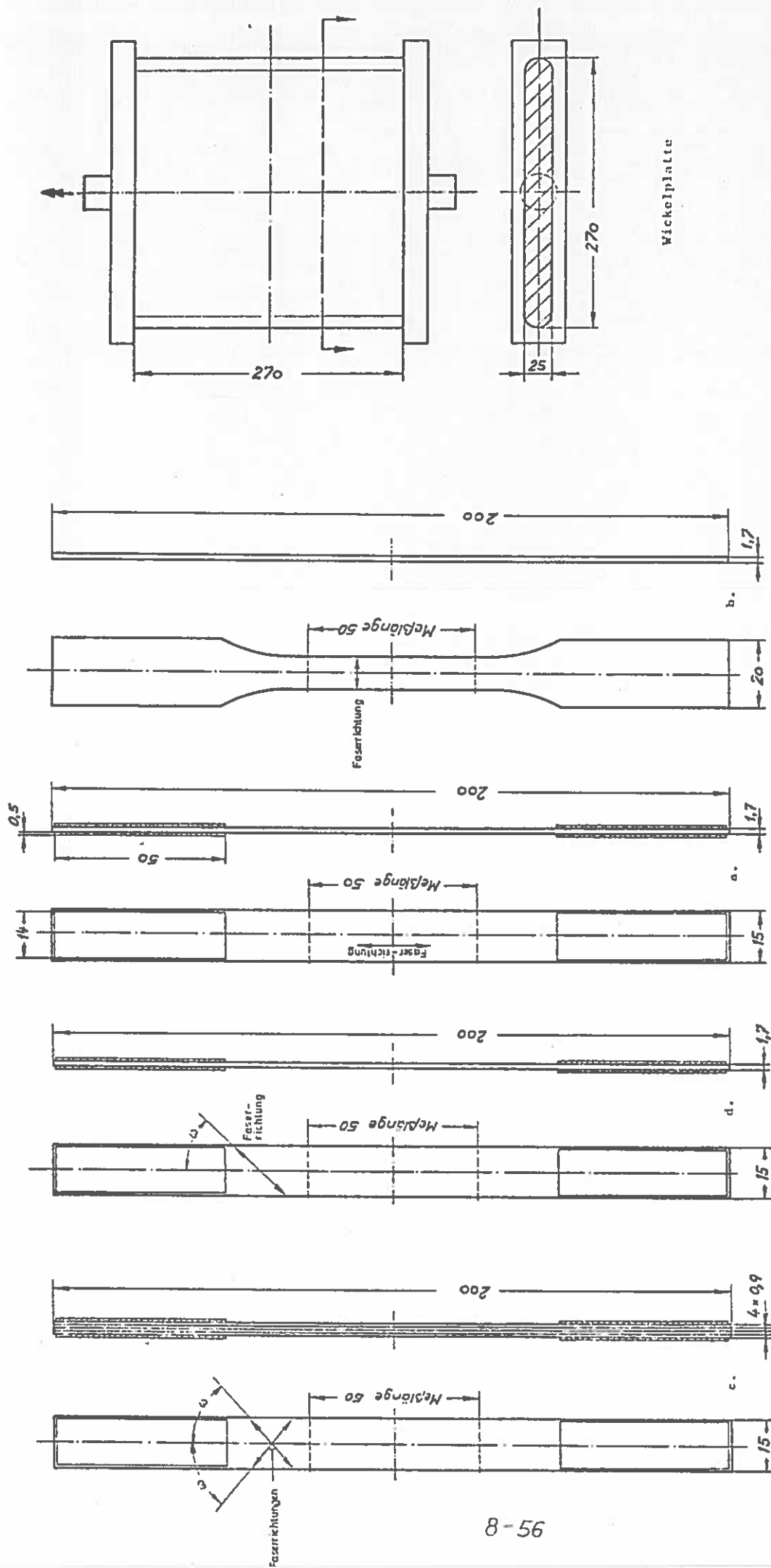


$\sigma_{elast} = 2090 \text{ N/mm}^2$   
 Dehnung 1,06 %  
 $E\text{-Modul} = 2,0 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$   
 $\nu_c = 23,9\%$



Theor. Ausnutzung  
 $\frac{1660}{2090} = 79,4\%$

Bild 8.4 Faser- und Strangprüfungen und ihre Auswertung  
 Beispiel: Grafil A-S, Epoxidharz,  $\nu = 56\%$ , (vgl. [Pepina])



Probekörper

- a. Längszugprobekörper nach DIN 53455 Form 5 mit Stahlblech-Aufleimer
- b. Querszugprobekörper nach DIN 53455 Form 3

Probekörper

- c. Mehrschichtprobekörper für einen AVV mit Stahlblech-Aufleimer
- d. Längszugprobekörper für die UD-Schicht mit Stahlblech-Aufleimer

Bild 8.7 Zugprobekörper, wie sie bei MAN-NT verwendet werden [Pichler]

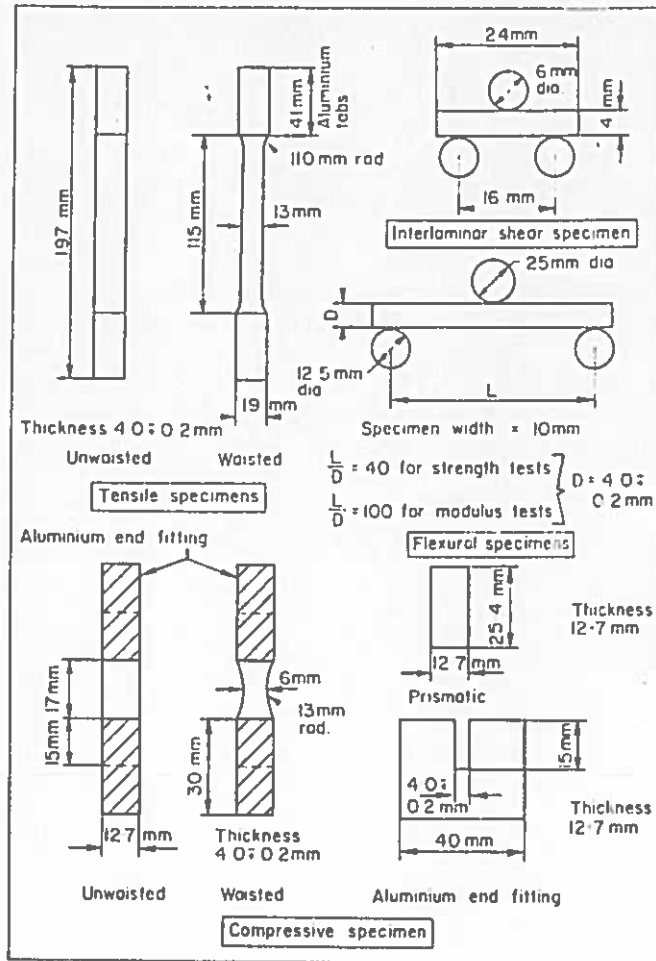


Bild 8.8 Verschiedene Faserverbundproben, wie sie von Holmes/Al-Khayat verwendet werden.

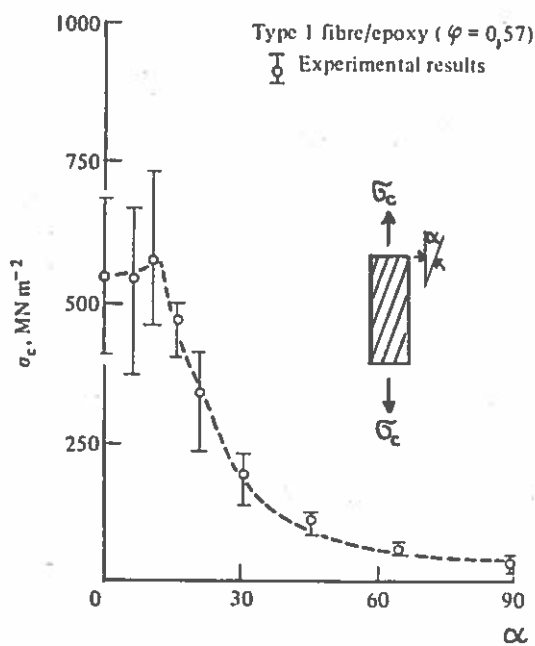


Bild 8.9

Die Abhängigkeit der Zugfestigkeiten (Faserwerte) von CFK-UDV vom Faserorientierungswinkel [Dimmock/Abrahams]



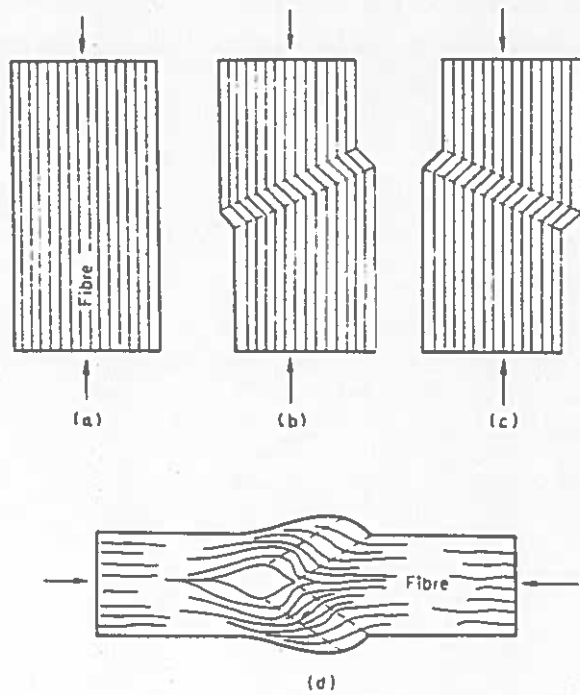


Bild 8.12

Formale Bruchbilder von FK unter Druckbelastung [Berg/Salama]

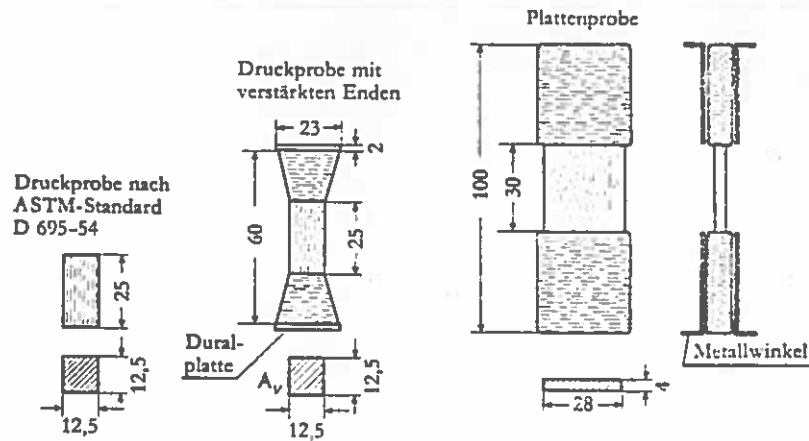


Bild 8.13 Verschiedene Druckproben [Puck/Wurtinger]

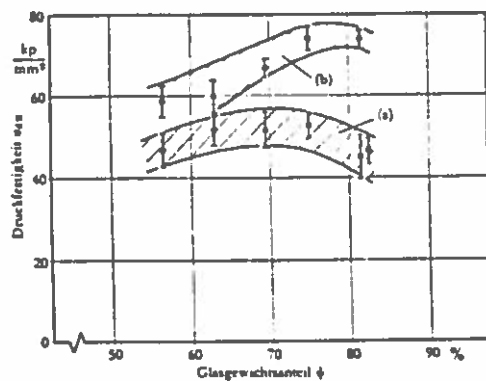


Bild 8.14

Vergleich der Druckfestigkeiten  $G_{dB}$  in Abhängigkeit vom Glasgewichtsanteil  $\phi$  [Puck/Wurtinger]

- a) Druckproben nach ASTM - Standard D 695 - 54
- b) Druckproben mit verstärkten Enden

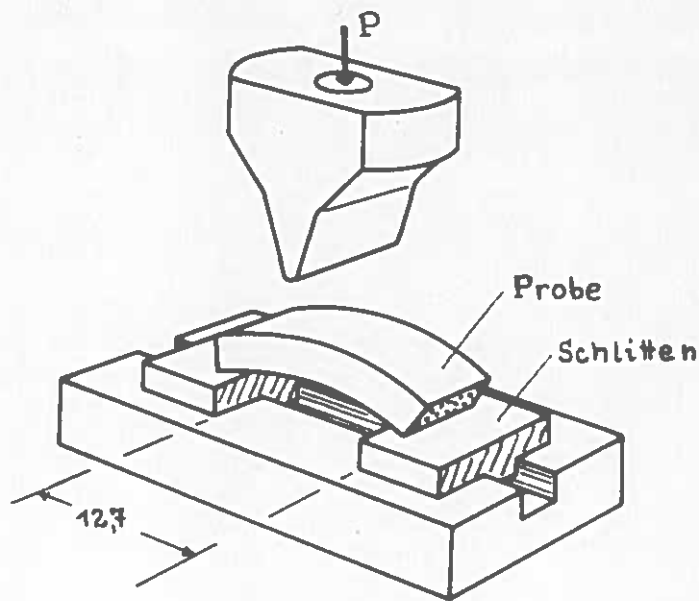


Bild 8.15 Biegescherfestigkeitsprobe (NOL-Ring-Stück)

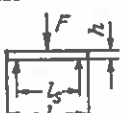
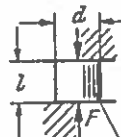
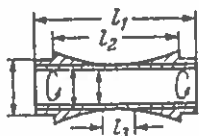

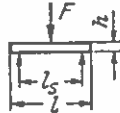

Eigenschaft	Prüfart	Abmaße des Prüfkörpers	Berechnungsformel	Norm
Biegescherfestigkeit $\tau_b$ [kp/mm <sup>2</sup> ]	Flachstab 	$l = 20 \text{ mm}$ $l_s = 16 \text{ mm}$ $h = 4 \text{ mm}$ $b = 10 \text{ mm}$ $l/l_s = 4$ $\varphi_F = 40 \pm 1,5 \text{ Vol.-%}$	$\tau_b = \frac{3 F}{4 b h}$	ASTM D 2344-65 T
Schneidscherfestigkeit $\tau_s$ [kp/mm <sup>2</sup> ]	Rundstab  Faserrichtung	$d = 10 \text{ mm}$ $l = 10 \text{ mm}$ $\varphi_F = 40 \pm 1,5 \text{ Vol.-%}$	$\tau_s = \frac{F}{l d}$	[16]
Schubfestigkeit aus Torsionsversuch (bei Bruch) $\tau_t$ [kp/mm <sup>2</sup> ]	Torsionsrohr 	$d_1 = 107$ $l_1 = 270$ $d_2 = 100$ $l_2 = 190$ $d_3 = 103$ $l_3 = 110$ $c/p = 56 \text{ bis } 63 \text{ Vol.-%}$	$\tau_t = \frac{2 M_t}{\pi d_m^3 l}$	DIN-Entwurf 16944
Biegespannung (Biegefestigkeit) $\sigma_{b(B)}$ [kp/mm <sup>2</sup> ]	Rundstab 	$l = 80 \text{ mm}$ $l_s = 60 \text{ mm}$ $d = 4 \text{ mm}$ Fasergehalt $\varphi_F = 40 \pm 1 \text{ Vol.-%}$	$\sigma_{b(B)} = \frac{8 F_{(\max)} l_s}{\pi d^3}$	ISO R 175 DIN 53452
Elastizitätsmodul $E_b$ [kp/mm <sup>2</sup> ]			$E_b = \frac{4 F l_s^3}{3 \pi d^4 f}$	DIN 53457
Biegespannung (Biegefestigkeit) $\sigma_{b(B)}$ [kp/mm <sup>2</sup> ]	Flachstab 	$l = 120 \text{ mm}$ $l_s = 100 \text{ mm}$ $h = 4 \text{ mm}$ $b = 10 \text{ mm}$ $\varphi_F = 40 \pm 1,5 \text{ Vol.-%}$	$\sigma_{b(B)} = \frac{3 F_{(\max)} l_s}{2 b h^3}$	ISO R 178 DIN 53452
Rechnerische Randfaserdehnung (bei Bruch) $\epsilon_{b(B)} [8]$			$\epsilon_{b(B)} = \frac{6 h}{l_s^3} f_{(\max)}$	[16]
Biegeweichselfestigkeit $\sigma_{wb}$ [kp/mm <sup>2</sup> ]	Gewickelter Flachstab, Prüfung quer zur Faser 	$l = 90$ $b = 18$ $h = 4$ $\varphi_F = 53 \text{ bis } 64 \text{ Vol.-%}$	$\sigma_{wb} = \frac{M_b 6}{b h^3}$	DIN 53180

Bild 8.16 Abmessungen der unterschiedlichen Prüfkörper und Berechnungsformeln [Holtmann/Menges/Harnier]



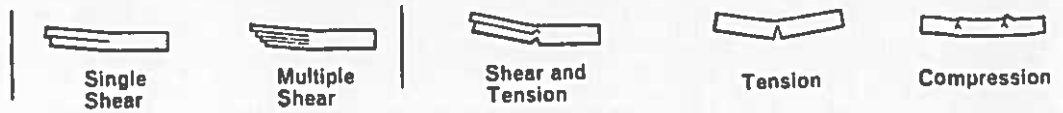


Bild 8.17 Brucharten bei Dreipunktbiegeprobe

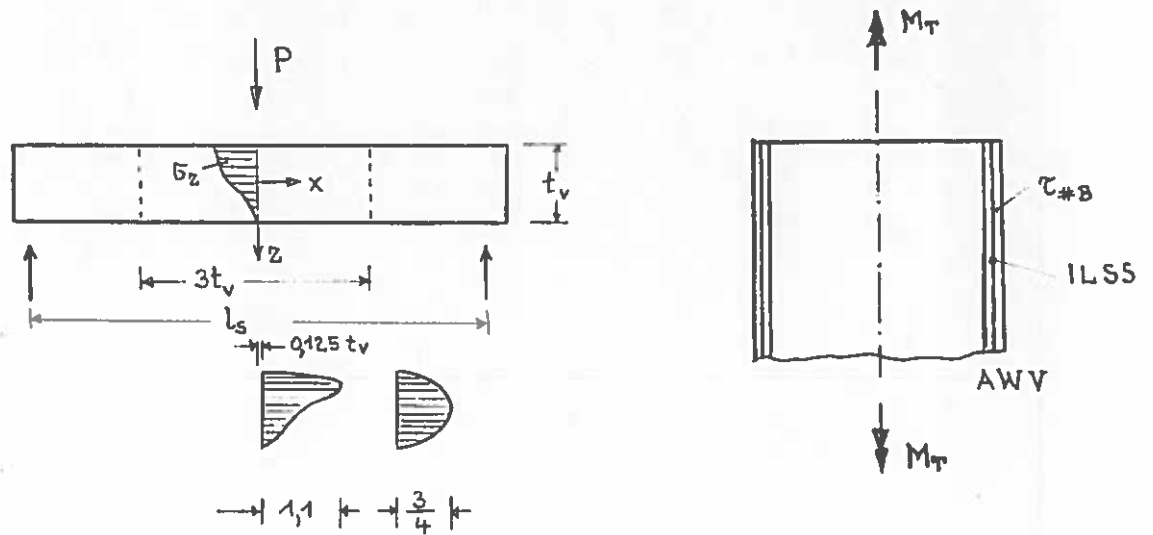
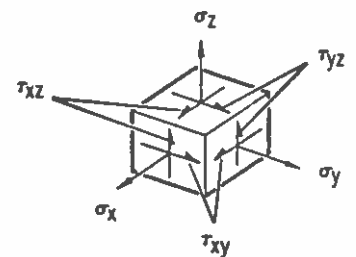
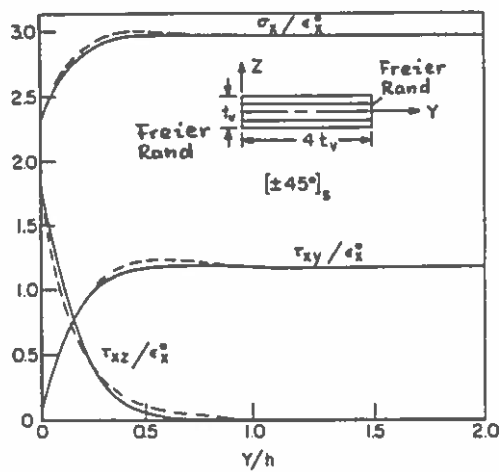


Bild 8.19 Schubspannungsgrößen beim AWV-Rohr

Bild 8.18 Maximale Schubspannungen im Lasteinleitungsbereich



Erklärung der Spannungen

Bild 8.20 Relative Spannungsverläufe im Bereich eines freien Randes einer Zugprobe [Whitney]

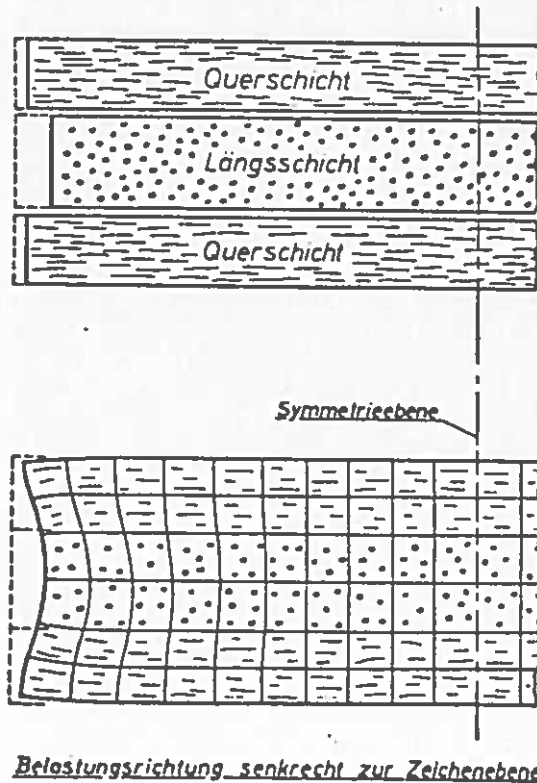


Bild 8.21

Prinzipische Skizze zur Erklärung von Delaminierungen am Probenrand einer Zugprobe [Diss. Puck]

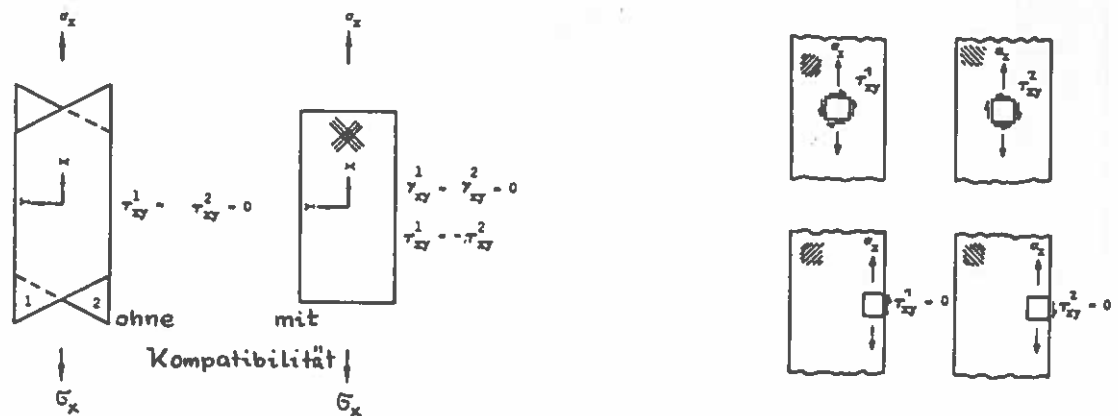


Bild 8.22/ Schubspannungsverhalten einer dünnen AWC-Zug-  
23 Probe im Innern und am Rande [Petit]

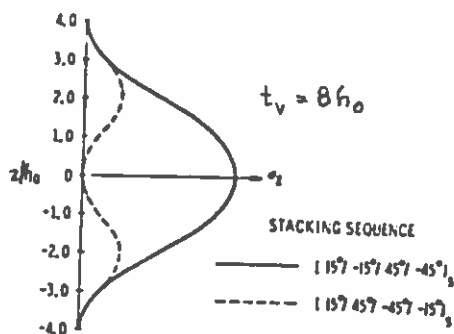


Bild 8.24

Verteilung der interlaminaren Normalspannungen  $\sigma_z$  am freien Rand als Funktion der Schichtfolge [Pagano/Pipes]

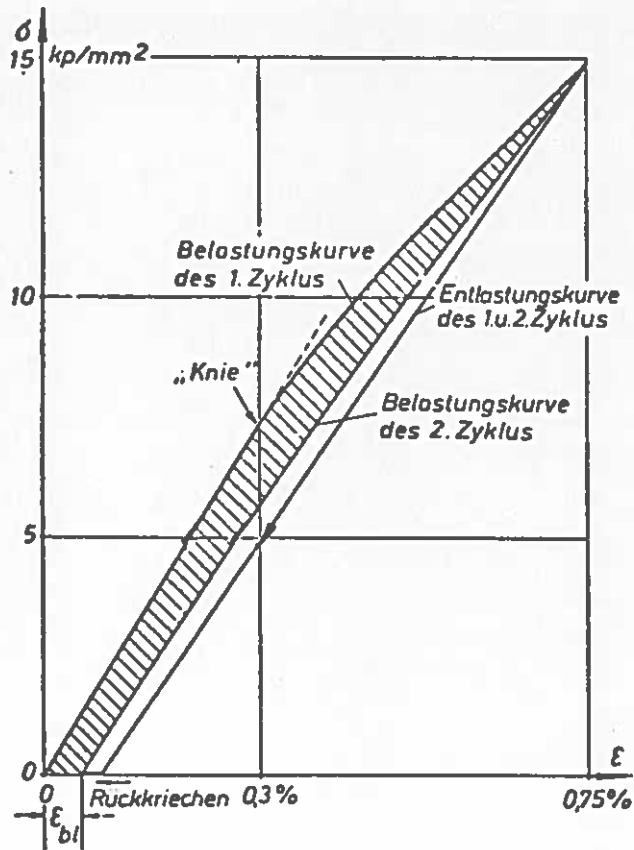


Bild 8.25

Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines GFK-Gewebe-Laminats mit Knie (schematisch) Gewebe 92 130 (Firmenbezeichnung der Interglas-Textil GmbH, Ulm/Donau) Glasvolumenanteil  $\varphi = 0,45, k_{II} = 0,5$ , [Schönwald, BW 983]

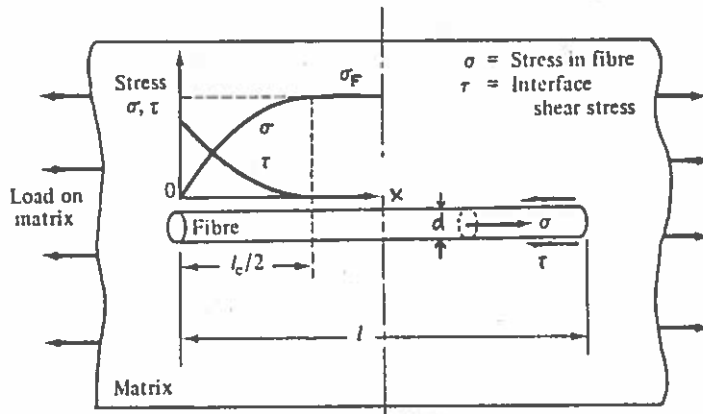


Bild 8.26 Zur kritischen Faserlänge  $l_c$  [Langley]

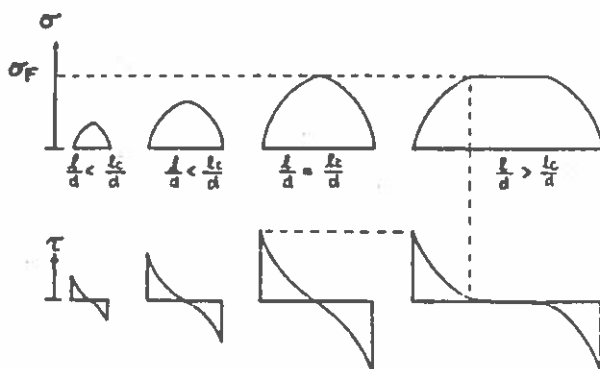


Bild 8.27

Spannungsaufnahme bei verschiedenen kurzen Fasern [Schuster/Scala]

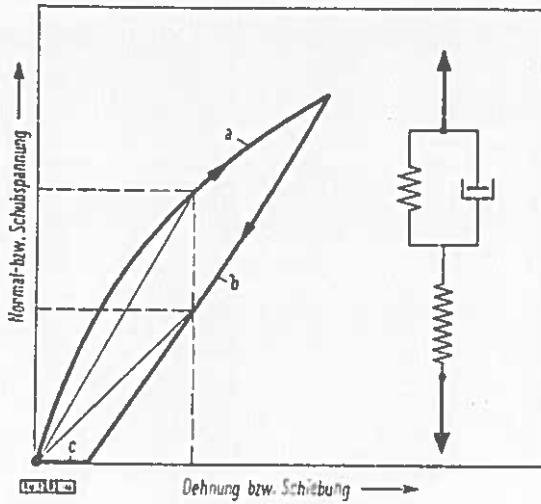


Bild 8.28

Typisches viskoelastisches Deformationsverhalten der Laminierharze und dessen mechanisches Modell ("Parallelschaltete" Feder und Dämpfer erfahren gleiche Verformung). Be- und Entlastung werden mit konstanter Verformungsgeschwindigkeit  $d\epsilon/dt$  bzw.  $d\gamma/dt$  durchgeführt  
 a Belastung, b Entlastung, c Zurückkriechen. [Puck, 1965]

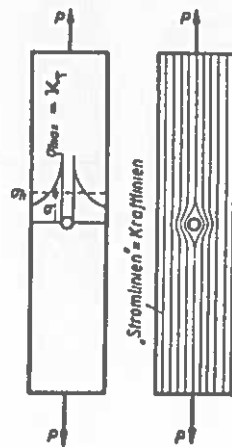


Bild 8.29

Spannungskonzentration und Kraftfluß bei Kerben [Wagner]

$$\sigma_n \approx \sigma_{\text{Brutto}}$$

**Small Hole Data Summary.\***

Specimen**	Static Strength (psi)
Control	67240
.062 in. Dia. Hole	45000
.031 in. Dia. Hole	51500
.015 in. Dia. Hole	60900

\*This work was sponsored by the Air Force Materials Laboratory under Contract F33615-69-C-1494.  
 \*\*Coupon specimens were 1.0 inch in width and 9.0 inches in length.

Tabellen 8.2

Abhängigkeit der Lochgröße bei Zugproben [Waddaps/Eisenmann/Kaminski]

**Large Hole Data Summary.\***

Specimen**	Static Strength (psi)	
	Actual	Corrected for Finite Width
Control	76000	76000
1.0 in. Dia. Hole	26600	27900
2.5 in. Dia. Hole	15900	22800
3.0 in. Dia. Hole	13250	23000

\*This work was sponsored by the Air Force Materials Laboratory under Contract F33615-69-C-1494.  
 \*\*Coupon specimens were 5.0 inches in width and 38.0 inches in length. Isotropic width correction taken from Reference 3.

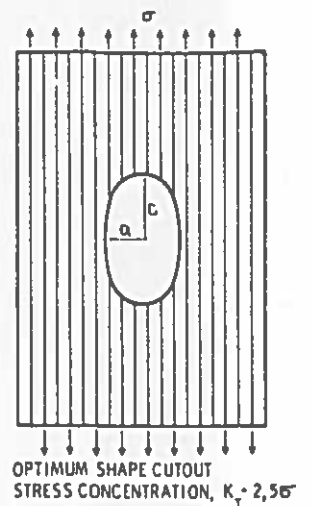
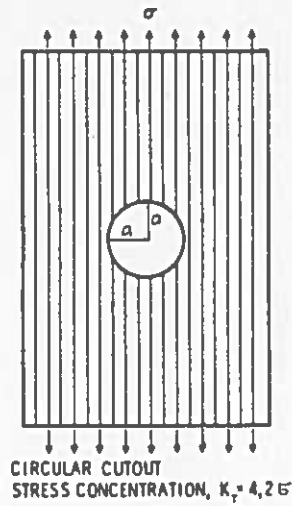
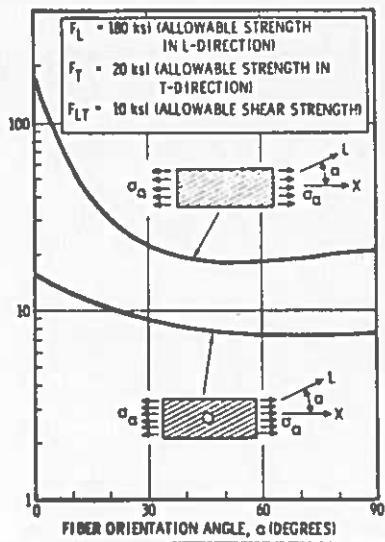
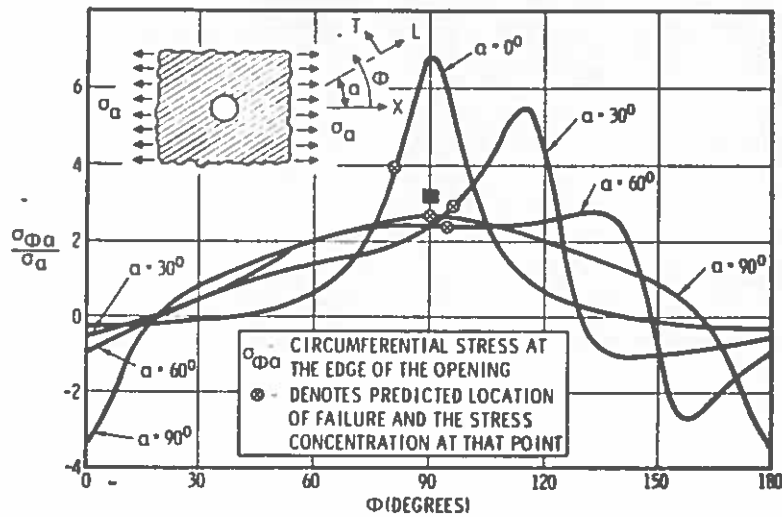


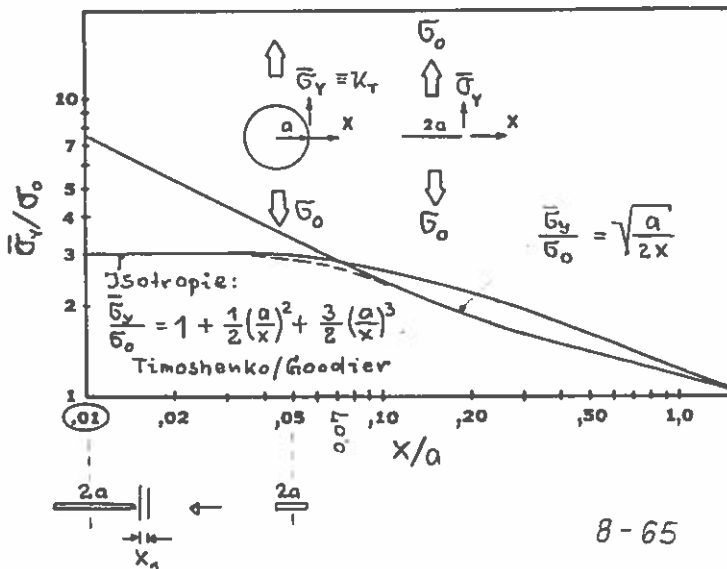
Bild 8.30 Abfall der ertragbaren Spannung  $\sigma_a$  einer Zugprobe als Funktion von Faserwinkel  $\alpha$  bei Vorhandensein eines Loches. BFK.

Bild 8.31 Vergleich der Spannungskonzentrationen bei Kreisloch und elliptischem Loch. Exp. Werte für UDV-Glas-Epoxidharz. [Grezczuk, 1974]



■ Bei Isotropie

Bild 8.32 Spannungskonzentration in einer anisotropen Bor-Epoxidharz-Platte. [Grezczuk, 1974]



$$K_a = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (\text{unendliche Platte})$$

$$\bar{\sigma}_y = K_a / \sqrt{2\pi x}$$

orthotrop und isotrop

Bild 8.33

Spannungen in der unendlichen Platte mit Loch und mit Durchgangsriß. Isotropie. [Cruse, 1973]

Alterungsursachen	Alterungsvorgänge	Alterungserscheinungen
<b>innere Ursachen:</b>	<b>chemische Vorgänge:</b>	
unvollständige Bildungsreaktion, molekulare Orientierungen, Eigenspannungen	Nach-Kondensation, Nach-Polymerisation, Abbau, Korrosion, Autoxydation	Nachschwindung, Verzug, Volumenzunahme, Elastizitätsmodul-Änderung, Festigkeits-Änderung, Dehnbarkeits-Änderung, Ribildung, Bruchbildung, Ab- bzw. Ausscheidungen, Verfärbungen
<b>äußere Ursachen:</b>	<b>physikalische Vorgänge:</b>	
Wärme, Temperaturwechsel, UV-Strahlung, ionisierende Strahlung, chemische Einflüsse, mechanische Beanspruchung	molek. Umlager., Relaxation, Nachkristallisation, Quellung, Weichmacherwanderung, Entmischung, Agglomeration	

Tabelle 8.3

Begriffe auf dem Gebiet der Alterung von Kunststoffen (nach DIN 50035). [Wuebcken]

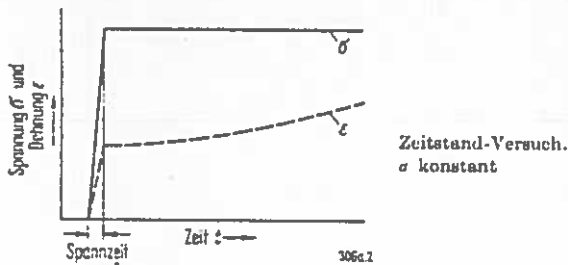
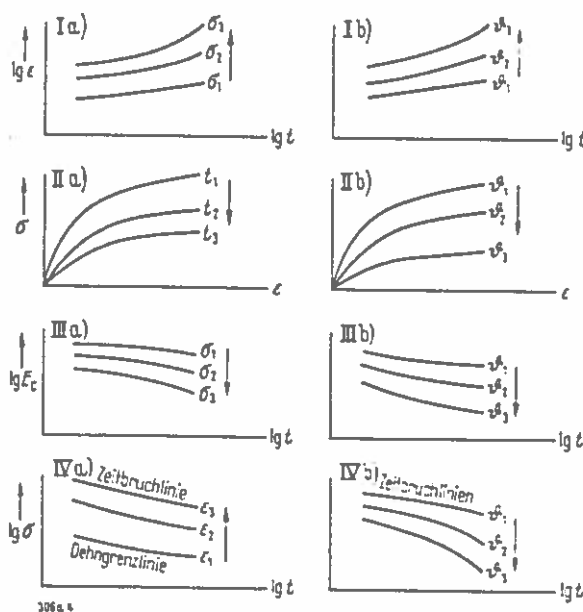
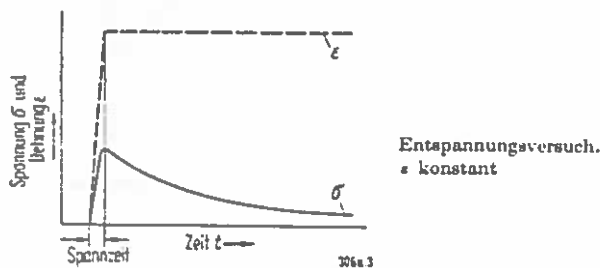


Bild 8.34

Zeitlicher Verlauf von Spannung und Dehnung bei statischen Langzeitversuchen. [Wuebcken]



- I Zeitdehnlinien
- Ia)  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$
- Ib)  $\sigma$  konstant
- $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$
- II Isochrome Spannungs-Dehnungs-Linien
- IIa)  $t_1 < t_2 < t_3$
- IIb)  $t$  konstant
- $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$
- III Kriechmodullinien
- $E_c$  Kriechmodul
- IIIa)  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$
- IIIb)  $\sigma$  konstant
- $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$
- IV Zeitstandsschaubild
- IVa)  $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$
- IVb)  $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$

Bild 8.35

Darstellungsarten für das mechanisch-thermische Verhalten der Kunststoffe. [Wuebcken]

111050119

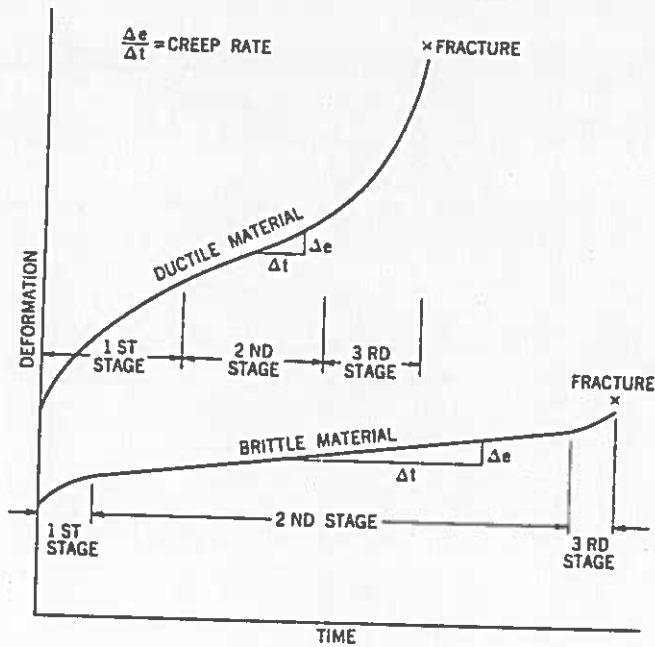


Bild 8.37

Kriechbereiche bei fließfähigem und sprödem Material

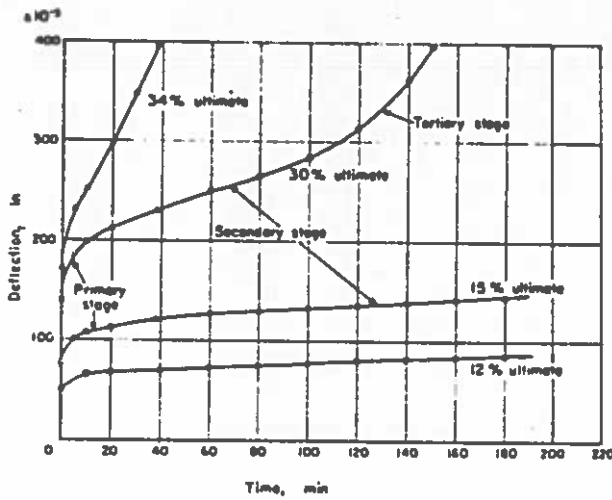


Bild 8.36

Kriechbereiche in Abhängigkeit von der Spannungshöhe (Polyesterharz/Glasmattenlaminat) [Steel]

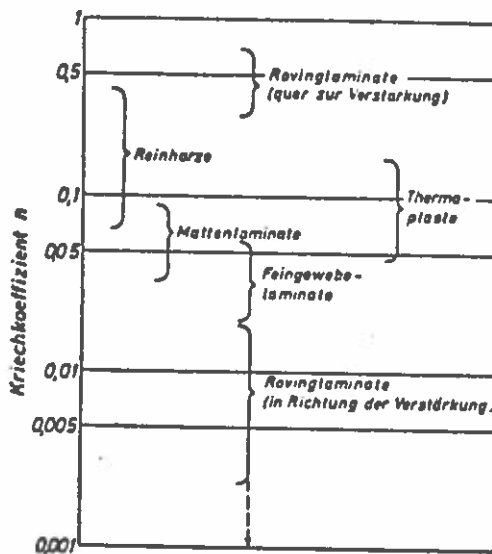


Bild 8.38

Kriechkoeffizienten für verschiedene GFK [Dölfen]

$$\epsilon(t) = \epsilon_0(1 - t^n)$$

$\epsilon_0$  bei  $t_1$  (= Zeiteinheit .t)

$\epsilon_1$  bei  $t_2$

$$n = \frac{\log \left[ \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 - 1} \right]}{\log \left[ \frac{t_2}{t_1} \right]}, t_1 = 1 \rightarrow n = \frac{\log \left[ \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 - 1} \right]}{\log t_2}$$

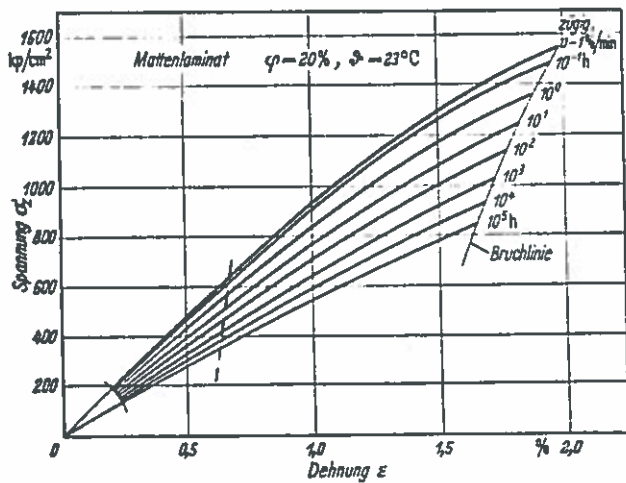
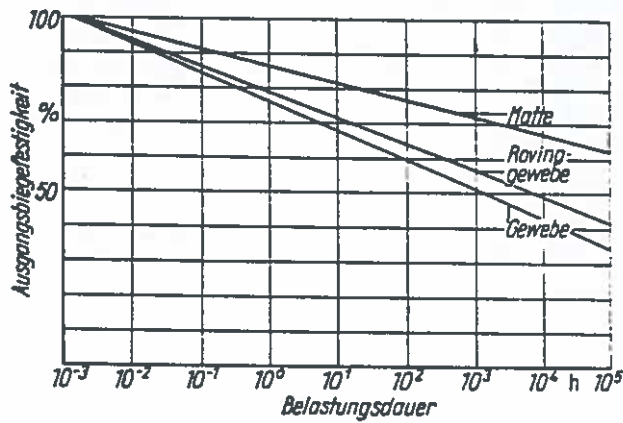
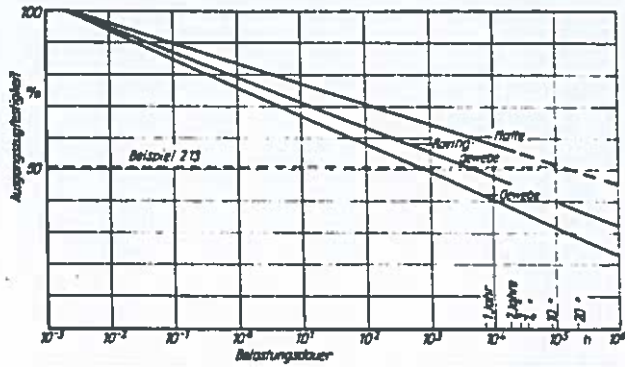
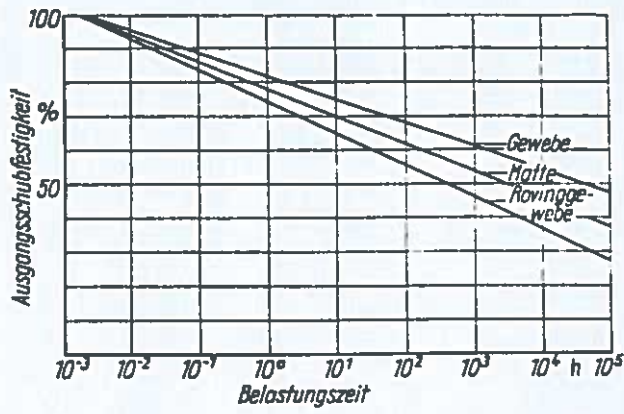


Bild 8.40

Isochrones Spannungs-Dehnungs-Diagramm von GFK-Polyesterharz-Mattenlaminaten [Neitzel]

Bild 8.39

Zeitstandverhalten von GFK-Mattenlaminaten bei verschiedenen Belastungsarten. Bindemittel Polyesterharz. (aus [Hintersdorf])

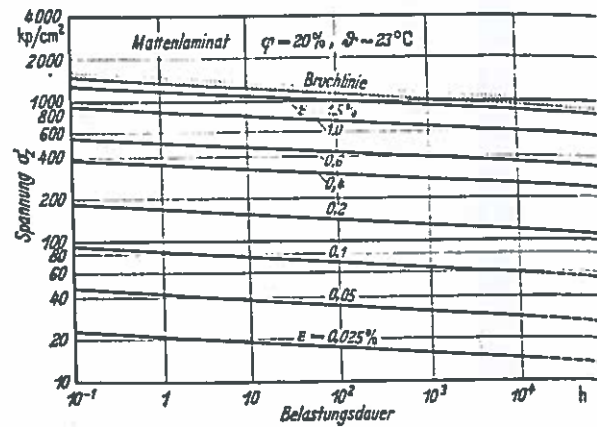


Bild 8.41

Zeitstand-Schaubild von GFK-Mattenlaminaten [Neitzel]



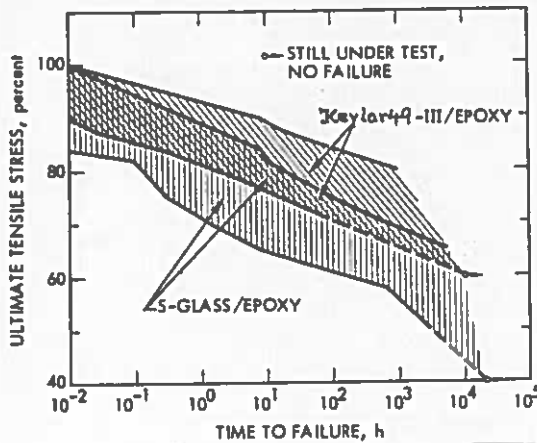


Bild 8.42 Vergleich von S-Glas/und Kevlar 49 III/Epoxidharz bzgl. Kriechen unter Zugbeanspruchung. [Chiao et al]

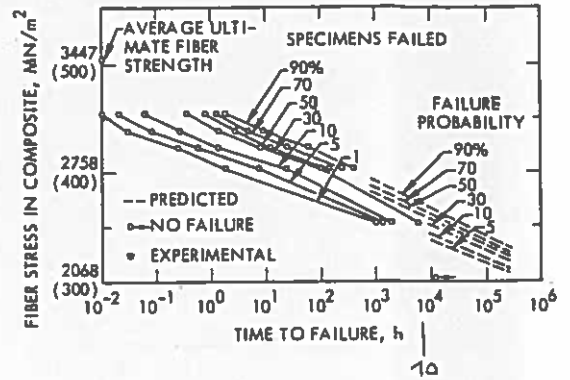


Bild 8.43 Ausfallwahrscheinlichkeitskurven für Kevlar 49 III/Epoxidharzstränge. Zugproben. [Chiao et al, STP 546]

Material	Orientation, deg	Ultimate Composite Tensile Strength, ksi	Creep Load, <sup>a</sup> %	Creep Rupture, h
S glass	0	260	85	0.01
			60	60
			51	10 <sup>4</sup>
			37	10 <sup>5</sup> (10 years)
Kevlar 49	0	200	80	2
			70	150
			60	10 <sup>4</sup>
			55	10 <sup>5</sup> (10 years)
Graphite	0	200	80	...
HT graphite @ 250°F	0/90	83	90	455
7075-T6 Alum.	...	70	96	100
		70	93	350

<sup>a</sup> Percent of static ultimate.

Tabelle 8.4 Kriechverhalten verschiedener Faserverbund-Werkstoffe [Freeman/Kuebeler]

- $\sigma_o$  = Oberspannung (dem Absolutwert nach)
- $\sigma_u$  = Unterspannung (dem Absolutwert nach)
- $\sigma_m$  = Mittelspannung =  $0,5(\sigma_o + \sigma_u)$
- $\sigma_a$  = Spannungsausschlag (Amplitude) =  $0,5(\sigma_o - \sigma_u)$
- $2\sigma_a$  = Schwingbreite der Spannung =  $\sigma_o - \sigma_u$
- $\sigma_D$  = Dauerschwingfestigkeit (Dauerfestigkeit)
- $R = \sigma_u/\sigma_o$ ,  $A = \sigma_a/\sigma_o$

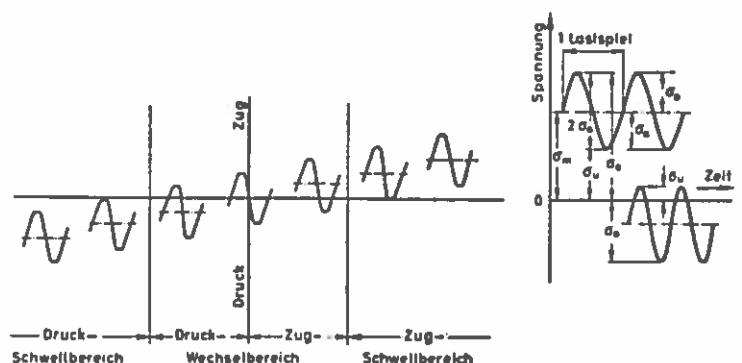


Bild 8.44 Begriffe der Schwingfestigkeit [Wagner]

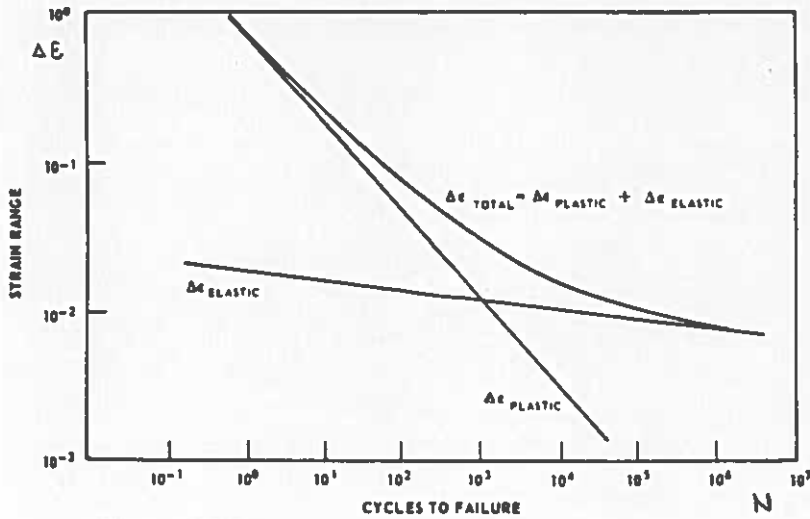


Bild 8.45

Gesamtdehnungsamplitude als Summe des plastischen und elastischen Anteils über der Zyklenzahl  $N$ . Doppeltlogarithmische Auftragung ([Manson], [Neitzell], [Grover])

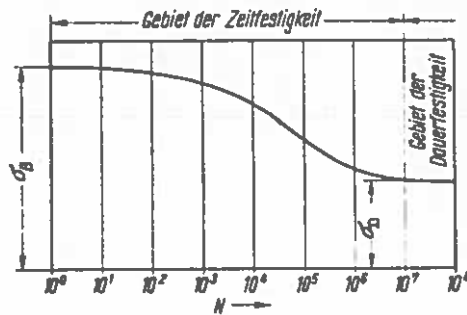


Bild 8.46

Wöhlerschaubild

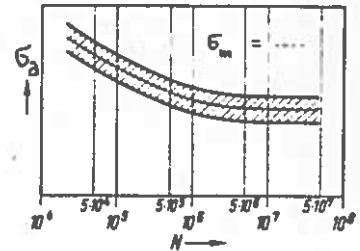


Bild 8.47

Streuung der Schwingfestigkeit, dargestellt im Wöhlerschaubild

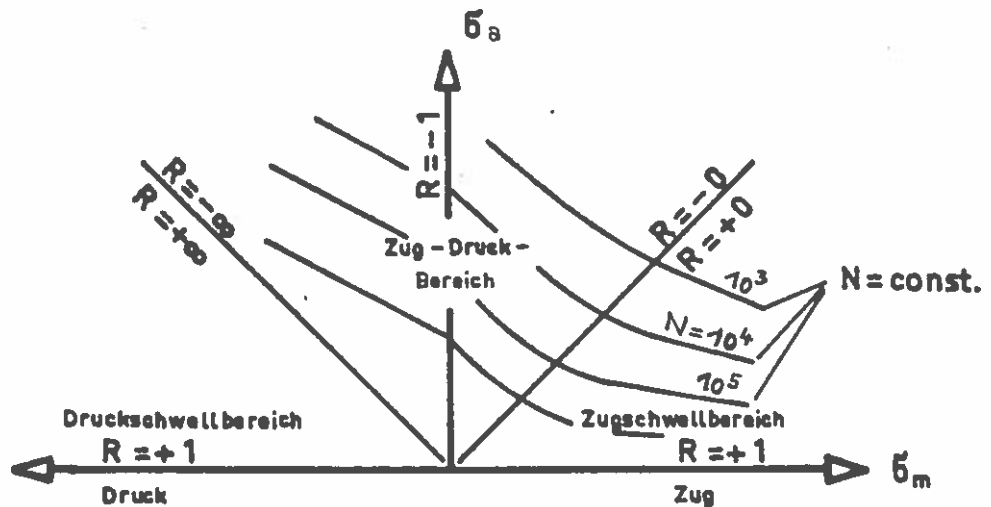


Bild 8.48 Schwingfestigkeitsdiagramm n. Haigh

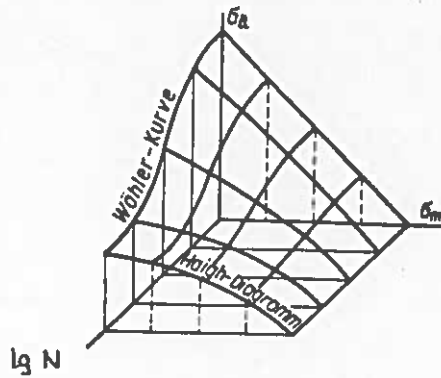


Bild 8.49

Räumlicher Zusammenhang  
zwischen Wöhlerkurve  
und Haighdiagramm. [Sors]

$N$  = ertragbare Last-  
spielzahl

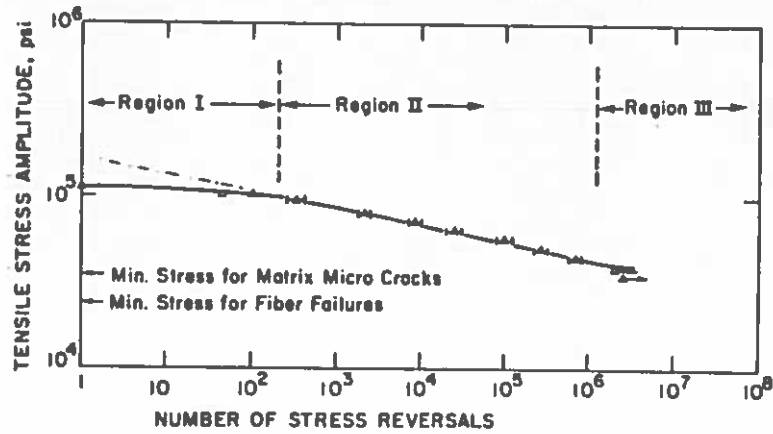


Bild 8.50

Einteilung der Wöhlerlinie in Bereiche. Zugschwell-  
versuch mit GFK-UDV. [Dharan]

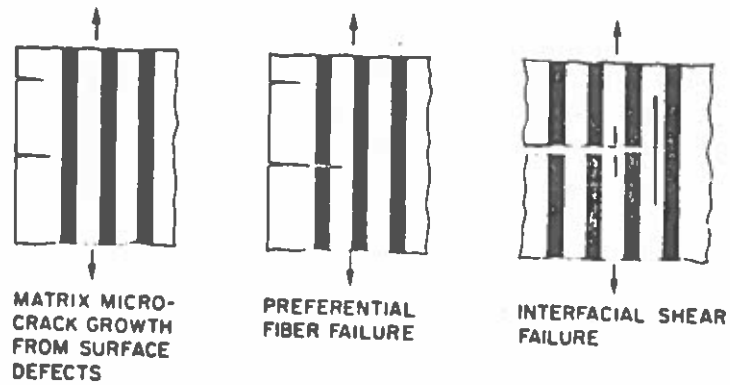
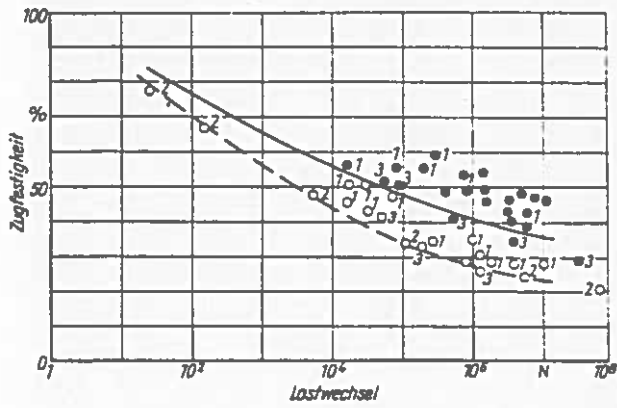
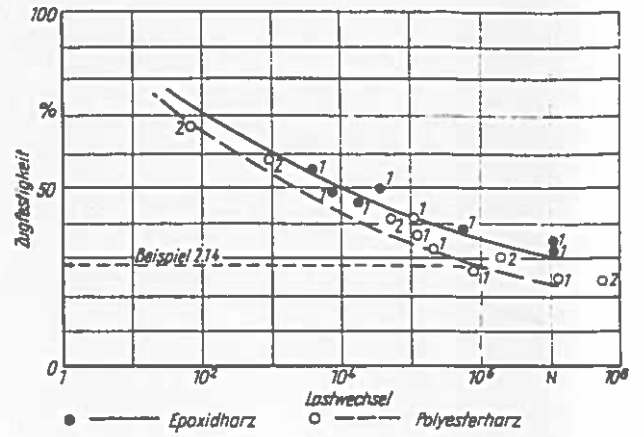


Bild 8.51

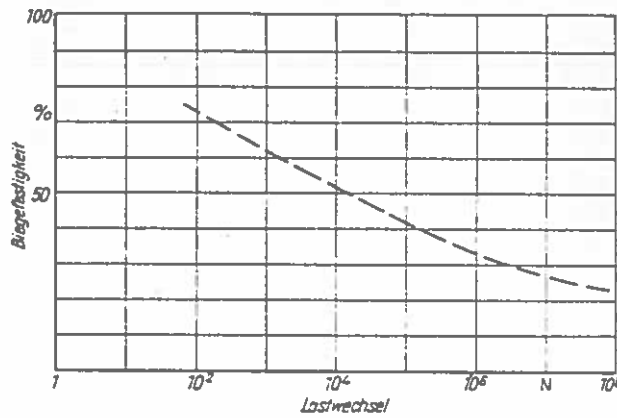
Bruchbildung bei Anriß (Region II)  
[Dharan, STP 569]



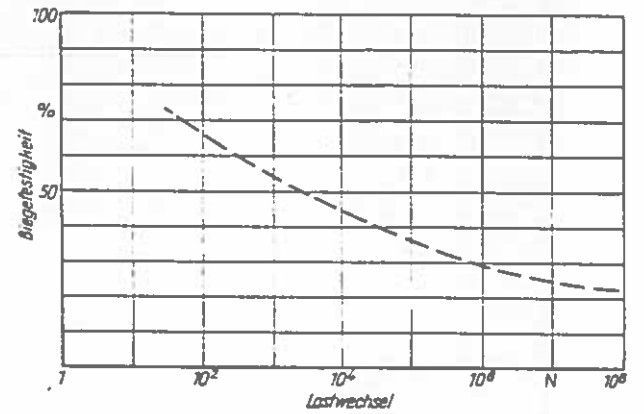
Wöhlerkurven für kreuzgewebeverstärkte Plaste bei Zug-Schwellbelastung  
1 nach [2.28]; 2 nach [2.30]; 3 nach [2.31]



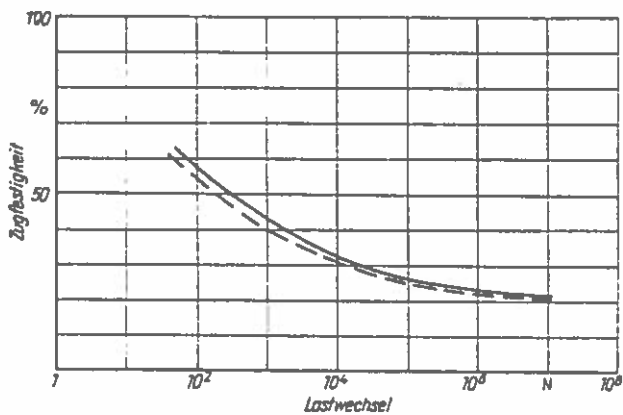
Wöhlerkurven für mattenverstärkte Plaste bei Zug-Schwellbelastung  
1 nach [2.28]; 2 nach [2.30] in [Hintersdorf]



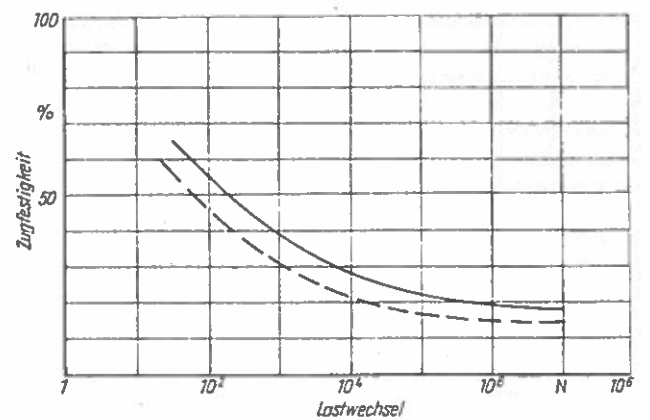
Wöhlerkurve für kreuzgewebeverstärkte Plaste bei Biege-Wechselbelastung nach [2.28]



Wöhlerkurve für mattenverstärkte Plaste bei Biege-Wechselbelastung nach [2.28]

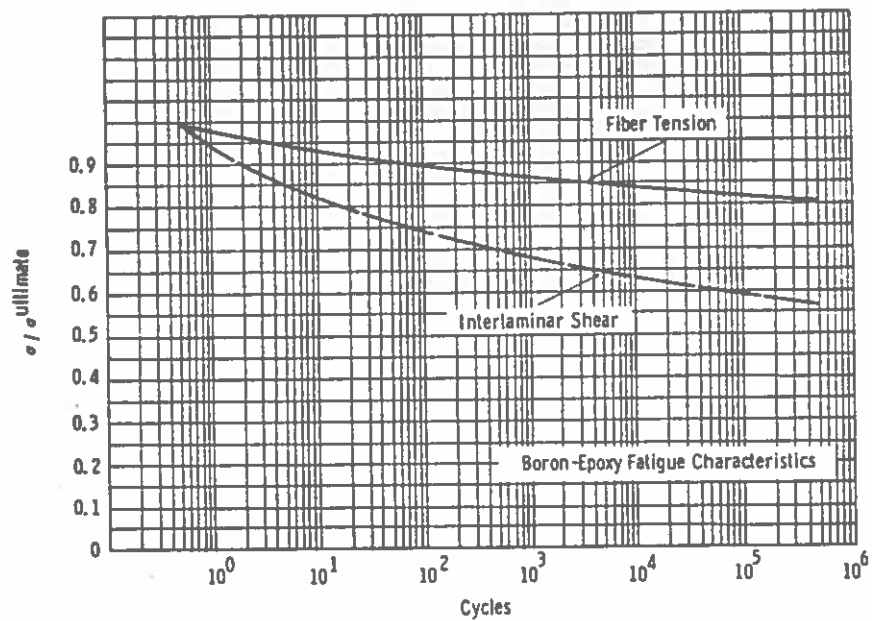
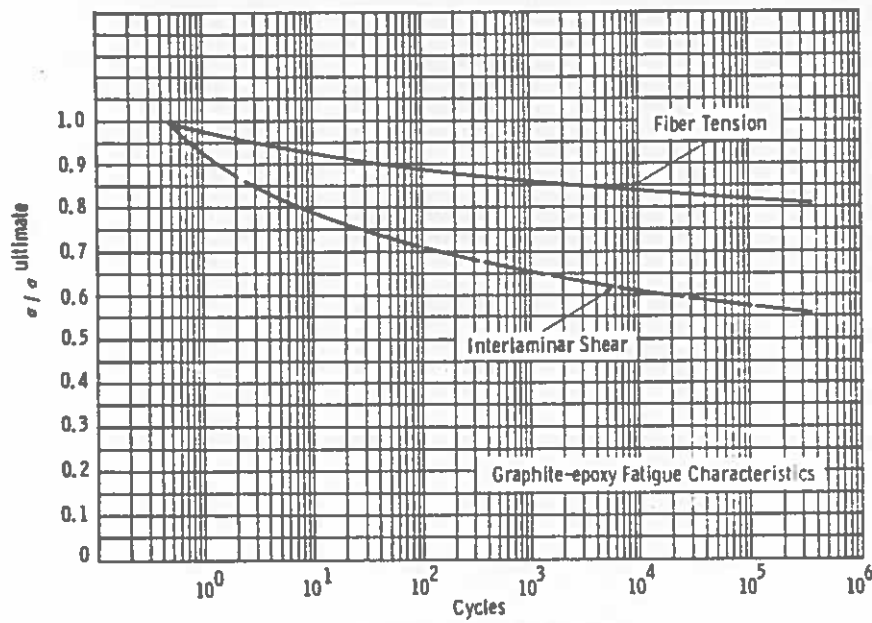
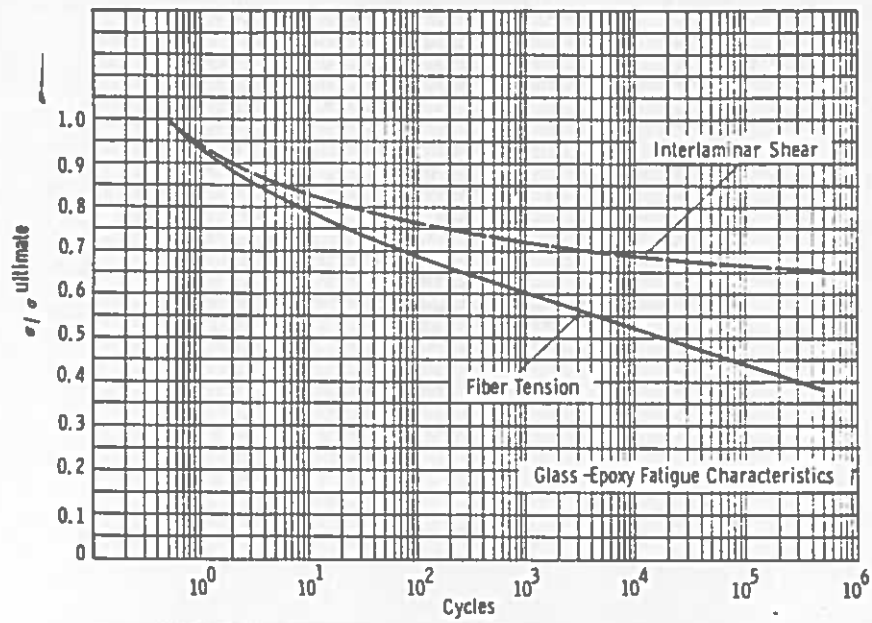


Wöhlerkurven für kreuzgewebeverstärkte Plaste bei Zug-Druck-Wechselbelastung nach [2.30]



Wöhlerkurven für mattenverstärkte Plaste bei Zug-Druck-Wechselbelastung nach [2.30]

Bild 8.52 Wöhlerkurven für kreuzgewebe- und mattenverstärkte Epoxid- und Polyesterharze [Hintersdorf]



BORON-EPOXY (NARMCO 3505)  
 GRAPHITE-EPOXY (HTS 4617)  
 GLASS-EPOXY (3M 1002-S)

Bild 8.53 Wöhlerkurven verschiedener Faserverbunde für Zugschwell- und Schubschwellbelastung. (Probeträger aus dicken Laminaten unter Sinusschwingung  $f = 4$  Hz,  $R = +0,1$ , Auftragung über  $26\pi/6\%$ ). [Pipes, STP 546].

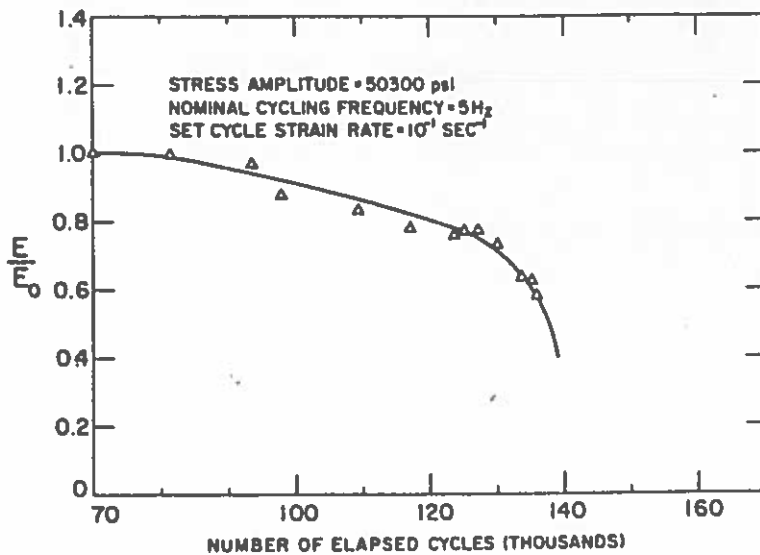
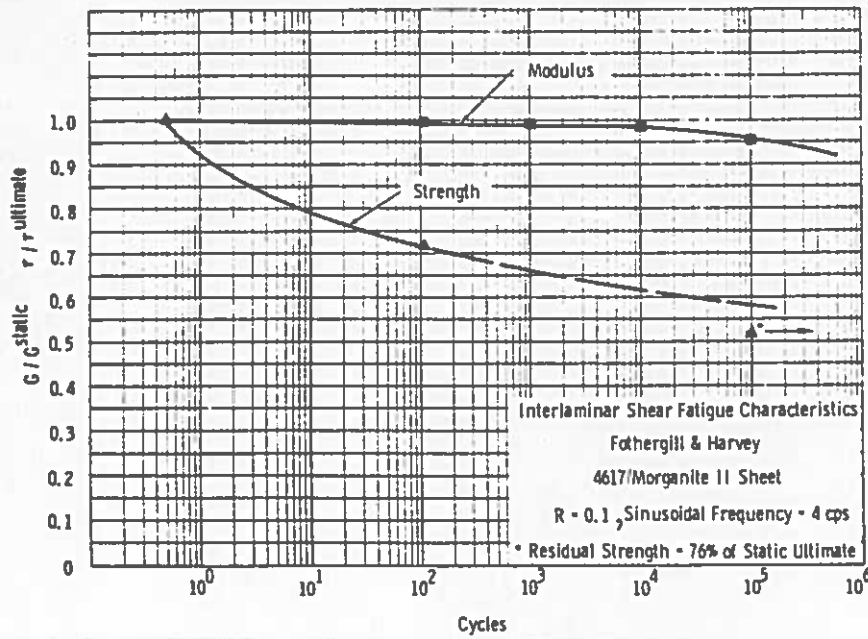


Bild 8.54 Schub- Ermüdungsergebnisse für CFK. [Pipes]

Bild 8.55 Abfall des Anfangsmoduls während des Schwingversuches als Funktion der ertragenen Lastspielzahl. (f = 5 Hz, Shell Epon 815 TETA, 13 Gew.prozente, Glas: Owens-Corning, Type K 836 AA-675) [Dharan]

Material	Fiber Orientation, deg	Static Ultimate Stress $\sigma_u$ , ksi	Design Stress $\sigma/1.5$ , ksi	Maximum Stress $R = 0.1$ Unnotched		Maximum Stress $R = 0.1$ Notched $K_f = 3$		Alternating Stress $R = -1$ Unnotched	
				$10^4$ cycles	$10^7$ cycles	$10^4$ cycles	$10^7$ cycles	$10^4$ cycles	$10^7$ cycles
HT Graphite SG = 1.57	0	165	110	125 (76) <sup>a</sup>	116 (70)	70 (42)	60 (36)	...	...
	0, 90	110	73	78 (71)	65 (59)	63 (57)	60 (55)	...	...
	0, 90, $\pm 45$	58	39	48 (83)	45 (78)	32 (55)	30 (52)	40 (69)	25 (43)
2024 T4 Aluminum SG = 2.77	...	77 (55 yield)	51	64 (83)	42 (55)	50 (65)	18 (23)	48 (62)	20 (26)
.PRD SG = 1.39	0	180	120	120 (67)	65 (36)	...	...	...	...
Glass SG = 2.00	0	260	175	80 (31)	40 (15)	...	...	45 (17)	24 (9)
	181 Cloth	85	57	40 (47)	25 (29)	...	...	23 (27)	12 (14)

<sup>a</sup> ( ) Percent of static ultimate stress.

Bild 8.56 Vergleich des Ermüdungsverhaltens bzw. der Schwingfestigkeit verschiedener Faserverbundproben bei Zug. [Freeman/Kuebeler]

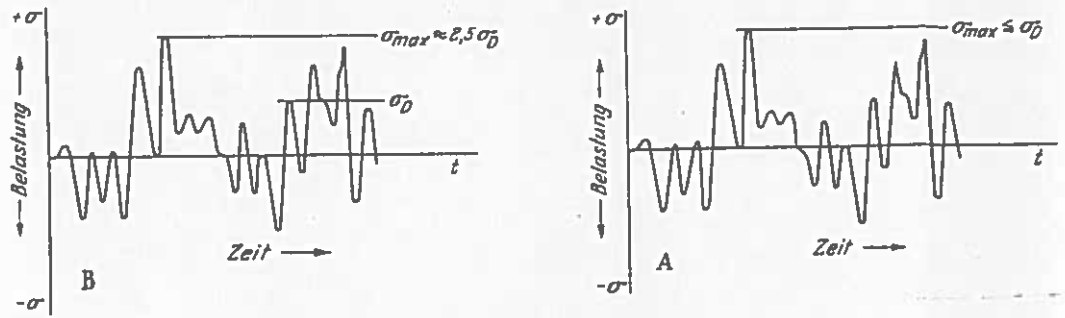
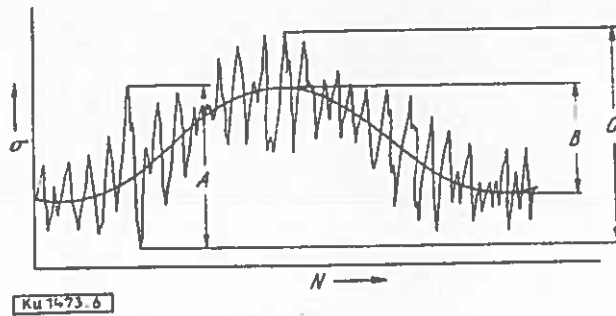


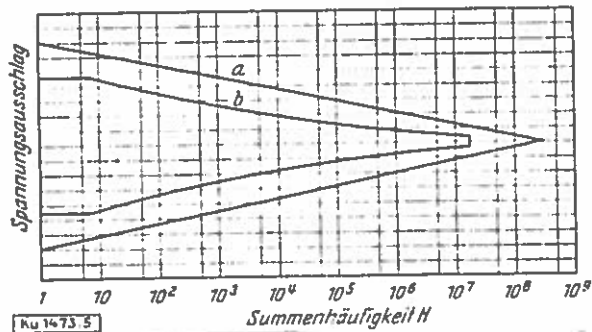
Bild 8.57 Bemessungsverfahren nach Wöhler und im Leichtbau. [Matting/Neitzel]



A = max. Schwingbreite  
 B = Mittelspannung  
 C =  $\sigma_o - \sigma_u$

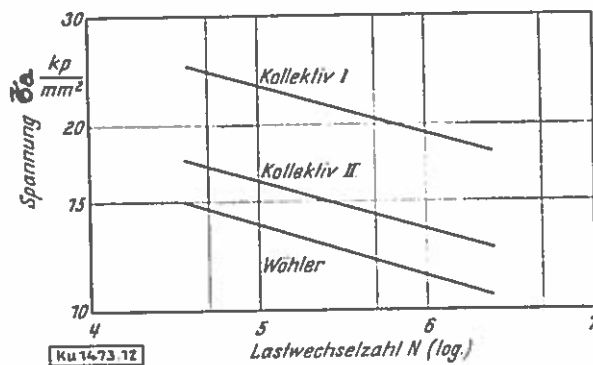
Ku 1473.6

Bild 8.58 Betriebslastfolge bei einem Schiff. [Matting/Neitzel]



Ku 1473.5

Bild 8.59 Belastungskollektive aus dem Schiffbau (a) und dem Flugzeugbau (b). [Matting/Neitzel]



Ku 1473.12

Bild 8.60 Schwingfestigkeitsverläufe bei Versuchen mit GFK-Gewebelaminaten. [Matting/Neitzel]

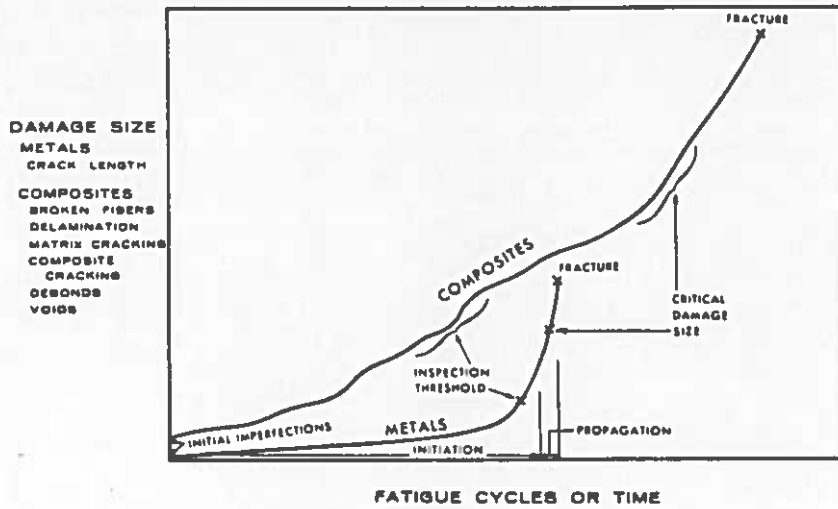


Bild 8.61 Ermüdungsbruchverhalten bei Verbund und Metall. [Salkind]

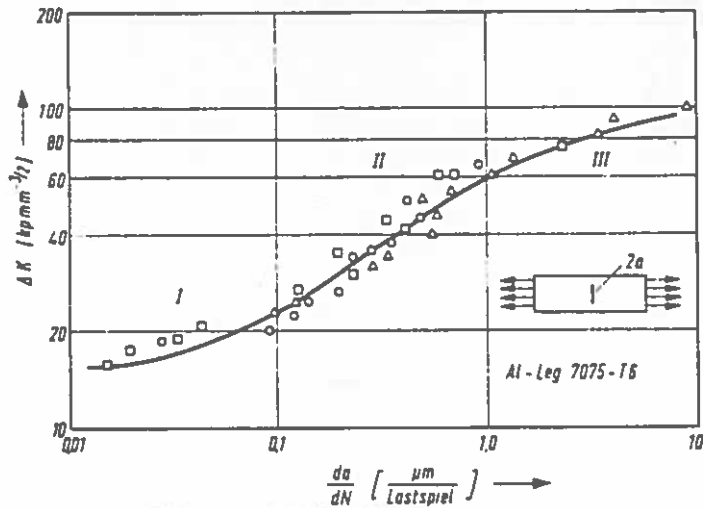


Bild 8.62 Zusammenhang zwischen dynamischen Spannungs-Intensitäts-Faktor und Rißausbreitungsgeschwindigkeit für die Aluminium-Legierung 7075-T6 (AlMgCuZn 1,5) nach D. Broek (aus [Heckel])

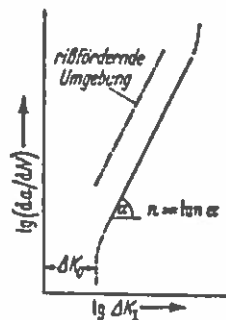
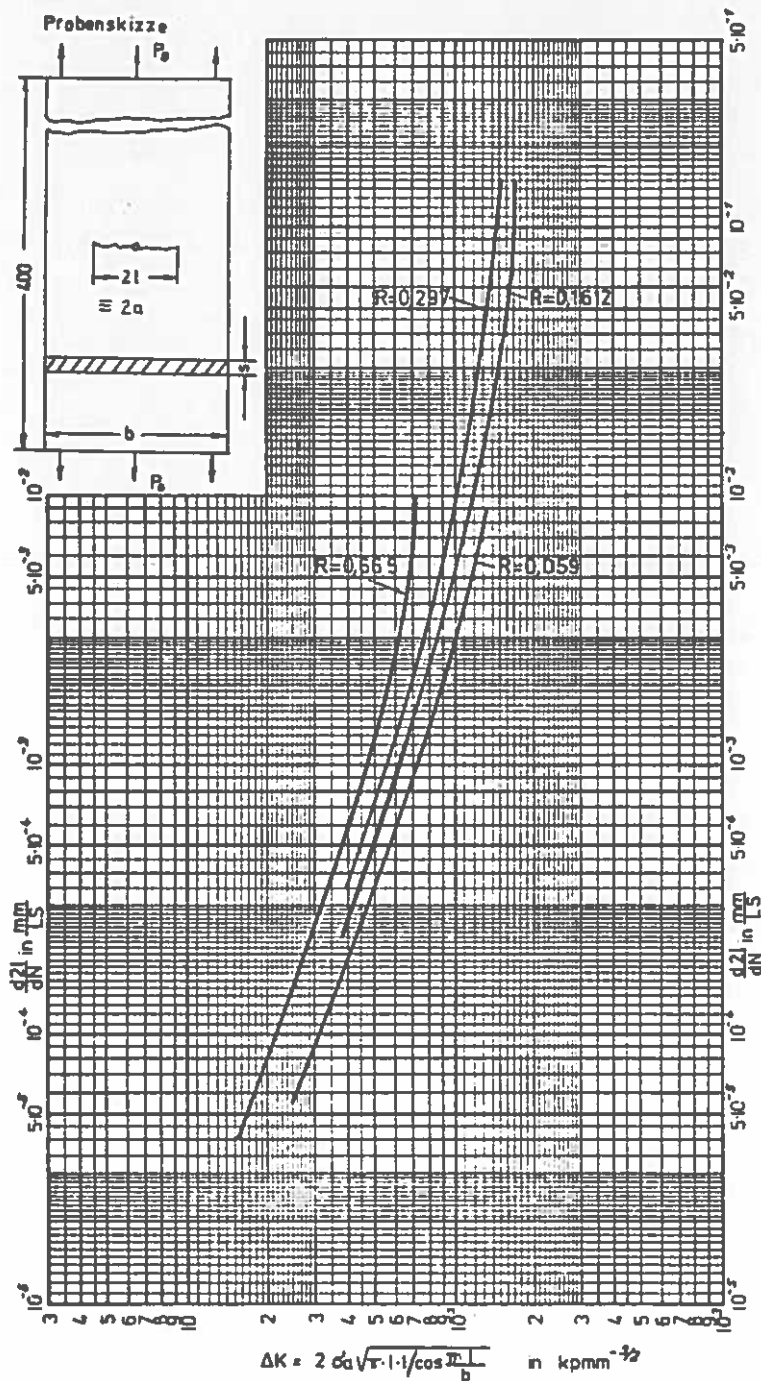


Bild 8.64

Rißwachstumsgeschwindigkeit  $da/dN$  in Abhängigkeit vom Wechsel der Spannungsintensität  $\Delta K_I$  [Berns]





Einige Einflussfaktoren  
auf die Rißwachstums-  
geschwindigkeit:

- Belastungsfrequenz,
- Mittelspannung,
- Temperatur,
- elektrochemische und/  
oder chemische  
Korrosion,
- grenzflächenaktive  
Substanzen

Schemata ET/Wesset

Bild 8.63

Rißfortschrittskurven nach  
Forman. Auswertung von Ein-  
stufenversuchen.  
Werkstoff  
[MBB-UF]

Für andere als die aufgetr. Verhältnisse von R kann näherungsweise mit  
den angegebenen Mittelwerten nach der Forman Gl. gerechnet werden.

Spannungen  
bezogen auf  
den Brutto-  
querschnitt

Gültigkeitsbereich von  $R \approx 0$

$$\text{Forman Gleichung } \frac{dZ}{dN} = \frac{C \cdot \Delta K^n}{(1-R)^{1/2} K_c - \Delta K}$$

$$K_c = \frac{P_a}{s \cdot b} \sqrt{\pi \cdot c} / \cos \frac{\pi \cdot c}{b} \quad \text{in } \text{kpmmm}^{-3/2}$$

- |                                |                           |               |
|--------------------------------|---------------------------|---------------|
| Beanspruchungsart              | axial                     | Mittelwerte   |
| Probendicke s                  | 2 mm                      | } Mittelwerte |
| Probenbreite b                 | 160 mm                    |               |
| Prüffrequenz f                 | 2000 LS/min               | } Mittelwerte |
| Faserichtung                   | längs                     |               |
| Quelle                         | NLR-TN M2111              | } Mittelwerte |
| Hochzahl n                     | 2,52                      |               |
| Konstante C                    | $3,51 \cdot 10^{-6}$      | } Mittelwerte |
| krit. Spannungsl. Faktor $K_c$ | 230 $\text{kpmmm}^{-3/2}$ |               |

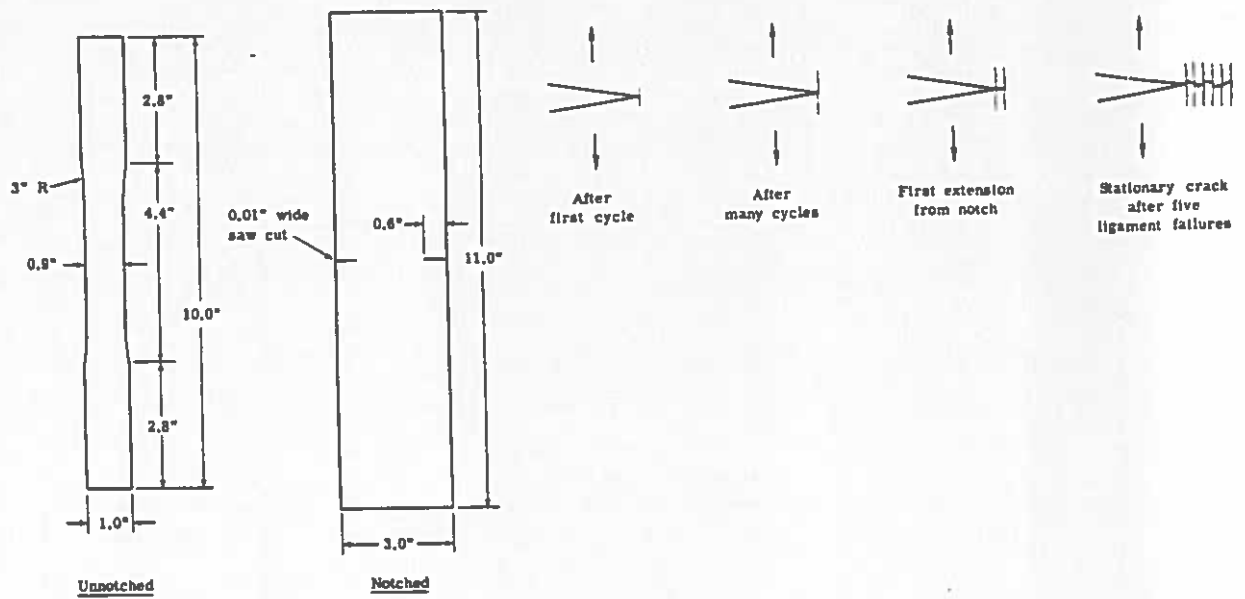


Bild 8.65 Proben und Bruchaussehen bei der Schwingbelastung eines  $(90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)_s$ -Laminates aus E-Glas/Epoxidharz [Mandell/Meier, STP 569]

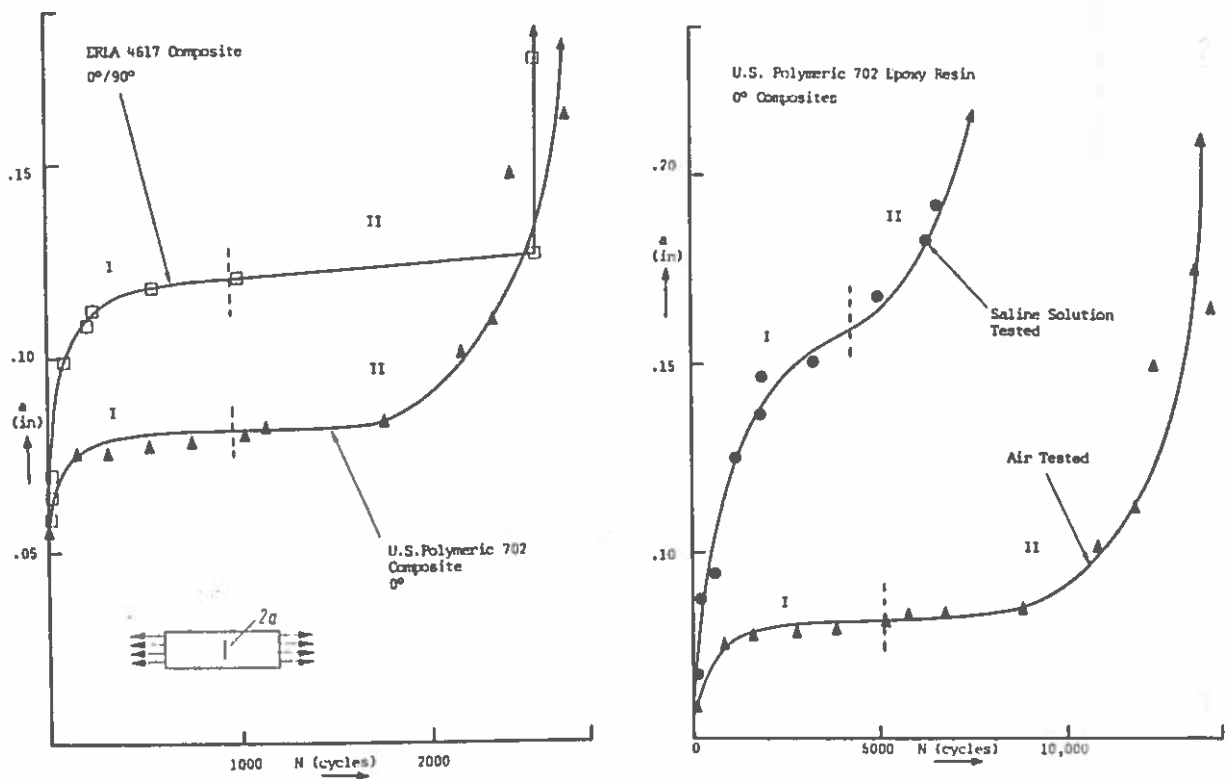


Bild 8.66 Rißlänge von CFK-KV und -UDV als Funktion der Lastspiele [Kunz/Beaumont, STP 569]

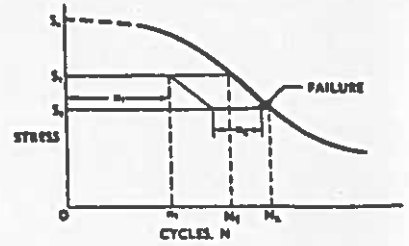
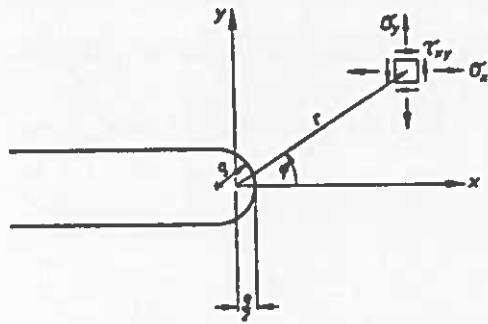


Bild 8.67 Unendliche Ebene mit scharfer Kerbe [Heckel]

Bild 8.68 Illustration der Minerregel [Miner]

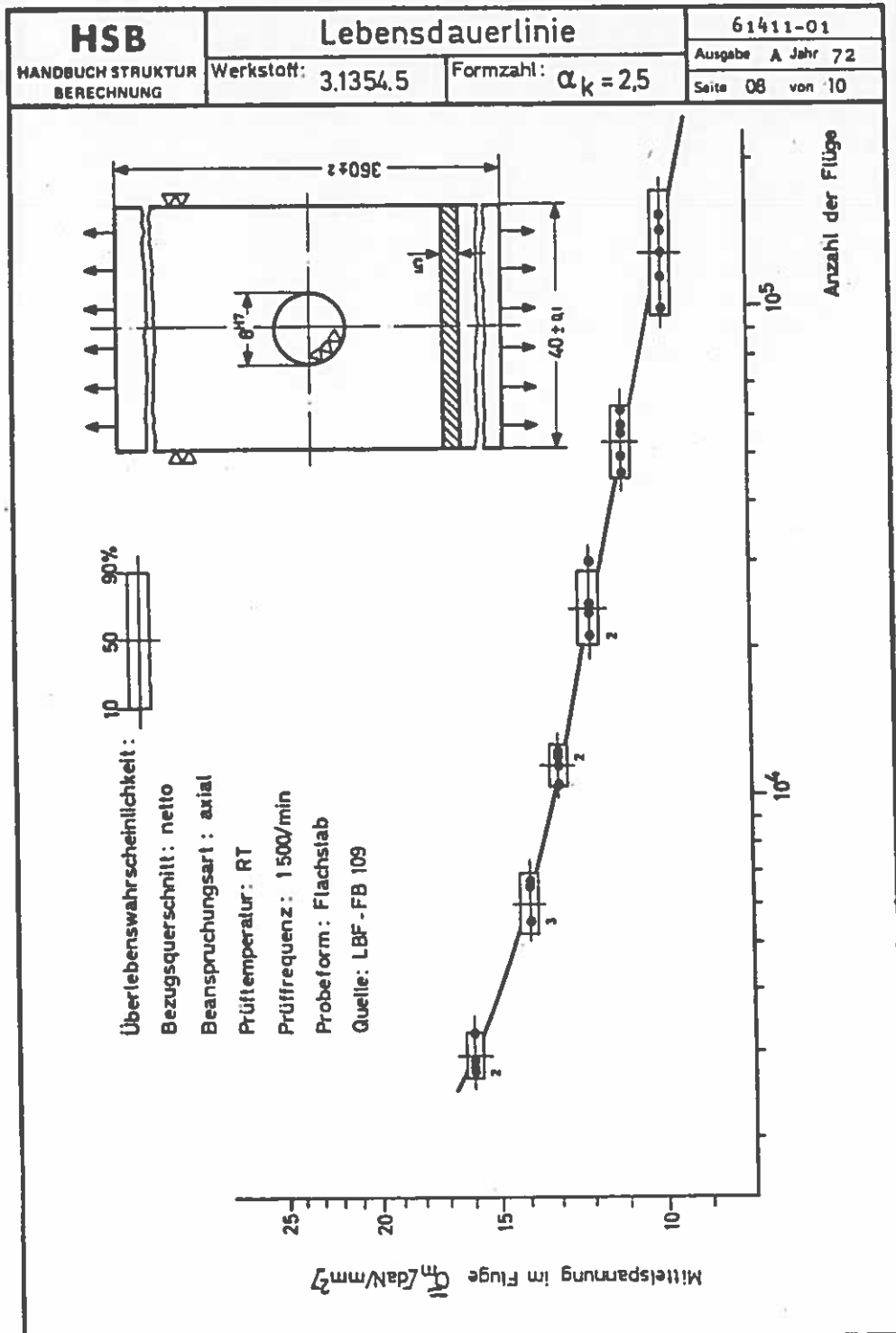


Bild 8.69 Beispiel einer Lebensdauerlinie [LBF]

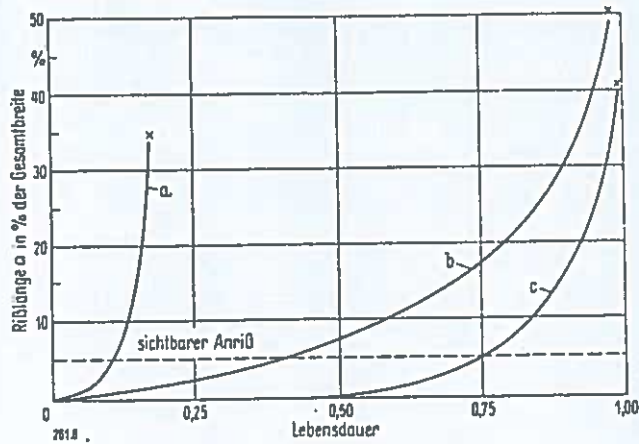
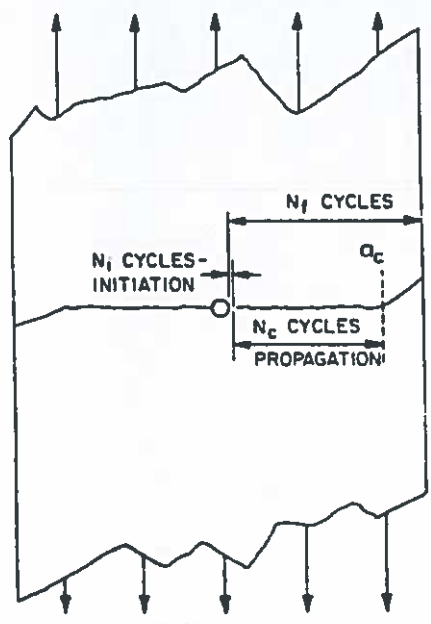


Bild 8.70

Rißfortschritt (schematisch). [Hoffer]  
 a Werkstoff a  
 b Werkstoff b  
 c Werkstoff c  
 x Bruch



PROPAGATION RATE A UNACCEPTABLE  
 PROPAGATION RATE B ACCEPTABLE

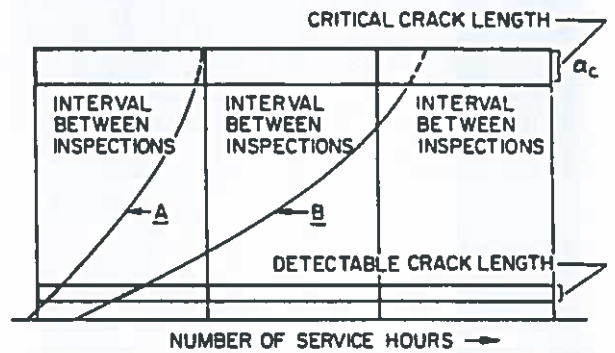
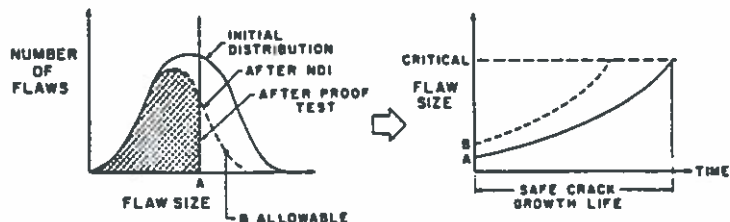


Bild 8.71 Rißentstehung und Rißfortschritt [Grover]

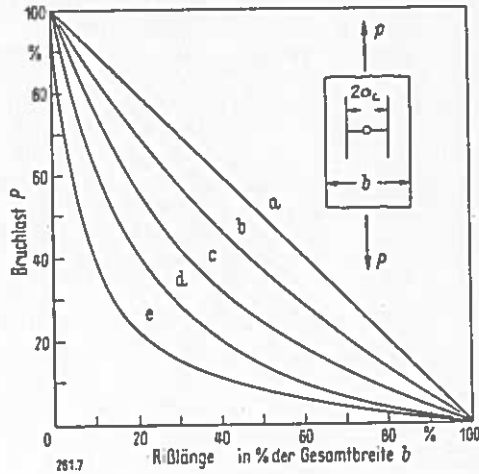
Bild 8.72 Rißfortschritt und Inspektionszeiten [Grover]



1. ASSUME INITIAL FLAW DISTRIBUTION.
  2. ELIMINATE DETECTABLE FLAWS BY NON-DESTRUCTIVE INSPECTION.
  3. ESTABLISH B ALLOWABLE.
- or
4. GUARANTEE NO FLAW ABOVE A GIVEN SIZE (A) BY PROOF TESTING.

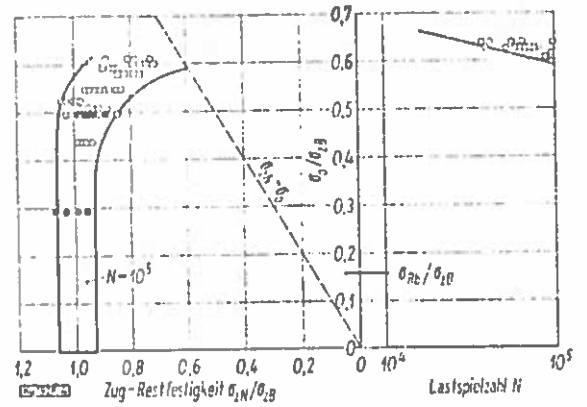
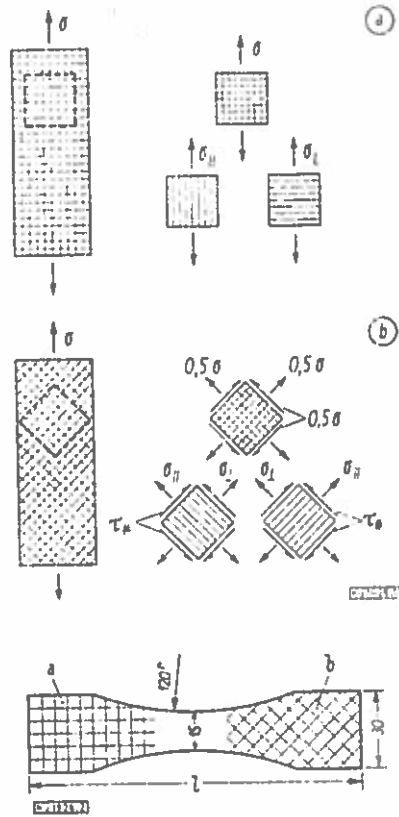
1. DEVELOP FLAW GROWTH MODEL.
2. ESTABLISH SAFE CRACK GROWTH LIFE.

Bild 8.73 Absicherung bezüglich Rißfortschritt durch zerstörungsfreie Inspektion (NDI) und Prüftests. [Halpin et al, STP 521]



- a idealer Werkstoff (St 37)
- b mittelfester Stahl bzw. Al
- c hochfester Stahl
- d ultrahochfester Stahl
- e hochfestes Al, dicke Querschnitte

Bild 8.74 Statische Restfestigkeit (schematisch). [Hoffer]



- Injektionsverfahren, Finish I 550; ● Handlaminierverfahren, Finish I 550; □ Handlaminierverfahren, Finish A 1100

Abmessungen der Probekörper. Zugprobekörper  $l = 130$  mm, Druckprobekörper  $l = 100$  mm, Dicke der Probekörper  $d = 4$  mm, Einspannlänge auf beiden Seiten je 40 mm  
 a Fadenrichtung beim Längsprobekörper; b Fadenrichtung beim Diagonalprobekörper

Bild 8.75 Spannungen in Zugprobekörpern und Einfluß der Zug-Schwellbelastung  $\sigma_0$  auf die Zug-Restfestigkeit  $\sigma_{zN}$  bzw. die Lastspielzahl  $N$  bei Dauerbruch eines Laminats aus Epoxydharz und Glasseidengewebe; Laminat E, Längsprobekörper. [Knappe/Wurtinger]

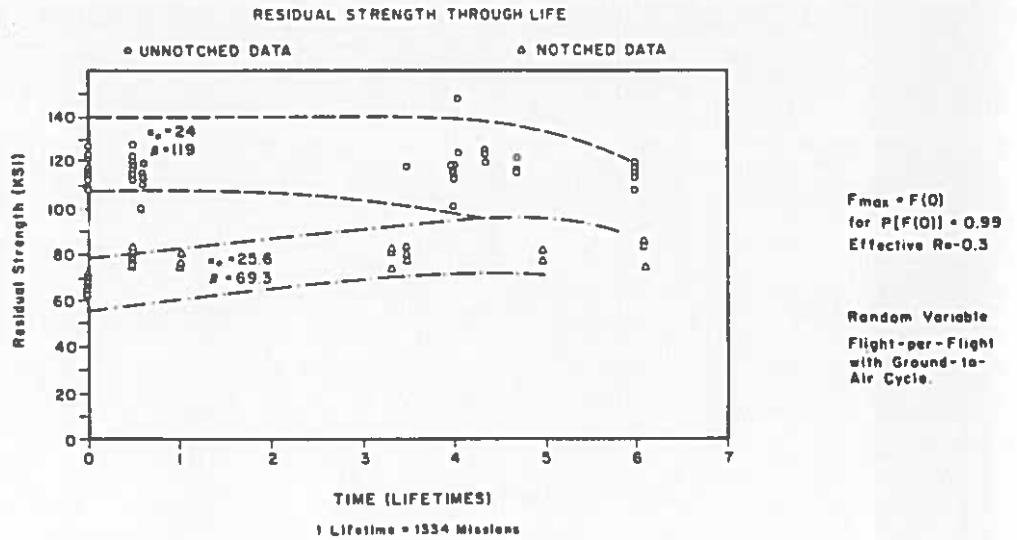


Bild 8.76 Vergleich zwischen der Restfestigkeit gekerbter und ungekerbter Proben. BFK unter dem Flugbelastungsverlauf eines Flugzeuges. [Halpin et al, STP 521]

[0/90], Graphite-Epoxy Fatigue, RT, R = 0.1.\*

Specimen**	Average Static Strength (psi)	Average Residual Strength After $5 \times 10^6$ Cycles (psi)
No stress concentration	83,500	77,200
.063 dia. hole	68,900	77,700
.063 dia. hole + .018 x .004 notch	72,200	74,300
.063 dia. hole + .078 x .004 notch	58,300	79,400

\*This study was conducted under an inhouse experimental program at General Dynamics, Convair Aerospace Division, Fort Worth Operation by E. L. McKague and R. J. Stout.  
\*\*Coupon specimens 1.0 inch in width and 9.0 inches in length.

Bild 8.77 Statische Festigkeitswerte im Vergleich zu Restfestigkeiten nach  $5 \cdot 10^6$  Lastspielen [M.E. Waddoups, J.R. Eisenmann, B.E. Kaminski]

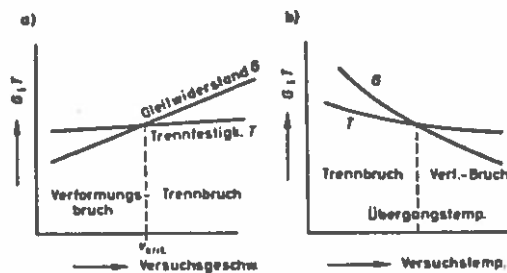


Bild 8.78

Abhängigkeit der Bruchart von der Versuchsgeschwindigkeit (a) und -temperatur (b) für Stahl (schematisch) [Domke]

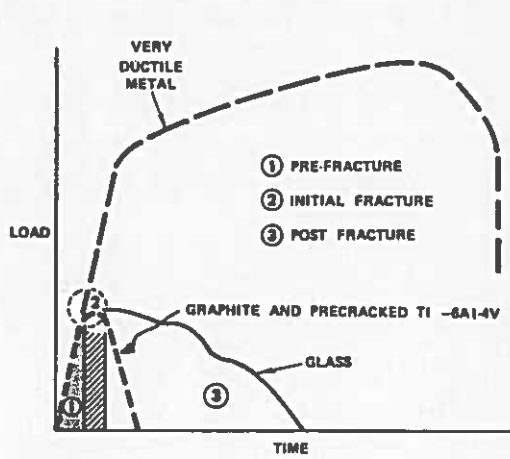


Bild 8.79

Charakteristisches Verhalten von schlagbelastetem Material. [Freeman/Kuebeler]

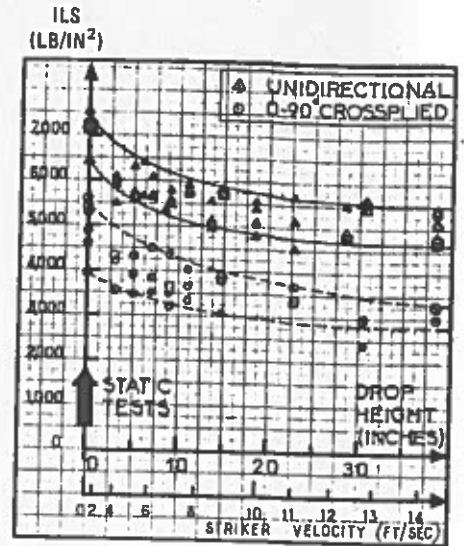


Bild 8.80 Interlaminare Schubfestigkeit bei verschiedenen Schlaggeschwindigkeiten, CFK,  $\varphi = 0,6$ . [Sayers/Harris]

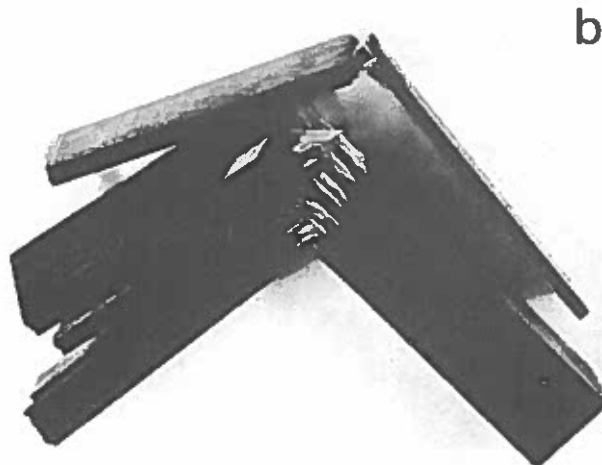
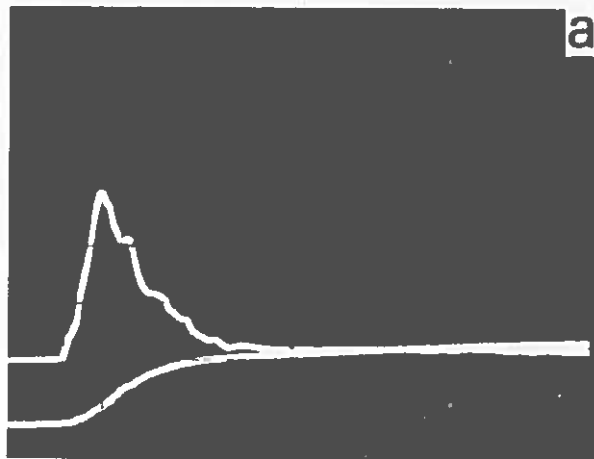


Bild 8.81

Typische Charpy-Testergebnisse: Modulte 5206 Modulte/Glas Typ A Hybrid-Verbund. a) Stoßverlauf (oben) und Energieverlauf (unten); b) gebrochene Probe. [Perry/Adams]

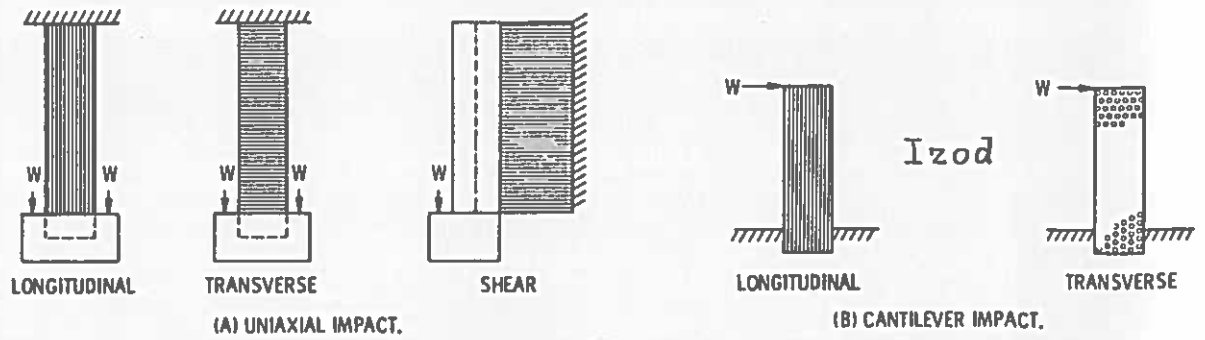


Bild 8.82 Belastung von UDV-Proben bei Schlagzug- und Izodbiegeversuch. [Chamis et al, STP 497].

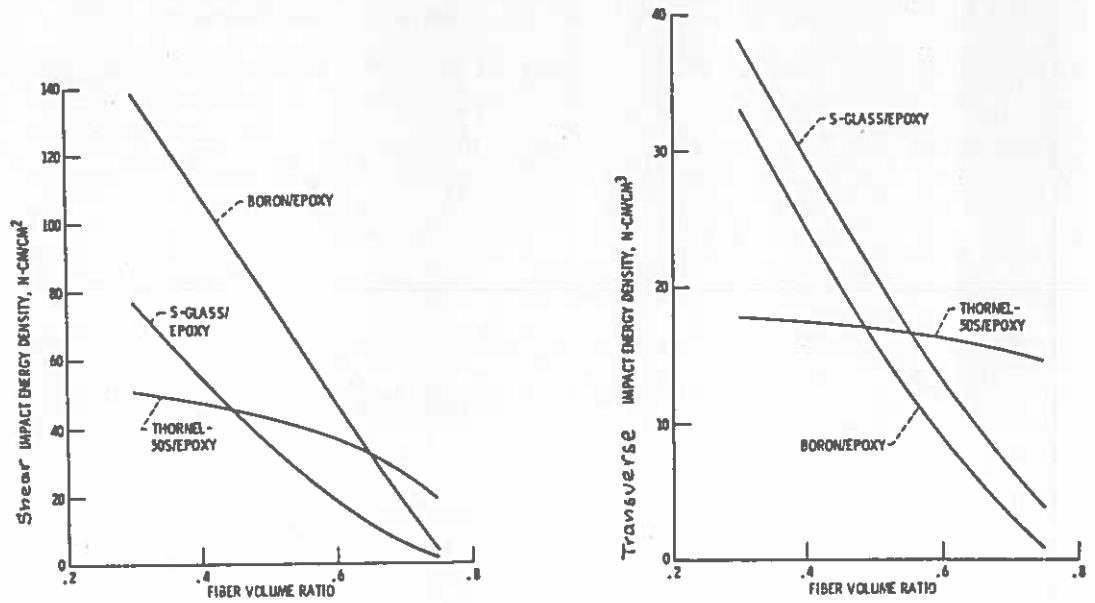


Bild 8.83 Theoretische Schub- und Quer-Schlagenergie bei UDV in Abhängigkeit vom Faservolumenanteil  $\varphi$ . [Chamis et al]

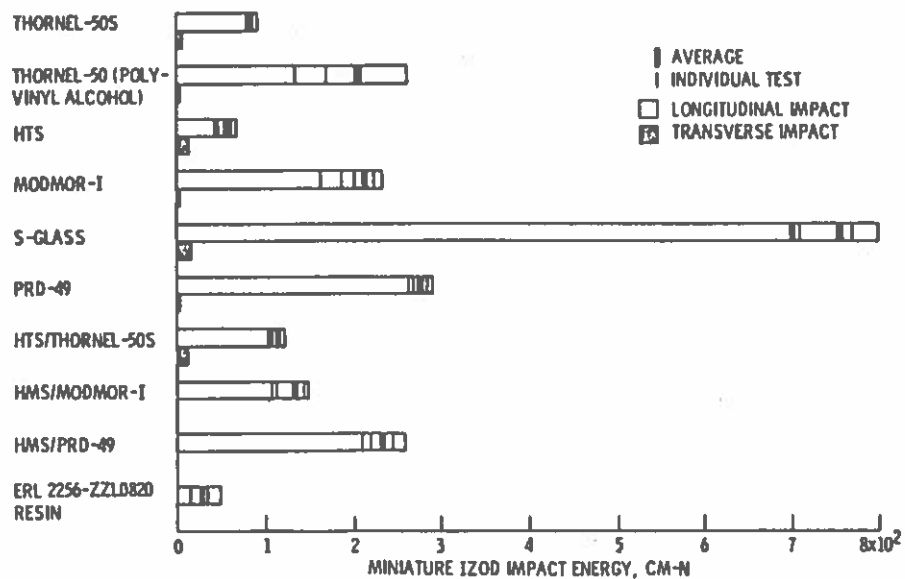


Bild 8.84 Izod-Schlagenergie für verschiedene Faser/ERL 2256-ZZ10820-Verbunde.  $\varphi = 0,48$  bis 0,60. [Chamis et al]



## 9. Strukturauslegung und -nachweis mit Beispielen

Bei der Entwicklung einer Leichtbaustruktur muß zumeist für eine hohe Zuverlässigkeit der Struktur im Betrieb gesorgt werden. Dafür sind sehr verschiedene Aufgaben zu lösen. Man findet diese Aufgaben, so weit sie für den Festigkeitsingenieur wesentlich sind, in den beiden Arbeitspaketen Auslegung und Nachweis der Struktur. Das Arbeitspaket Auslegung enthält Aktivitäten während der Entstehungsphase und das Arbeitspaket Nachweis solche während der Qualifikationsphase einer Struktur bzw. eines Bauteiles. Tabelle 9.1 gibt einen Überblick über diese Aktivitäten.

Die Festigkeitsaufgaben in Tabelle 9.1 haben nach der VDI-Richtlinie 2226 das Ziel, sowohl die Abmessungen des Bauteils zu liefern, wie auch eine ausreichende Betriebssicherheit nachzuweisen. Den Ablauf einer Festigkeitsbetrachtung zeigt Bild 9.1. Er läßt erkennen, daß eine Festigkeitsaufgabe keineswegs mit der Ermittlung des Spannungszustandes gelöst ist, sondern, daß das Werkstoffverhalten im Bauteil unter den örtlichen Betriebsbedingungen besonderer Aufmerksamkeit bedarf.

### 9.1. Arten der Berechnung

Der Festigkeitsbericht für das Bauteil X bzw. die Statik des Tragwerks X (Ausdrucksweise im Bauwesen) benötigt Berechnungsmethoden der Statik und der Dynamik (richtig wäre Kinetik), um die zuvor erwähnte Betriebszuverlässigkeit nachweisen zu können.

Das Verhalten des Bauteils im Betrieb läßt sich unterteilen in das statische Verhalten, das kinetische Verhalten und das Stabilitätsverhalten.

Während der Untersuchung des statischen Verhaltens werden Schnittgrößen, Spannungen und Verformungen ermittelt. Dabei werden bei Auslegungsrechnungen im allgemeinen einfache Rechenmethoden und vereinfachte Randbedingungen benutzt, während für die Erstellung der Nachweise finite Methoden, Traglastverfahren u.a. verwendet werden.

Die Untersuchung des kinetischen Verhaltens umfaßt die Behandlung erzwungener Schwingungen und die Ermittlung von Eigenfrequenzen. Die statischen Belastungsgleichwerte, die aus der Behandlung der erzwungenen Schwingungen resultieren, dienen wiederum als Belastungsgrößen für die "Statik".

Die Untersuchung des Stabilitätsverhaltens umfaßt die statische und

die kinetische Stabilität, also nicht nur das Knicken, Kippen, Beulen, Knittern sondern z.B. auch das Stabilitätsverhalten von Rotoren.

Als Beziehungen für die statischen Berechnungen werden die Gleichgewichtsbedingungen für statische Belastungen

$$F_i = 0, \quad M_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9.1)$$

Einsteinsche Summenkonvention)

und kinetische Belastungen

$$\begin{aligned} F_i + F_{Ti} &= 0 && \text{Impulssatz von Newton} \\ M_i + M_{Ti} &= 0 && \text{Drallsatz von Euler} \end{aligned} \quad (9.2)$$

herangezogen.

Bei den Beziehungen (9.2) stellen die  $F_{Ti}$  und  $M_{Ti}$  die sogenannten d'Alembertschen Trägheitsgrößen dar, mit deren Zufügung zu den angreifenden Kräften  $F_i$  und Momenten  $M_i$  auch im bewegten System Gleichgewicht erzielt wird.

Zur Ermittlung der Spannungen reichen die vorgenannten Gleichungen nur bei statisch bestimmten Systemen aus. Bei statisch unbestimmten Systemen werden die sog. Elastizitätsgleichungen herangezogen. Sie lassen sich in einem Gleichungssystem der Form

$$[K] \{\delta\} = \{F\} \quad (9.3)$$

zusammenfassen, wobei im Fall der einfachen Federgleichung die sogenannte Steifigkeitsmatrix  $[K]$  zur Federkonstanten, der Vektor  $\{\delta\}$  zur Federauslenkung und der Kraftvektor  $\{F\}$  zur Federkraft schrumpfen. Näheres ist im Kapitel 10 zu finden.

Für kinetische Untersuchungen ist das Gleichungssystem

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [D] \{\dot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = \{F(t)\} \quad (9.4)$$

heranzuziehen mit  $[M]$  als Massenmatrix,  $[D]$  als sogenannte Dämpfungsmatrix sowie Matrix der Kreiselgrößen und  $d/dt = \{\dot{\cdot}\}$ .

Für Stabilitätsuntersuchungen wird die inhomogene Gleichung (9.4) homogen, das heißt die rechte Seite wird Null.

## 9.2. Auslegungskriterien

Soll ein Bauteil aus Faserverbund ausgelegt werden, so sind bei seiner Entwicklung bis zur Fertigung (s. Bild 9.2) die einzelnen Arbeitsaktivitäten viel mehr als bei einem konventionellen Werkstoff miteinander zu verbinden. Es ist sowohl eine gute Verknüpfung mit der Werkstoffseite wie auch mit der Fertigungstechnik notwendig, damit der Faserverbundwerkstoff richtig eingesetzt und verarbeitet wird.

Einen Überblick über die bei der Auslegung eines Bauteiles zu beachtenden Auslegungskriterien gibt Tabelle 9.2. Sie zeigt die Gruppen: Lastgrößen, Steifigkeitsanforderungen, Umweltaforderungen, Sicherheitsfaktoren, Fertigungseigenheiten, Werkstoffwerte und Wartung (s. [Freeman/Kuebeler]).

Auch wenn alle Auslegungs-Anforderungen durch ein Faserverbundbauteil erfüllt werden, so ist sein Einsatz in der Regel noch nicht erlaubt. Es kann ein Zulassungsverfahren notwendig werden. Dieses ist im Flugzeugbau, im Maschinenbau wie im Bauingenieurwesen dann zu beantragen, wenn - wie es im Bauwesen heißt - die "allgemein anerkannten Regeln der Baukunst" auf den neuen Werkstoff nicht angewendet werden können oder dürfen.

### 9.2.1. Auslegungsvorteile bei der Verwendung von Faserverbund

Allgemeine Vorteile bei der Wahl von Faserverbund sind die vielfältige Lasteinleitung und Weiterleitung auf verschiedenen Faserwegen und über i.a. gut verklebte Verbindungsstellen. Diese Vorteile sichern noch eine hohe Tragfähigkeit nach dem ersten Bruchereignis und somit eine gute Fail-Safe-Charakteristik (s. Abschnitt 9.3.), wie durch Versuche an Flugzeugflügeln und anderen Bauteilen bestätigt worden ist.

Weiter ist die gute Eigenschaft zu erwähnen, daß sich Spannungsspitzen an Löchern schwingfestigkeitsmäßig relativ wenig bemerkbar machen. Das bedeutet Vorteile gegenüber dem Verhalten metallischer Bauteile. Halpin liefert dazu eine Erklärung mit Bild 9.3. Nach diesem Bild wird ein immer vorhandener Anfangsriß (engl.: preexisting flaw) bei einer ungekerbten Probe einen schnelleren Abfall der Wöhlerlinie (Punkt 1 gegenüber Punkt 2) verursachen als beim

niedrigeren Ausgangs-Spannungsniveau der gekerbten Probe. Im letzteren Fall bilden sich an der Spannungsspitze infolge Harzüberdehnung Risse aus (crazes), die den Ausgangsriß etwas stoppen. Außerdem treten kleine Delaminationen auf.

Das Bruchverhalten ist bei FK erheblich komplexer als bei Metallen. Es sind aber bei Laminaten (noch?) keine genügend genauen Aussagen über den Fortschritt eines Risses in der Schicht und im Laminat machbar. Ein Riß wechselt die Richtung und wächst von immer vorhandenen Anfangsrissen aus, ohne daß eine Rißentstehungsphase wie bei Metallen definiert werden kann (Bild 8.61). Bei Faserverbunden, wie z.T. auch bei reinen Kunststoffen (Schwindrisse) sieht das ganze Verhalten mehr wie ein einziger Rißfortschritt aus, wobei leider die Inspektionsschwelle für einen Riß weniger klar definiert ist, aber bis zum Erreichen des Bruches noch viel Reserve ist. Ein größerer Rißfortschritt ist zumeist erst am Ende des Bruchvorganges bemerkbar.

Die Vorteile des komplexen Bruchverhaltens können erst dann von der Berechnung besser genutzt werden, wenn die Erfahrungen über das Verhalten des Faserverbundes während des Schädigungs- bzw. Zerstörungsvorganges noch umfassender sein werden.

Ein großer Vorteil liegt bei der Anwendung von Faserverbund darin, daß eine Struktur aus wenigeren, dafür aber größeren Teilen besteht. Bei der Herstellung dieser Teile können Verbindungen mit eingearbeitet werden, und es wird dadurch die Zuverlässigkeit der Struktur vergrößert (aus [Hackman] ).

### 9.2.2. Materialauswahl

Im Rahmen der Materialauswahl müssen laut [Hoeppner/Krupp] fünf Gruppen von Material-Eigenschaften unterschieden werden:

- die statische Spannung bei Bruch und die Steifigkeit des Materials ohne Anfangsrisse ( $\sigma_B, E, \dots$ );
- das zeitabhängige Verhalten (Kriechen, Zeitstandverhalten, Temperatur- und Spannungskorrosionseinflüsse);
- das Restfestigkeitsverhalten und die Steifigkeit nach einer Belastung von bestimmtem Beschädigungsgrad (Fail Safe, Damage Tolerance);
- das Schwingfestigkeitsverhalten (Ermüdungsverhalten) nicht beschädigter Materialien ohne Anfangsrisse (Safe-Life-Auslegung)

und die Lebensdauer von beschädigtem Material mit Anfangsrissen (Inspektionszeiten, Reparaturverfahren ...).

Die Kenntnis dieser Eigenschaften des Materials hilft die Frage zu beantworten, ob die an ein Bauteil gestellten Anforderungen erfüllt werden können.

Eine Hilfe bei der Materialauswahl kann man sich dadurch verschaffen, daß man die Anforderungen tabellarisch zusammenfaßt und vergleichend abfragt. Hablitzel zeigt in Bild 9.4 ein Beispiel für ein ganz spezielles Entscheidungssystem bei der Materialauswahl.

Für eine Grobauswahl nach den Kurzzeitwerten kann eine Zusammenstellung in der Art von Tabelle 9.3 dienen.

### Materialwertung nach Leichtbaukriterien

Eine optimale Leichtbaukonstruktion liegt noch nicht vor, wenn ein Werkstoff mit hoher Reißlänge verwendet wird. Es sind vielmehr - wie wir gesehen haben - eine Menge anderer Faktoren nach der Ausschreibungs-Spezifikation zu beachten, wie Alterung, Bewitterungsverhalten, elektrische und thermische Eigenschaften, dynamisches Verhalten usw.

Speziell in der Luft- und Raumfahrt wird aber doch zuerst danach geurteilt: Welches Material bietet bei vorgegebener Tragfähigkeit das kleinste Gewicht? Dabei hat allerdings das "Abmagern des Gewichtes" eines Bauteils dort seine Grenze, wo die notwendige Handhabung bleibende Verformungen oder Schädigungen nach sich ziehen würde.

Zur Beantwortung der obigen Frage dienen je nach Bauelement und Belastungsart verschiedene Wertungsgrößen der Tragfähigkeit und der Steifigkeit. Sie werden dem Buch Leichtbau von H. Hertel entnommen (Tabelle 9.4).

Die bekannteste Größe, nach der die Leichtbauwerkstoffe verglichen werden, ist die Reißlänge. Sie stellt sich anschaulich dar als diejenige Länge  $l_R = \sigma_s / \gamma$ , bei der ein Faden eines speziellen Werkstoffs unter seinem Eigengewicht reißt. Das Gewichtsverhältnis zweier Zugstäbe gleicher Länge unter gleicher Last kann somit durch das Verhältnis ihrer Reißlängen ausgedrückt werden

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\sigma_1 A_1}{\sigma_2 A_2} = \frac{\sigma_1 P / \sigma_{B1}}{\sigma_2 P / \sigma_{B2}} = \frac{\sigma_1 / \sigma_{B1}}{\sigma_2 / \sigma_{B2}} .$$

Andererseits ist bei einem knickgefährdeten vollen Druckstab - welcher hier als Beispiel betrachtet werden soll, obwohl aus Einschränkungsgründen Stabilität in diesem Buch nicht behandelt wird - die Tragfähigkeit proportional der Biegesteifigkeit  $P \sim EJ \sim Er^4$ . Mit  $P_1 = P_2 = P$  bei vorgegebener Länge ergibt sich das Gewichtsverhältnis

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\sigma_1 A_1}{\sigma_2 A_2} = \frac{\sigma_1 r_1^2}{\sigma_2 r_2^2} = \frac{\sigma_1 \sqrt{P/E_1}}{\sigma_2 \sqrt{P/E_2}} = \frac{\sqrt{E_2}/\sigma_2}{\sqrt{E_1}/\sigma_1} .$$

Ganz allgemein erhält man bei Stabilitätsproblemen Wertungsgrößen der Form  $E^n/\sigma$ , wobei der Exponent n von der Variabilität der Querschnittsgeometrie abhängt. Es gibt bei beulgefährdeten Platten mit der variablen Dicke s die Wertung  $E^{3/2}/\sigma$  und bei der Sandwichplatte wie bei I- oder  $\square$ -Träger mit vorgegebener Höhe und Breite und veränderlicher Gurtstärke die Wertung  $E/\sigma$ . Bei kleinem Exponenten n kommt das spezifisch leichte, bei großem Exponenten das steifere Material besser zur Geltung.

Bei Biegebelastung wird, je nachdem, ob es sich um einen Vollquerschnitt mit variabler Dicke oder wieder um einen I- oder Sandwichquerschnitt mit vorgegebener Höhe handelt, die Wertung  $\sqrt{G_B}/\sigma$  oder  $\sqrt{G_B}/\sigma$  erhalten.

Entsprechende Wertungsgrößen lassen sich aus einer Steifigkeitsvorgabe (an Stelle der Festigkeitsforderung) herleiten. Auf Steifigkeit ist z.B. bei Flugzeugen wegen aeroelastischer Zusammenhänge (Flügelflattern, Ruderwirkungsumkehr usw.) besonders zu achten, oder wenn Durchbiegungsbeschränkungen vorliegen (Auszug aus [Wiedemann]).

Einen Überblick über die Kombination spezifischer Festigkeiten und spezifischer Steifigkeiten zeigte Bild 2.10 für einachsige auf Zug belastete Faserverbundmaterialien.

### Ermittlung von Laminatkennwerten

Bei den soeben behandelten gewichtsspezifischen Materialwertungsgrößen sind Kennwerte vom Laminat einzusetzen. Man kann diese Werte nach drei verschiedenen Verfahren (laut [Hackman]) ermitteln:

Verfahren 1 - Empirische Feststellung der Werte -

Dieses Verfahren ist langwierig, teuer und für einen Optimierungsprozeß zu umfangreich;

Verfahren 2 - Halbempirische Ermittlung der Werte -

Es werden dabei nur die Kennwerte des UDV empirisch ermittelt,

die Laminatwerte jedoch durch Rechnung festgestellt. Das bedeutet gegenüber Verfahren 1 weniger Test- und Zeitaufwand. Eine Optimierung wird auf dem bequemeren, rechnerischen Weg vorgenommen;

Verfahren 3 - Berechnung der Laminatwerte aus mikromechanischen Größen -

Falls überhaupt keine Versuchswerte vorliegen, ist es notwendigerweise das schnellste Verfahren. Seine Nachteile sind die große Streubreite der mit mikromechanisch hergeleiteten Formeln berechneten Werkstoffwerte. Darin geht sogar ein Nachteil unter, weil Schwankungen in der Lieferungsqualität überhaupt keinen Einfluß nehmen.

Der Verfasser favorisiert Verfahren 2, welches bei schnell arbeitendem Labor oder relativ abgesicherten Literaturversuchsergebnissen am besten sein dürfte.

### 9.2.3. Lastannahmen

Ein Bauteil wird in der Regel durch äußere und innere Kräfte sowie durch Momente belastet. Äußere Kräfte und Momente wirken auf die äußere Oberfläche des Bauteiles (Druck, Verkehrslast,...) oder auf sein Volumen (Eigengewicht, Fliehkraft ...). Innere Kräfte und Momente sind Größen, die durch Schnitte im Bauteil freigesetzt werden (Schnittgrößen). Spannungen sind die auf die Flächenelemente bezogenen Kräfte.

Äußere und innere Kräfte stehen im Gleichgewicht. Innere Kräfte können aber auch ohne äußere Kräfte auftreten infolge von magnetischen Wirkungen, Wärmespannungen usf. (s. [Radaj]).

Die äußeren Lasten (Kräfte und Momente) werden in geeigneter Weise zu Lastfällen zusammengefaßt (Eigengewicht, Windlast, Standschub, Flugphase ...).

#### Lastannahmen im Leichtbau

Die sogenannte Auslegungs-Grenzlast (sichere Last, rechnerische Höchstlast) muß für jeden Lastfall nebst zugehörigen Betriebsbedingungen vorgegeben werden. Dabei werden manchmal Stoßfaktoren den statischen Werten aufgeschlagen, statt das dynamische Verhalten genauer zu untersuchen. Eine solche Vereinfachung sollte in der Regel im Leichtbau nicht benutzt werden, da die Festigkeit eines Bauteils von der Art des Betriebsverhaltens erheblich abhängt.

Die Definition der beiden verwendeten Auslegungslasten der sicheren Last und der rechnerischen Bruchlast ist wie folgt:

Die sichere Last oder auch Auslegungs-Grenzlast (D (esign) L (imit) L (oad)) ist diejenige Last, die mit großer, möglichst statistisch abgesicherter Sicherheit nicht überschritten wird.

Die rechnerische Bruchlast (D(esign) U(ltimate) L(oad)) ist das Produkt aus der Auslegungs-Grenzlast und dem Auslegungsfaktor  $\gamma_u$  (zumeist Sicherheitsfaktor oder Sicherheitszahl genannt, statt besser Unsicherheitsfaktor).

Daneben können zusätzliche Faktoren spezifiziert werden, um zusätzliche Sicherheiten, Steifigkeiten, Qualitätssicherung etc. zu erreichen.

### Lastannahmen im Bauwesen

Im Bauwesen findet eine Aufteilung in ständige Lasten und Verkehrslasten statt. In der DIN 1055 wird diese Aufteilung näher beschrieben:

#### 1. Ständige Last

Sie ist die Summe der unveränderlichen Lasten, wie Eigengewicht u.s.w.

#### 2. Verkehrslast

Sie ist die veränderliche oder bewegliche Belastung des Bauteiles, wie Personen, Einrichtungsstücke, Lagerstoffe, Kranlasten, Wind (Blatt 4), Schnee (Blatt 5).

Es wird dabei zwischen "vorwiegend ruhenden" und "nicht vorwiegend ruhenden" Verkehrslasten unterschieden. Zu letzteren zählen stoßende und sich häufig wiederholende Lasten oder schwingende Beanspruchungen.

Für die Wind- und Schneelasten gibt es in DIN 1055 eigene Vorschriften, sowie für andere horizontale und vertikale Verkehrslasten. Lastannahmen bei Kränen, Silos, Brücken u.a. sind ebenfalls in diesen DIN-Blättern zu finden; Stoßwerte ebenso. Bei der Anwendung von Stoß- bzw. Schwingbeiwerten sind besondere Betrachtungen anzustellen und gegebenenfalls die Werte mit der Baubehörde zu vereinbaren.

Problematik dieser Lastannahmen: (Ausschnitt aus [Dolfen])

Die Anwendung dieser herkömmlichen Lastannahmen stößt bei (Faser-) Kunststoffen auf Schwierigkeiten, da in diesen Annahmen die Belastungszeit generell keine Berücksichtigung findet. Im Hinblick auf die Diskrepanz zwischen Kurz- und Langzeitfestigkeiten und auf das Erholverhalten von Kunststoffen ist es bei nur zeitweise auftretenden Lasten (Verkehrslasten, Schneelasten, Windlasten) nicht gerechtfertigt



eine dauernde Einwirkung vorauszusetzen. Zwei Beispiele sollen dies näher erläutern:

a) Windlast (DIN 1055 Bl. 4)

Nach Norm wird die Windlast als statische Last betrachtet, d.h. es werden sowohl schwingende Einflüsse außer acht gelassen als auch die Tatsache, daß der Wind nicht ständig wirkt.

b) Schneelast (DIN 1055 Bl. 5)

Da die Schneelast in der Regel nur während einiger Wintermonate auftritt, können sich die dadurch belasteten Konstruktionen im Sommer erholen.

Für Werkstoffe, bei denen zwischen Kurz- und Langzeitfestigkeit keine nennenswerten Unterschiede bestehen, sind die maximal möglichen Beanspruchungen zeitunabhängig anzusetzen. Bei Kunststoffen dagegen werden relativ hohe kurzfristige Belastungen ebensogut ertragen wie mäßige langdauernde Beanspruchungen. Demnach wären bei Kunststoffen für Windlasten ode Beanspruchungen mit ähnlicher Charakteristik folgende Nachweise erforderlich:

1. Eine konstante mittlere Repräsentativbeanspruchung darf unter Berücksichtigung des Kriechens nicht zum Versagen führen!  
(Aufgrund der in Deutschland üblichen Charakteristik der Windlasten, kann von vonherein diese Belastung als unkritisch angesehen werden).
2. Die maximal denkbare Spitzenlast muß unter Berücksichtigung des vorherigen Kriechens (Punkt 1.) unterhalb der Kurzzeitfestigkeit liegen!
3. Es ist zu prüfen, unter welchen Bedingungen schwingende Belastungen auftreten, die zu Schädigungen oder zum Versagen führen können (z.B. durch Ablösewirbel bei Masten)!

### 9.3. Sicherheitskriterien

#### 9.3.1. Einige Grundlagen der Statistik

Die Auswertung von Versuchen zur Ermittlung von Belastungsgrößen, Festigkeitswerten, Elastizitätsgrößen, Dehngrenzen u.a. ist nicht ohne die Benutzung statistischer Methoden möglich. Infolge der immer vorliegenden Verteilung der gemessenen Merkmalgröße  $x$  sind nämlich verschiedene statistische Größen für die Beurteilung der Merkmalgröße notwendig. Es sind dies der Mittelwert  $\bar{x}$ , die Standard-

weichung  $s$  und der Variationskoeffizient  $s/\bar{x}$ .

### Relative Häufigkeitskurve

Die vorstehenden Begriffe sind an das Vorhandensein von Verteilungsfunktionen geknüpft. Es gibt eine Vielzahl von Verteilungsfunktionen mit sehr unterschiedlicher praktischer Bedeutung. Besondere Bedeutung besitzen die Binomialverteilung, die Weibullverteilung, die logarithmische Normalverteilung, sowie die Gaußsche Normalverteilung. Von letzterer wird sehr häufig ausgegangen, so auch hier. Bild 9.5 zeigt eine Gaußsche Normalverteilung (Glockenkurve). Ihre Häufigkeitsverteilung hat den Verlauf

$$\varphi(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (9.5a)$$

bei der Stichprobe bzw. der Gesamtheit.

Die standardisierte Form der Gesamtheit lautet

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \quad \text{mit} \quad u = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad (9.5b)$$

Weiteres hierzu ist dem Buch von Graf/Henning/Stange zu entnehmen. Aus diesem Buch werden im folgenden einige Auszüge gebracht.

### Mittelwert, Streuung und Variationskoeffizient der Stichprobe

Der arithmetische Mittelwert  $\bar{x}$  - entsprechend einer (Überlebens-)Wahrscheinlichkeit  $P_{\ddot{u}} = 50\%$  - kann nach der Gleichung

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (9.6)$$

berechnet werden.

Die Streuung ist definiert als das Quadrat der Standardabweichung einer Stichprobe, bestehend aus  $n$  Versuchen:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (9.7)$$

Daneben ist der Schwingfestigkeit der Begriff des Streumaßes  $T$  üblich. Es ist z.B.  $T = N_{90}/N_{10}$ ,

wenn  $N_{90}$  = Bruchlastwechsel mit 90 % Überlebenswahrscheinlichkeit

und  $N_{10}$  = Bruchlastwechsel mit 10 % Überlebenswahrscheinlichkeit.

Der Variationskoeffizient ist durch die Standardabweichung und den

Mittelwert als

$$v_{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{x}} \quad (9.8)$$

definiert.

### Summenhäufigkeitskurve

Öfters wird anstelle der relativen Häufigkeit  $\varphi(x)$  die sog. Summenhäufigkeit  $\Phi(x)$  verwendet. Man erhält sie, wenn man über der Merkmalskala oder über der Skala der Standardabweichung  $\sigma$  die Häufigkeit der Merkmale aufträgt die kleiner oder gleich einem bestimmten Merkmalswert sind. Eine Summenhäufigkeitskurve ist in Bild 9.6 dargestellt, und zwar links bei linearer Auftragung, rechts bei Auftragung im Wahrscheinlichkeitspapier. Bei letzterer Auftragung ist der Ordinatenmaßstab so verzerrt worden, daß die Summenhäufigkeitskurve eine Gerade (Henry-Gerade) ergibt.

Wenn man die Werte von Schwingfestigkeitsversuchen im gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsnetz aufträgt, so erhält man keine Gerade, sondern eine Kurve. Durch Verwendung einer logarithmisch geteilten Merkmalachse (d.h. Umrechnung  $x_i = \text{Log } N_i$  auf der Abszisse) kann die Summenhäufigkeitskurve bzw. Summenlinie auch hier wieder durch eine Gerade angenähert werden (Bild 9.7).

Ob auf eine Häufigkeitsverteilung die Eigenschaften der Normalverteilung zu übertragen sind, kann somit im Gaußschen Wahrscheinlichkeitspapier überprüft werden. Alle gemessenen Werte liegen nämlich auf der sogenannten Henry-Geraden, falls eine Normalverteilung vorliegt. (Für andere Verteilungen gelten andere Beziehungen). Bild 9.8 zeigt zum Unterschied eine schematische Darstellung von Häufigkeitsverteilungen, wie sie bei Schwingfestigkeitsversuchen vorkommen.

### Schwellenwerte zur statistischen Sicherheit

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Merkmalwertes im Bereich  $x$  bis  $x + dx$  (s. Bild 9.9) ist

$$d\Phi(x) = \varphi(x) dx \quad \text{mit} \quad \int_{x_A}^{x_E} \varphi(x) dx = 1 \equiv 100\%, \quad (9.9)$$

wobei bei der betrachteten Gaußschen Normalverteilung  $x_A \rightarrow -\infty$  und  $x_E \rightarrow +\infty$  gehen.

Ein Merkmalwert  $x \leq x_i$  z.B. tritt mit der Wahrscheinlichkeit  $\Phi(x_i)$

auf (Bild 9.9). Dabei gibt  $\Phi(x_i)$  den relativen Anteil der Merkmalswerte  $t$  mit der Eigenschaft  $t \leq x_i$  an. Der Wert von  $\Phi(x_i)$  wird ermittelt aus

$$\Phi(x_i) = \int_{x_A}^{x_i} \varphi(t) dt \quad (9.10)$$

Die Zufallsbereiche bei vorgegebener statistischer Sicherheit können einseitig oder zweiseitig abgegrenzt werden. Die durch diese Abgrenzungen auf der relativen Häufigkeitskurve festgelegte bzw. vorgegebene Sicherheit wird mit  $S$  bezeichnet. Zweiseitige Bereiche begrenzt man meist symmetrisch bezüglich der Wahrscheinlichkeit  $\Phi = \frac{1}{2}$  ab, so daß je ein Anteil  $\alpha/2$  unterhalb einer Schwelle  $x_u$  und oberhalb der symmetrisch liegenden Schwelle  $x_o$  liegt.

Zweiseitige Abgrenzung:

Die Schwellenwerte  $x_u = x_{\alpha'}$  und  $x_o = x_{1-\alpha''}$  zur statistischen Sicherheit  $S = 1 - \alpha$  bei zweiseitiger Abgrenzung sind durch

$$\int_{x_u}^{x_o} \varphi(t) dt = \Phi(x_o) - \Phi(x_u) = S \quad (9.11)$$

gegeben.

Der so abgegrenzte Zufallsbereich enthält alle Merkmalswerte  $t$  mit

$$x_u \leq t \leq x_o.$$

Die Wahrscheinlichkeit des Unterschreitens von  $x_u$  ist  $\alpha'$ , die des Überschreitens von  $x_o$  ist  $\alpha''$ . Die Summe

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' = 1 - S$$

heißt auch Ausfallwahrscheinlichkeit. Normalerweise wählt man Bereiche, die symmetrisch bezüglich der Wahrscheinlichkeit sind, d.h., man wählt

$$\alpha' = \alpha'' = \alpha/2.$$

Bei symmetrischer Abgrenzung  $\alpha' = \alpha/2$  ist die einseitige untere Schwelle  $x_u = x_{\alpha/2}$  zur Sicherheit  $S' = 1 - (\alpha/2)$  gleich der zweiseitigen unteren Schwelle  $x_u = x_{\alpha/2}$  zur Sicherheit  $S = 1 - \alpha$ . Entsprechend ist für  $\alpha'' = \alpha/2$  die einseitige obere Schwelle  $x_o = x_{1-\alpha/2}$  zur Sicherheit  $S'' = 1 - (\alpha/2)$  gleich der zweiseitigen oberen Schwelle  $x_o = x_{1-\alpha/2}$  zur Sicherheit  $S = 1 - \alpha$ ;

Einseitige Abgrenzung:

Bei einseitiger Abgrenzung wird je nach dem Fall  $\Phi(x_o)$  oder  $\Phi(x_u)$  Null.

Die obere Schwelle  $x_o = x_{1-\alpha}$  zur statistischen Sicherheit  $S = 1 - \alpha$  bei einseitiger Abgrenzung ist gegeben durch

$$\int_{x_A}^{x_o} \varphi(t) dt = \Phi(x_o) = S. \quad (9.12)$$

Der so abgegrenzte Zufallsbereich enthält alle Merkmalwerte  $t$  mit

$$x_A \leq t \leq x_E .$$

Die untere Schwelle  $x_u = x_\alpha$  zur statistischen Sicherheit  $S = 1 - \alpha$  bei einseitiger Abgrenzung ist gegeben durch

$$\int_{x_u}^{x_E} \varphi(t) dt = 1 - \Phi(x_u) = S , \quad (9.13)$$

wobei

$$x_u \leq t \leq x_E .$$

### Zuverlässigkeit und Aussagesicherheit

Vor allem in der Luft- und Raumfahrt wird seit langem mit Hilfe der Statistik versucht, eine Aussage für die Zuverlässigkeit eines Bauteiles zu finden.

Nach der Regel über zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten ist dann die Zuverlässigkeit der Gesamtstruktur aus dem Produkt der Zuverlässigkeiten der Einzelteile (wobei diese als unabhängig voneinander angesehen werden) berechenbar. Die Gesamtzuverlässigkeit für die Thor-Rakete beträgt z.B. 94 %.

Die Zuverlässigkeit ( $S_z$ , reliability level) bedeutet, daß mindestens der angegebene Prozentsatz aller Prüfungen über der genannten Größe liegt. Der Begriff der Aussagesicherheit ( $S_v$ ) - oft auch Vertrauensgrenze oder Vertrauensbereich (confidence level) genannt - bedarf einer etwas ausführlicheren Erklärung. Sowohl bei der Zuverlässigkeit als auch bei der Aussagesicherheit handelt es sich aber um den gleichen mathematischen Begriff der Wahrscheinlichkeit.

Während bei der Zuverlässigkeit die wahrscheinliche Häufigkeit der betrachteten Meßgröße selbst beurteilt wird, gibt die Aussagesicherheit an, mit welcher wahrscheinlichen Häufigkeit die Zuverlässigkeitsaussage tatsächlich gilt. Die Aussagesicherheit kann nur in Verbindung mit zugeordneten Stichprobenumfängen praktisch gedeutet werden! Dazu ein Beispiel:

Wenn aus einer Vielzahl von Ergebnissen - aus Werkstoffeingangsprüfungen, Qualitätssicherungsmessungen, Bauteil-Versuchen u.a. - viele Stichprobengruppen entnommen werden, um einen bestimmten Zuverlässigkeitsgrad nachzuweisen, dann gibt die Aussagesicherheit an, in welchem Prozentsatz der Stichprobengruppen diese Zuverlässigkeitsforderung erfüllt sein muß. Das heißt beispielsweise für 99 % Zuverlässigkeit und 90 % Aussagesicherheit, es müssen in mindestens 90 % aller Stichprobengruppen jeweils mindestens 99 % erfolgreiche Ergebnisse ent-

halten sein. In den restlichen 10 % Stichprobengruppen sind geringere Zuverlässigkeiten zulässig. In der technischen Praxis wird allgemein eine Aussagesicherheit von 95 % gefordert.

Stark beeinflusst durch die Raumfahrtentwicklungen hat man die Auslegungsgrößen - an dieser Stelle interessieren uns hauptsächlich die Werkstoffgrößen - statistisch eingeordnet. Es gibt sogenannte

- A - Werte mit 99 % Zuverlässigkeit bei 95 % Aussagesicherheit,
- B - Werte mit 90 % Zuverlässigkeit bei 95 % Aussagesicherheit,
- C - Werte als Anhaltswerte (physikalische Werte),
- S - Werte als Spezifikationsmindestwerte ohne statist. Aussage und daneben Spezifikationswerte mit statistischer Aussage.

Für Faserverbunde sind nach B. H. Johnson die B-Werte realistischer, für die 90 % Zuverlässigkeit bei 95 % Aussagesicherheit gefordert wird.

#### Schluß von der Stichprobe auf die Gesamtheit ( $\sigma$ = unbekannt)

Leider kann bei Untersuchungen i.a. nur von größeren oder kleineren Stichproben ausgegangen werden, da die Gesamtheit praktisch nicht geprüft werden kann. Es stellt sich somit die Aufgabe, von der Stichprobe auf die Grund-Gesamtheit zu schließen, deren Standardabweichung nicht bekannt ist und daraus eine Zuverlässigkeitsaussage zu machen. Im folgenden ist der Rechengang beschrieben (s. [Graf/Henning/Stange]):

#### 1. Kontrolle auf Normalverteilung der Stichprobe

Die einzelnen Meßwerte werden der Größe nach geordnet und auf der Abszisse des Wahrscheinlichkeitspapiers (wie z.B. in Bild 9.10) aufgetragen. Die zugehörigen, etwas aufwendig berechenbaren Summenhäufigkeiten  $H_i(n)$  für Stichprobenumfänge zwischen 6 und 30 können der Tabelle 9.5 entnommen und über den Meßwerten aufgetragen werden. (Weiteres s. [Graf/Henning/Stange]).

Bei Schwingfestigkeitsversuchen werden statt der  $H_i(n)$  vereinfacht die Wahrscheinlichkeitswerte nach

oder 
$$P_u(n) = \frac{\text{Laufender Index } m = 1 \text{ bis } n}{n + 1} \cdot 100\%$$

ermittelt. 
$$P_u(n) = \frac{3m - 1}{3n + 1} \cdot 100\% \quad [\text{HSB, Bl. 61111}]$$

(9.14)

Durch die erhaltenen Punkte wird eine ausgleichende Gerade gelegt. Die Übereinstimmung der Punkte mit den Geraden ist ein Maß für die Güte der Normalverteilung. Zu der Summenhäufigkeit 50 % gehört der Mittelwert  $\bar{x}$ . Bei großen Stichprobenumfängen werden die Einzelwerte klassenweise zusammengefaßt.

2. Auswertung der Stichprobe -

Gegeben:  $n$

zu ermitteln:  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

3. Ermittlung des kleinst- (größt-) möglichen Mittelwertes der Gesamtheit-

Voraussetzung: einseitige Vertrauensgrenze mit der vorgegebenen Sicherheit

$$S_v = 1 - \alpha$$

Gegeben: Freiheitsgrad  $f = n - 1$

zu ermitteln:  $\mu_u = \bar{x} + t_{1-\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$  (später  $\mu_u = \mu$  gesetzt) (9.15)

Vertrauensgrad  $t_v \hat{=} t_{1-\alpha}$  aus Tab. 9.6

4. Ermittlung der kleinst- (größt-) möglichen Standardabweichung der Gesamtheit-

Voraussetzung sei: einseitige Vertrauensgrenze

Zu ermitteln:  $\sigma_u = \chi_u \cdot s$  ( $\chi_u$  hier ohne Index  $v$  geschrieben) (9.16)

$\chi_u, \chi_u$  aus Bild 9.11

5. Ermittlung des zuverlässigen Mindestwertes der Gesamtheit-

Voraussetzung sei: einseitige Sicherheitsaussage

Vorzugeben: Wahrscheinlichkeitssicherheit zur Zuverlässigkeitsaussage (Index  $z$ ) und zur Vertrauensaussage (Index  $v$ ). Weiter  $\sigma_u = \sigma$  gesetzt.

Zu ermitteln:

$$\begin{aligned} \min x &= \bar{x} \left( 1 - \left( \frac{t_v}{\sqrt{n}} + u_z \chi_{0v} \right) \frac{s}{\bar{x}} \right) = (\mu - u_z \sigma) \\ &= \bar{x} \left( 1 - \bar{z} \frac{s}{\bar{x}} \right) = \bar{x} (1 - \bar{z} \sqrt{\bar{x}}). \end{aligned} \quad (9.17)$$

Die Auswertung der Klammer (.....) - also für die sogenannte Zuverlässigkeitskennzahl  $\bar{z}$  - könnte für die übliche Vertrauenssicherheit (z.B.  $S_v = 95\%$ ) vorgenommen werden. Damit würde der Einfluß von  $S_z$  und  $n$  deutlich sichtbar gemacht.

Wer die einzelnen Ausdrücke der Klammer bestimmen will, benötigt noch den Integralgrenzenwert  $u_z$  aus Tabelle 9.7. Der Wert von  $u_z$  gibt an, welchen Zuverlässigkeitsabstand von  $\mu$  man haben will, bzw. welche Ausfallwahrscheinlichkeit man nur zulassen möchte.

Für  $n \rightarrow \infty$  geht  $\mu \rightarrow \bar{x}$  und  $\sigma \rightarrow s$

Ein Anwendungsbeispiel in Zusammenhang mit Bild 9.10 wird am Schluß des Abschnittes 9.3.1. gebracht.

Schluß von sehr kleiner Stichprobe auf die Gesamtheit ( $\sigma$  = bekannt)

Bei dem erwähnten halbempirischen Verfahren stammt die Kenntnis der Werkstoffwerte von Versuchsergebnissen der Einzelschicht, und es wird rechnerisch auf das Laminat übergegangen. Es ergibt sich dabei die Schwierigkeit, aus einer relativ kleinen Probenanzahl auf die Werkstoffwerte dieser Einzelschicht zu schließen.

Die Ermittlung von Materialkenngrößen aus wenigen Versuchen einer Stichprobe hat zur Folge, daß die Bestimmung von zulässigen Werten oder von Mindestwerten der Gesamtheit zu unverhältnismäßig niedrigen Werten verglichen mit dem Mittelwert der Stichprobe führt. B. H. Jones macht deshalb folgenden Vorschlag:

Weil die Standardabweichung nicht geeignet ist, verschiedene Merkmalsverteilungen zu vergleichen, geht man in der Beziehung (vgl. Skizze in Bild 9.11)

$$\min x = \mu - u_z \sigma \quad (u_z = K = \text{der amerik. Literatur}) \quad (9.18)$$

zur Verwendung des Variationskoeffizienten der Gesamtheit ( $v_\mu$ ) über. Damit bestimmt man den zuverlässigen Mindestwert der Gesamtheit zu

$$\min x = \mu - u_z \mu \frac{\sigma}{\mu} = \mu (1 - u_z v_\mu).$$

Die Idee von Jones besteht nun darin,  $\bar{x}$  mit der Stichprobe zu ermitteln und dann mit  $\bar{x}$  den Mittelwert der Gesamtheit  $\mu$  herzuleiten. Der Variationskoeffizient wird hingegen aus vergleichbaren, normierten Meßreihen übernommen, bei denen nur noch die Verteilungsform und nicht der Mittelwert wesentlich ist. Die statistische Größe  $u_z(S_v)$  ist nur festzulegen.

Der Rechengang dabei ist die Bildung der normierten Form

$$\frac{\min x}{\mu} = 1 - u_z v_\mu$$

und das Ausdrücken von  $\mu$  durch  $\bar{x}$

$$\begin{aligned} \mu &= \bar{x} - t_v \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} - \frac{t_v}{\sqrt{n}} \frac{\sigma}{x_{0v}} && \text{(bei einseitiger Vertrauensgrenze, ansonsten siehe [Graf/Henning/Stange])} \\ \mu &= \bar{x} - \frac{t_v}{x_{0v} \sqrt{n}} \mu v_\mu \quad \text{bzw.} && \mu = \bar{x} / (1 + \frac{t_v}{x_{0v} \sqrt{n}} v_\mu). \end{aligned}$$

Das liefert unter Korrektur einiger Schreibfehler in [Jones]

$$\frac{\min x}{\bar{x}} = \frac{1 - u_z v_\mu}{1 + \frac{t_v v_\mu}{x_{0v} \sqrt{n}}}. \quad (9.19)$$



Die Auswertung dieser Gleichung zeigt, daß die Abhängigkeit von der Probenanzahl stark abnimmt (Bild 9.12) wenn man nicht den Variationskoeffizienten  $v_{\bar{x}}$  einer Stichprobe von  $n$  Proben verwendet, sondern einen Variationskoeffizienten  $v_{\mu}$  der Gesamtheit einsetzt. (Da zu Bild 9.12 keine Angabe von  $S_z$  gemacht wurde, hat der Verfasser aus der Kurve rückwärts den Wert  $S_z = 96\%$  ermittelt, eine Größe, die bei  $S_v = 95\%$  zwischen A- und B-Werten liegt). Eine Empfehlung für den Variationskoeffizienten  $v_{\mu}$  gibt Tabelle 9.8.

### Zahlenbeispiel für eine Stichprobenauswertung

Im folgenden Zahlenbeispiel wird die Zuverlässigkeitsbeurteilung einer Kleinserie von Behältern durchgeführt. Es handelt sich <sup>also</sup> nicht um eine Vorbemessung oder Auslegung sondern um eine Versuchsauswertung bei einem bestimmten Behältertyp.

Der Versuch umfaßt 12 Behälterberstungen, deren Ergebnisse im Wahrscheinlichkeitspapier eingetragen werden (Bild 9.10). Als Ergebnisse können wir ablesen ( $1 \text{ bar} = 10 \text{ N/cm}^2$ )

$$\bar{x} = 92,0 \text{ bar} ; \quad s = 2,50 \text{ bar} \quad (v_{\bar{x}} = 2,5/92,0 = 2,82\%) .$$

Bei Vorgabe einer einseitigen Vertrauensgrenze mit einer Aussage-sicherheit von

$$S_v = 1 - \alpha = 95\%$$

können wir über Tabelle 9.6 mit dem sog. Vertrauensgrad

$$t_v = 1,796 \quad \text{für } f = 12 - 1 = 11$$

den kleinstmöglichen Mittelwert der Gesamtheit zu

$$\begin{aligned} \mu &= 92,0 - 1,796 \cdot 2,50 / \sqrt{12} = 92,0 - 1,30 \\ &= 90,7 \text{ bar} \end{aligned}$$

ermitteln.

Die Standardabweichung der Gesamtheit (Großserie) wird mit Hilfe von Bild 9.11 für  $S_v = 95\%$  berechnet. Sie lautet, wenn  $\chi_{\alpha_v} = 1,55$ ,

$$\sigma = 1,55 \cdot 2,50 = 3,87 \text{ bar} .$$

Damit läßt sich der Variationskoeffizient der Gesamtheit berechnen

$$v_{\mu} = \frac{3,87}{90,7} = 4,26\% .$$

Den Mindestbruchwert erhalten wir nach der Berechnung von  $\bar{z}$  ( $u_z$  aus Tabelle 9.7), wenn z.B. mit einer Zuverlässigkeitssicherheit

von  $S_z = 99,865\%$  ( $u_z \equiv K = 3$ ), also einer Ausfallrate der Großserie von  $0,135\%$  gerechnet werden soll

$$p_{ul} = \min x = \bar{X} \left(1 - \bar{z} \frac{s}{\bar{X}}\right) = 92,0 \left(1 - 5,17 \frac{2,50}{92,0}\right) \\ = 92,0 (1 - 0,14) = 79,1 \text{ bar.}$$

Zur Kontrolle kann  $p_{ul}$ , da  $u_z = 3$ , entsprechend Bild 9.5 auch aus

$$p_{ul} = \mu - u_z s = 90,70 - 3 \cdot 3,87 = 79,1 \text{ bar}$$

berechnet werden.

Dieser Wert muß entsprechend  $S_v = 95\%$  von 95 aller geprüften Kleinserien erreicht werden, wenn die Großserie in 100 zu prüfende Kleinseriengruppen à 12 Behälter aufgeteilt würde.  $S_v$  garantiert praktisch die vorgegebene Ausfallrate.

Als Sicherheitswert  $s$  liegt somit bei einem Grenzdruck  $p_{DUL} = 60 \text{ bar}$ , der größer oder gleich dem maximalen Betriebsdruck sein kann,

$$s = \frac{p_{ul}}{p_{DUL}} = \frac{79,1}{60,0} = 1,31 \quad (9.20)$$

vor.

Um diese Sicherheit zu erreichen, hätte ein sogenannter Auslegungsfaktor den Wert (s. auch Bild 9.10)

$$j_u = \frac{p_{DUL}}{p_{ul}} = \frac{\mu}{p_{ul} / s} = \frac{\mu s}{\mu - u_z s} = \frac{s}{1 - u_z s} = \frac{1,31}{1 - 3 \cdot 0,0426} = 1,5 \quad (9.21)$$

haben müssen. Dieser wird <sup>id.</sup>im Unterschied zu  $s$  auf den mittleren Berstdruck  $\mu$  bezogen<sup>gedacht</sup>. Er entspricht einem konventionellen, nicht statistisch bezogenen Sicherheitsfaktor und setzt  $p_{DUL} = \mu$  als Annahme voraus.

### 9.3.2. Technische Zuverlässigkeitsauslegung und konventionelle Auslegung

An die Entwicklung von Bauteilen ist im Rahmen der Festigkeitsrechnung grundsätzlich eine Einarbeitung von gewissen Sicherheiten gebunden.

Bei der üblichen konventionellen Auslegung besteht die Einarbeitung darin, die vom Bauteil ertragenen Belastungen mit den zu erwartenden Betriebsbedingungen mit Hilfe eines (Un-) Sicherheitsfaktors zu vergleichen. Dieser (Un-) Sicherheitsfaktor wiederum kann aus einer Vielzahl von Einzelfaktoren aufgebaut sein, die die verschie-

denen Betriebseinflüsse berücksichtigen, oder er besteht aus einer einzigen Zahl, in der alle Einflüsse implizit enthalten sind.

Das zweite Verfahren, welches bei Serien mit großen Stückzahlen und insbesondere in der Raumfahrt angewandt wird, bedient sich statistischer Grundlagen. Es unterscheidet sich vom konventionellen Verfahren nur dadurch, daß man aus Gründen der Wirtschaftlichkeit alle vorliegenden verwertbaren Ergebnisse bei der Auslegung statistisch mit verarbeitet und anwendet. Dieses Verfahren einer technischen Zuverlässigkeitsauslegung ist somit an das Vorhandensein statistischer Unterlagen geknüpft. Das bedeutet unter anderem, daß die Auslegungsgrenzlast statistisch abgesichert und nicht einfach festgelegt ist.

Bei der technischen Zuverlässigkeitsauslegung geht man von der Häufigkeitsverteilung vorliegender Ergebnisse, z.B. der Normalverteilung aus, für die außer dem Mittelwert noch das Maß der Standardabweichung bekannt ist. Es genügt dann die Festlegung eines Vielfachen der Standardabweichung  $\sigma$  als Abstand vom Mittelwert  $\mu$ , um eine vorgegebene Zuverlässigkeit zu definieren.

Wird also ein Bauteil mit dem  $j$ -fachen der zu erwartenden Betriebslast ausgelegt (als Mittelwerts-Forderung), dann darf für diese Bauteilsorte eine Mindestsicherheit  $s$  mit der zu  $u_z$  zugeordneten Zuverlässigkeit erwartet werden.

Aus Bild 9.5 war ersichtlich, daß die Normalverteilung eine symmetrische Kurve darstellt, wobei der Mittelwert auf der Symmetriegeraden liegt. Die Wendepunkte der Kurve liegen bei  $\pm\sigma$ . Der Flächeninhalt unter der Kurve beträgt zwischen (zweiseitige Grenze)

$$\mu \pm \sigma \cong 68\% \text{ , zwischen } \mu \pm 2\sigma \cong 95\% \text{ und } \mu \pm 3\sigma \cong 99,7\%$$

Daraus folgt beispielsweise, daß ein Toleranzfeld wenigstens  $6\sigma$  breit sein soll bzw.  $u_z = 3$  betragen sollte, damit der Ausschuß kleiner als 0,3 % bleibt. Dies gilt aber nur für ein symmetrisch zu  $\mu$  liegendes Toleranzfeld. Bei unsymmetrischem Toleranzfeld ist der Ausschuß größer, und <sup>es</sup> müßte eine andere Verteilung herangezogen werden.

Entsprechend dem Text zu Glg. (9.14) macht man sich bei der konventionellen Auslegung keine großen Gedanken um den Auslegungsfaktor - hier  $j_u$  genannt -. Man verwendet ihn und verläßt sich auf

den Versuch, der den Sicherheitswert  $s$  belegt.

Bei der technischen Zuverlässigkeitsauslegung wendet man wirklich die Beziehung

$$j_u = \frac{s}{1 - u_z v_\mu} \quad (9.22)$$

an und betrachtet im vorhinein - soweit es möglich ist - die Größen  $u_z$  und  $v_\mu$  in ihrem Einfluß auf  $s$ . Hierbei spielt der Variationskoeffizient  $v_\mu$  eine wesentliche Rolle, da er als empirisches Maß alle bauteilbedingten Streuungen beinhaltet und mit seiner Kenntnis der notwendige Sicherheitswert  $s$  relativ klein angesetzt werden kann.

Der Betrag des Variationskoeffizienten ist deswegen von großer Bedeutung, weil eine Erhöhung von 5 auf 10 bzw. 15 % eine Erhöhung des Auslegungsfaktors  $j_u$  und damit etwa des Gewichtes um 21 bzw. 54 % nach sich zieht. Dabei wurde  $u_z = 3$  entsprechend einer Zuverlässigkeit von  $S_z = 99,865$  % einseitige Grenze angenommen.

Im allgemeinen ist es notwendig, vor und während des Fertigungsvorgangs einer Baureihe (z.B. Behälter) eine umfangreiche Qualitätskontrolle vorzunehmen und statistisch auszuwerten. Das heißt, es müssen Werkstoffprüfungen durchgeführt und ausgewertet werden, so daß nicht erst durch Berstversuche an einem fertigen Behälter Zuverlässigkeitsaussagen gemacht werden, sondern schon für die Baumaterialien des Behälters.

Da bei all diesen Untersuchungen nur von größeren oder kleineren Stichproben ausgegangen wird, stellt sich die Aufgabe, von der Stichprobe auf eine Gesamtheit zu schließen, deren Standardabweichung  $\sigma$  nicht bekannt ist und daraus eine Zuverlässigkeitsaussage zu machen. Wie sich die Anzahl der Versuchsergebnisse auf die Zuverlässigkeitssicherheit  $S_z$  bzw. dem einseitigen Toleranzfaktor  $u_z$  bei vorgegebener Vertrauenssicherheit  $S_v$  auswirkt, zeigt Bild 9.13.

Eine statistische Absicherung des Sicherheitswertes  $s$  ist natürlich erst dann gegeben, wenn eine Versuchsreihe vorliegt und ihre Ergebnisse zur Auslegungsgrenzlast (Index DLL) ins Verhältnis gesetzt werden.

### 9.3.3. (Un-) Sicherheitsfaktoren und Abminderungsfaktoren

Zustände bei denen ein Tragwerk bei gegebener Belastung, in gegebener

ner Zeit und gegebener Umwelt aus Gründen zu geringer Tragfähigkeit I, zu hoher Verformung II oder des Verlustes anderer geforderter Eigenschaften III (infolge Zeiteinfluß z.B.) seine Sicherheit oder Verwendbarkeit verliert, werden als Grenzzustände bezeichnet. In der Regel wird gefordert, daß das Tragwerk während seiner Lebensdauer keinen der drei angeführten Grenzzustände überschreitet. Die Bedingungen des Grenzzustandes III können im häufigsten Fall, bei dem ein Abbau der Festigkeit vorliegt, unmittelbar in I und II einbezogen werden [Dietrich].

Diese Forderungen werden z.B. im Flugzeugbau durch die Military Specification MIL-A-8860 (s. [Hadcock]) wie folgt ausgedrückt:

Das Tragwerk (die Struktur) muß genügend Festigkeit haben, um die äußere Last (UL) ohne Bruch überstehen zu können. Das Tragwerk sollte zumindest gleiche Lebensdauer bei Schwingbelastungen haben wie gewünscht wird. Deformationen im Betrieb dürfen nicht die Funktionsfähigkeit stören oder ungewünschte Wartung oder Reparaturen etc. verursachen.

Alle vorgenannten Forderungen sind unabhängig vom Werkstoff.

Um die vorgenannten Grenzzustände I bis III nicht zu erreichen, werden Sicherheiten in die Auslegung eingebaut, da zu jedem Zeitpunkt die Gebrauchsfähigkeit des Tragwerkes gewährleistet werden muß.

Der Sicherheitswert ist laut Definition der Quotient aus den Beanspruchungen bzw. den Verformungen im maßgebenden Grenzzustand und den vorhandenen Beanspruchungen bzw. Verformungen. Man muß aber grundsätzlich darauf achten, daß der im Versuch erzielte Sicherheitswert  $s$  stets an eine gewünschte Größe der Überlebenswahrscheinlichkeit  $p_u$  geknüpft ist.

Die Definition des <sup>(Un-)</sup>Sicherheitsfaktors  $j$  bedarf grundsätzlich einer Interpretation der verwendeten Größen. Dao-Thiem/Massoud definieren den (klassischen Un-) Sicherheitsfaktor  $j$  als Verhältnis der mittleren Festigkeit (50 %) zum Mittelwert (50 %) der auftretenden Spannung.

Wesentliche Faktoren für die Höhe der notwendigen Sicherheit sind die Gefahr für Menschenleben und die möglicherweise eintretenden wirtschaftlichen Schäden.

Das übliche Verfahren des Einbauens von Sicherheiten ist, daß ein Sicherheitsfaktor gewählt wird, den wir besser Unsicherheitsfaktor nennen sollten. Dieser Faktor beinhaltet alle unbekanntes Größen, die bei der Ermittlung des Tragvermögens einer Struktur nicht fest-

gelegt oder berechnet werden können. Er umfaßt also alle Unsicherheiten, die man nicht durch Prüfmethode, genauere Rechnungen und Sorgfalt mehr verringern kann.

Im einzelnen deckt der Sicherheitsfaktor folgende "Unsicherheiten" ab ([Ebner], u.a.):

- a) Ungenaue Kenntnis der zu erwartenden Belastungen und Möglichkeit, daß die Auslegungslast überschritten wird;
- b) Ungenauigkeiten in der theoretischen und experimentiellen Bestimmung von Spannungen und Verformungen infolge der Lasten und nicht berechenbarer Eigenspannungen (Fehler in der Numerik und im Rechenmodell);
- c) Streuung der Materialeigenschaften und Tragfähigkeiten (herstellungs- wie alterungsbedingt);
- d) Abweichung zwischen den vorgeschriebenen und ausgeführten Abmessungen des Tragwerks; Exzentrizitäten, Korrosionseinfluß u.a. ...

Die erforderlichen Sicherheitsfaktoren können abgemindert werden, wenn die vorgenannten Einflüsse durch die Verfeinerung der Berechnungsmethoden, der Fertigungsverfahren und Prüfmethode usw. eingeschränkt werden.

Es ist dann verständlich, daß die Bestimmung der erforderlichen Sicherheitsfaktoren nicht allgemein erfolgen kann, sondern von Fall zu Fall den speziellen Aufgabenstellungen und technologischen Gegebenheiten angepaßt werden muß.

Eine wirtschaftliche Dimensionierung eines Bauteils ergibt sich erst dann, wenn die Sicherheitsfaktoren entsprechend der jeweiligen Aufgabe differenziert werden. In diesem Fall kann genau nach Kenntnis der Einzelunsicherheiten der Gesamtunsicherheitsfaktor bzw. der Auslegungsfaktor so klein wie möglich gemacht werden.

Es empfiehlt sich nach dem Verfahren der Teilunsicherheitsfaktoren eine Aufteilung des Auslegungsfaktors in ein Produkt aus 3 Faktoren

$$j_u = j_L \cdot j_D \cdot j_M \quad (9.23a)$$

oder in die übliche, einfachere Aufteilung in den sogenannten werkstoffunabhängigen (Un-)Sicherheitsfaktor S und den werkstoffabhängigen Abminderungsfaktor A

$$j_u = (j_L \cdot j_D) \cdot j_M = S \cdot A \quad (9.23b)$$

Dabei stellt  $j_L$  den Last-Unsicherheitsfaktor,  $j_D$  den Design-Unsicherheitsfaktor und  $j_M$  den Material-Unsicherheitsfaktor dar. Der Faktor  $j_D$  würde dabei im wesentlichen Unsicherheiten der Berechnung, der Berechnungsannahmen und der Fertigung abdecken. Bedingt durch die Unsicherheiten in den Annahmen über die Größe und Wirkung der äußeren Lasten, besteht ein enger Zusammenhang zwischen Sicherheitsfaktor bzw. -faktoren und den Lastannahmen.

Für exakte oder statistisch abgesicherte Lastannahmen, falls 25/35-Werte gewünscht und festlegbar, kann  $j_L$  bis gegen 1,0 abgemindert werden. Analoges gilt für  $j_M$ . Es ist dabei notwendig, die Methoden der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung heranzuziehen und die einzelnen Einflüsse - durch Versuche und Erfahrung abgestützt - statistisch zu erfassen.

Das Festigkeitsverhalten vieler Bauteile wird durch sich stark ändernde Spannungs-Mittelwerte und Spannungsamplituden bestimmt. An die Stelle der üblichen (Un-) Sicherheitsfaktorrechnung des Bauteils ist dann sinnvollerweise ein Nachweis der Wahrscheinlichkeit notwendig, mit der das Bauteil innerhalb einer geforderten Lebensdauer nicht ausfällt. Dazu kommt die Angabe eines Sicherheitswertes  $s$ , dessen Wert an die gewünschte oder verlangte Nicht-Ausfall-Wahrscheinlichkeit = Überlebenswahrscheinlichkeit geknüpft ist. (Der Prozentsatz der Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_A$  ist 100 % minus dem Prozentsatz der Überlebenswahrscheinlichkeit  $p_U$ ). Bild 9.14 veranschaulicht den Begriff der Bruchwahrscheinlichkeit.

Wann immer über die Begriffe (Un-) Sicherheitsfaktor, Auslegungsfaktor, Sicherheitswert gesprochen wird, so benötigen diese Begriffe grundsätzlich eine Erklärung, wie sie zu verstehen sind, Der Verfasser sieht folgende Definition:

Der Sicherheitswert  $s$  ist eine statistisch abgesicherte Größe. Sie ist erst nach einer Versuchsreihe also nach dem Bau bekannt.

Die (Un-) Sicherheitsfaktoren  $j_L$ ,  $j_D$ ,  $j_M$  sind Einzelfaktoren, die vor der Durchführung einer Auslegung oder einer Nachrechnung festzulegen sind.

Der Auslegungsfaktor  $j_u$  umfaßt die Einzelfaktoren und wird als Auslegungsfaktor in der Rechnung verwendet. Er entspricht im wesentlichen dem konventionellen Sicherheitsfaktor (vgl. Glg. (9.14)).

Die Sicherheitsspanne (margin of safety) ist  $MS = s - 1$ .

Als Auslegungsfaktoren auf dem Gebiet des Flugzeugbaus (s.a. [Hertel: Leichtbau]) sind beispielsweise für die statischen Lastfälle (Ma-

terialwerte statistisch abgesichert)

- $j_u = 1,35$  gegen Überschreitung der  $\sigma_{0,2}$ -Grenz (von Metallen)
- $j_u = 1,80$  gegen Erschöpfung der Tragfähigkeit bzw. Bruch
- $j_u = 2 \div 4$  gegen Ermüdung

zu berücksichtigen. Diese Zahlen gelten sowohl für Spannungs- wie Instabilitätsbrüche.

Für dynamische Beanspruchungen werden andere Werte herangezogen.

Neben den vorgenannten Faktoren können, spezielle Prüffaktoren festgelegt sein. Ebenso werden (z.B. ESRO) als Auslegungsgrenzlasten obere Schwellenwerte ( $\mu + 3\sigma$  oder  $\mu + 2\sigma$ ) festgesetzt, so daß  $j_L \rightarrow 1$  geht und  $j_u$  entsprechend niedriger angesetzt werden kann, z.B.  $j_u = 1,5$  gegenüber  $\sigma_B$ , das wiederum selbst statistisch abgesichert sein kann.

Besondere Beachtung verdient der Sicherheitsfaktor bei Lebensdauer- auslegungen, da sowohl beim Kriechen als bei Ermüdung zwischen den Spannungen und der Lebensdauer kein lineares Verhalten besteht. Eine geringe Veränderung in der Belastung ergibt eine erheblich größere Veränderung in der Lebensdauer (s. [HSB], Bl. 61 111).

Angaben über Sicherheitsfaktoren  $S$  (auch  $\gamma$  genannt) findet man u.a. in AD-Merkblättern in der DIN 4114 des Stahlbaus. Die Höhe des Sicherheitsfaktors wird danach gewählt, wie bedeutsam ein Ausfall des Bauteils ist.

Um ein Gefühl für die Größe der Sicherheitsfaktoren  $S$  zu bekommen, seien einige Werte aus [Dölfen] angegeben:

Bemessung gegen Bruch:  $S_B = 1,75$  bis  $S_B = 2,1$  je nach Grad der Vorankündigung und Gefahr für Leib und Leben,

Bemessung gegen Überschreiten der Schädigungs- oder Proportionalitätsgrenze:  $S_p = 1,5$  bis  $S_p = 1,75$ ,

Bemessung gegen kritische Dehnungen oder Instabilität:  $S_r = 1,75$  bis  $S_r = 2,5$  je nach Grad der Vorankündigung und Gefahr für Leib und Leben.

### Abminderungsfaktoren

Es ist bei Faserverbundwerkstoffen sehr sinnvoll, die werkstoffunabhängigen Sicherheitsfaktoren  $j_L$  und  $j_D$  (entsprechend Glg. (9.22)) bzw.  $S$  von den werkstoffabhängigen Sicherheitsfaktoren  $j_M$  bzw.  $A$  zu trennen. Damit können die gebräuchlichen Werte für  $S$  ohne weitere



Zuschläge für spezielle Werkstoffe beibehalten werden.

Die werkstoffabhängigen Unsicherheiten, Streuungen und Einflußgrößen werden in [Winkler/Buhmann] durch die Abminderungsfaktoren  $A_B$  gegen Bruch (Index B),  $A_P$  gegen Überschreitung der Proportionalitätsgrenze oder der Mikrorißgrenze (Index P), sowie  $A_J$  gegen Instabilität (Index J) erfaßt und in A vereinigt, z.B. bei Instabilität

$$A = A_J = A_{1J} \cdot A_{2J} \cdot A_{3J} \quad (9.24)$$

Als Einflußgrößen sind zu unterscheiden solche, die

- a) annähernd während der gesamten Lebensdauer des Bauteils auftreten und dementsprechend wirklichkeitsgetreu im Versuch ermittelt werden müssen und solche ,
- b) die nur gelegentlich auftreten oder örtlich in der Intensität begrenzt sind und gegebenenfalls mit einem pauschalen Erfahrungsfaktor berücksichtigt werden können.

Die einzelnen Abminderungsfaktoren setzen sich nach Ehrenstein wie folgt zusammen:

$A_1$  = Abminderungsfaktor für Extrapolation der Kriechkurven. Er ist in erster Linie von der Zeit, auf die extrapoliert wird, abhängig. Er soll ferner ein durch Spannungskonzentration, mehrachsige Beanspruchung usw. an Bauteilen bedingtes abweichendes Kriechverhalten gegenüber den Probekörpern berücksichtigen.

$A_2$  = Abminderungsfaktor für Fertigungseinflüsse.

$A_3$  = Abminderungsfaktor für beschleunigtes Kriechen bei Alterung.

$A_4$  = Abminderungsfaktor für Bruch vor Erreichen des im idealisierten Versuch ermittelten  $\sigma_B$  infolge Alterung.

$A_5$  = Abminderungsfaktor für Einsatz bei erhöhter Temperatur.

$A_n$  = Abminderungsfaktoren für andere Einflüsse.

Die  $A_i$  stellen dabei Erfahrungswerte dar. Tabelle 9.9 vermittelt eine Übersicht über bei GFK verwendete  $A_i$ -Werte (s.a. [Woebcken]).

#### 9.3.4. Zulässige Spannungen

Je nach Konstruktion, Formgebung, Beanspruchungsart und Verwendung eines FK-Bauteils wird gegen Spannungen oder gegen Dehnungen dimensioniert. Dabei müssen - wie schon angeführt - zwei Unzulänglich-

keiten berücksichtigt werden:

Die Unvollkommenheit der rechnerischen Abschätzung des Spannungsflusses aufgrund nicht erfaßbarer, bauteil- und faserverbundwerkstoffspezifischer Einflußgrößen und weiter der infolge mannigfaltiger Kombinationsmöglichkeiten noch lückenhafte Kenntnisstand über Faserverbundwerkstoffe, ihre Eigenschaftswerte und deren Abhängigkeit von Zeit, Temperatur und anderen Einflüssen.

Eine erste Methode, "die Konstruktion sicher zu machen", ist die schon erwähnte Art, daß man für die Auslegungsrechnungen die Lastgrößen mit einem Auslegungsfaktor multipliziert

$$P_{DUL} = j_u \cdot P_{DLL} \quad (9.25)$$

und nach der rechnerischen Bruchlast  $P_{DUL}$  dimensioniert.

Im Festigkeitsnachweis wird dann festgestellt, ob die rechnerisch auftretenden Spannungen (Dehnungen) kleiner als bestimmte Festigkeitswerte (Dehnwerte) sind

$$\text{rechn. } \sigma_{DUL} \leq \sigma_{\text{Grenzwert}} (\sigma_{0,2} \text{ als A-Wert z.B.}) \quad (9.26)$$

Die andere, inverse Methode ist das Arbeiten mit den Auslegungsgrenzlasten  $P_{DLL}$ . Es muß bei dieser Methode dann nachgewiesen werden, daß die rechnerisch auftretenden Spannungen kleiner/gleich den zulässigen Spannungen sind

$$\text{rechn. } \sigma_{\text{Vorh.}} = \sigma_{DLL} \leq \text{zul } \sigma = \frac{\sigma_{\text{Grenzwert}}}{j_u} \quad (9.27)$$

Den Sicherheitswert, der mit diesen beiden Methoden schließlich erzielt wurde, liefert nur der Versuch durch Feststellung von  $P_{UL}$  bzw.  $\sigma_{UL}$  mit

$$s = \sigma_{UL} / \sigma_{DLL} \quad (9.28)$$

Das Arbeiten mit den zulässigen Spannung zur Erzielung eines betriebssicheren Bauteils ist die gebräuchlichste Art Sicherheiten einzubauen. Sie beruht aber auf den nicht immer erfüllten Voraussetzungen, daß

- a) Belastungen, Schnittgrößen und Spannungen linear miteinander bis zum Grenzzustand verknüpft sind und
- b) eine Änderung der Festigkeit keine Änderung der Verteilung der

Schnittgrößen bewirkt (Fließgelenke ändern die Verteilung).

Nach Neitzel werden die zulässigen Spannungen durch

$$\text{zul } \sigma = \frac{\sigma_{\text{Grenzwert}}}{f_u} = \frac{1}{S} \left( \frac{\sigma_{\text{versagen}}}{A} \right) \quad (9.29)$$

festgelegt, wobei in der Klammer der jeweilige Grundwert durch den Werkstoffgesamtfaktor geteilt wird, z.B.

$$\frac{\sigma_B}{A_B} \quad \text{oder} \quad \frac{E_0}{A_T}$$

Bei der Bestimmung zulässiger Spannungen werden die Ergebnisse der Festigkeitsversuche analog zu dem Beispiel in Abschnitt 9.3.1. ausgewertet. Um aber für einen bestimmten, gewünschten Toleranzfaktor

$u_z$  A- bzw. B-Werkstoffwerte zu erhalten, muß man die Anzahl der Proben unterschiedlich groß wählen. A-Werte verlangen eine größere Basis von Proben oder Testergebnissen als B-Werte; für Werte, die dichter am Mittelwert liegen ( $u_z$  wird kleiner), gilt dasselbe. In Bild 9.13 sind die A- und B-Wert-Kurve eingetragen. Als Ermittlungsgrundlage für diese Kurven diene das Vorhandensein einer einseitigen Grenze. Eine solche einseitige Grenze wird dann genommen, wenn allein interessiert, daß Festigkeitswerte nicht unter einer bestimmten Grenze liegen dürfen, Einzelwerte aber ruhig sehr hohe Werte erreichen können.

#### Zulässige Spannungen beim Faserverbund

Beim Faserverbund war somit gegenüber dem homogenen Werkstoffen bezüglich der Auslegungsfaktoren oder der zulässigen Spannungen nicht prinzipiell Neues zu berücksichtigen.

Aufmerksamkeit muß dem Ersten Reißen in der am höchsten belasteten Schicht des Laminates geschickt werden (Auftreten des 1. Bruches), weil dieses Ereignis häufig die äußerste ertragbare Last darstellt. Von gleicher Bedeutung kann aber schon bei Vorhandensein eines aggressiven Mediums das Auftreten der Mikrorisse (crazes) sein.

Bezogen auf die Einzelschicht schlägt B. H. Jones (s. Bild 9.15) vor, daß die Auslegungsgrenzlast (Design Limit Load = DLL) keine Spannung größer als  $2/3$  der bei äußerster Last (Ultimate Load) hervorgerufenen Spannungen in irgendeiner Schicht erzeugt. Die Annahme hierin, daß der Bruch eintritt, wenn eine spezielle Schicht reißt, ist allerdings ziemlich konservativ, weil ein Überschreiten der

allgemein kritischen Querkzugfestigkeit einer Schicht noch nicht zum Laminatbruch führen muß. Ähnliches gilt für den Sekantenmodul in Querrichtung bei einer Steifigkeitsauslegung.

Abhängigkeit des Sicherheitswertes s vom Variationskoeffizienten

Bei der Auslegung metallischer Bauteile wird im Leichtbau recht häufig ein Sicherheitswert  $s = 1,5$  gewünscht und als das Verhältnis der äußersten, ertragbaren Spannung zur Fließspannung gesetzt. Dabei werden statistisch abgesicherte Werkstoffwerte aus Versuchen verwendet (A- oder B-Werte), die einen bestimmten Variationskoeffizienten  $v_\mu$  aufweisen.

Es soll nun geklärt werden, wie sich der Sicherheitswert  $s$  ändert, wenn man Werkstoffe mit unterschiedlichem, vor allem größeren Variationskoeffizienten (wie bei Faserverbund häufig vorliegend) verwenden muß und gleiche statistische Sicherheiten beibehalten will. Die Klärung wird am Beispiel des Zugstabes unter definierter Lastverteilung deutlich. Es wird dabei beachtet, daß aus den einzelnen statistischen Größen, die jetzt Größen der Gesamtheit sind, der statistisch abgesicherte Sicherheitswert  $s$  unabhängig von der Merkmalsgröße - hier der Spannungsgröße - gefunden werden kann.

Für die Auslegungsgrenzspannung läßt sich allgemein die Beziehung

$$\sigma_{DUL} = \mu_L + u_{zL} \sigma_L = \mu_L \left(1 + u_{zL} \frac{\sigma_L}{\mu_L}\right) = \mu_L (1 + u_{zL} v_L)$$

anschreiben. Dieser Wert ist trotz vorliegender gleicher Normalverteilung der Beanspruchung infolge der Zugkraft vom Material des Zugstabes abhängig. Man erreicht die Unabhängigkeit vom verwendeten Material, wenn man formal normiert

$$\frac{\sigma_{DUL1}}{\mu_{L1}} = 1 + u_{zL1} \delta_{L1} = \frac{\sigma_{DUL2}}{\mu_{L2}} = 1 + u_{zL2} \delta_{L2}$$

und entsprechend des tatsächlichen Funktionsverlaufes  $u_{zL1} = u_{zL2} = u_{zL}$  und  $\delta_{L1} = \delta_{L2} = \delta_L$  einsetzt.

Bild 9.16 stellt heraus, daß sowohl beim Werkstoff 1 wie dem Werkstoff 2 dieselbe Spannungsverteilung vorhanden ist. Die Festigkeitsverteilung hingegen ist bei beiden Werkstoffen verschieden.

Da hier nur der Einfluß unterschiedlicher Variationskoeffizienten gezeigt werden soll, wird

$$\frac{\mu_1}{\mu_{L1}} = \frac{\mu_2}{\mu_{L2}} = \chi$$

gesetzt. Das bedeutet, daß die höchsten ertragbaren Spannungen bei bestimmten statistischen Sicherheiten in normierter Form

$$\frac{\sigma_{ul_1}}{\mu_{L_1}} = \frac{\mu_1}{\mu_{u_1}} - \frac{u_{z_1} \sigma_1}{\mu_{L_1}} = \chi - u_{z_1} \frac{\sigma_1}{\mu_{L_1}} = \chi - u_{z_1} \frac{\sigma_1}{\mu_1} \frac{\mu_1}{\mu_{L_1}}$$

und

$$\frac{\sigma_{ul_2}}{\mu_{L_2}} = \chi (1 - u_{z_2} v_{\mu_2})$$

sind.

Damit ergibt sich bei Belastung des Zugstabes 1 die Sicherheit

$$s_1 = \frac{\sigma_{ul_1}}{\sigma_{Dul_1}} = \frac{\mu_{L_1} \sigma_{ul_1} / \mu_{L_1}}{\mu_{L_1} \sigma_{Dul_1} / \mu_{L_1}} = \frac{\chi (1 - u_{z_1} v_{\mu_1})}{1 + u_{z_1} \gamma_L}$$

und für den Zugstab aus dem Werkstoff 2

$$s_2 = \frac{\chi (1 - u_{z_2} v_{\mu_2})}{1 + u_{z_2} \gamma_L}.$$

Wird nun der Sicherheitsfaktor  $s_1$  festgelegt, so läßt sich für unterschiedliche Variationskoeffizienten des Werkstoffes 2 gegenüber 1 der Sicherheitswert  $s_2$  aus dem Verhältnis

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{1 - u_{z_2} v_{\mu_2}}{1 - u_{z_1} v_{\mu_1}} \quad (9.31)$$

ermitteln. Die Glg. (9.31) besagt unter anderem, daß man zur Erzielung desselben Sicherheitswertes beim Zugstab 2  $s_2 = s_1$  setzen muß oder wenn man denselben Sicherheitswert beibehalten will, so müssen die Produkte in Zähler und Nenner gleich sein.

Bei der Auslegung eines Zugstabes tritt auch die Frage auf: Um wieviel hat man den Auslegungsfaktor  $j_u$  (Er sei hier gleich  $j_M$  gesetzt) beim Zugstab 2 heraufzusetzen, wenn der Variationskoeffizient um einen bestimmten Betrag größer wird.

Entsprechend Glg. (9.21) muß  $j_{u2}$ , wenn  $s_2 = s_1 = s$  und  $u_{z1} = u_{z2} = u_z$  bleiben soll, im Verhältnis

$$\frac{j_{u_2}}{j_{u_1}} = \frac{s_2 / (1 - u_{z_2} v_{\mu_2})}{s_1 / (1 - u_{z_1} v_{\mu_1})} = \frac{1 - u_z v_{\mu_1}}{1 - u_z v_{\mu_2}} \quad (9.32)$$

verändert angenommen werden.

Die Auftragung für gleiche einseitige statistische Sicherheit  $S_{z1} = S_{z2} = S_z = 99\%$  (A-Wert) bzw.  $u_z = 2,336$  und  $S_z = 90\%$  (B-Wert) bzw.  $u_z = 1,282$  liefert die beiden Kurven in Bild 9.17 und zeigt die notwendige Zunahme von  $j_{u2}$  bei zunehmendem Variationskoeffizienten  $v_{\mu_2}$ .

Es sei dazu folgendes Beispiel gegeben: Für den Zugstab 1 (A-Wert)

liege  $v_{\mu} = 5\%$  vor, für den Zugstab 2  $v_{\mu} = 10\%$ . Um gleiche Sicherheit zu erreichen, muß dann bei Zugstab 1  $j_u = 1,5$ , bei Zugstab 2 aber  $j_u = 1,727$  angesetzt werden.

### 9.3.5. Safe-Life- und Fail-Safe-Auslegungshypothesen

Die vorgenannten Hypothesen werden vornehmlich im Flugzeugbau angewendet, wenn das Bauteil nach Schwingfestigkeitssichtspunkten ausgelegt werden muß. Die Anwendung der Safe-Life-Auslegungshypothese (Sicheres Leben) bedeutet, daß die Tragkonstruktion während der vorgesehenen Lebensdauer mit hoher Zuverlässigkeit keinen katastrophalen Bruch erleidet oder ein Teil während dieser Zeit ausgetauscht werden muß. Statisch bestimmte Tragkonstruktionen z.B. müssen gegenüber statisch unbestimmten Tragkonstruktionen Safe-Life-Konstruktionen sein.

Eine Safe-Life-Auslegung erfordert, daß das Material rißfrei sein muß, und/oder daß das Spannungsniveau so niedrig ist, daß kein Rißfortschritt erfolgen kann. Daraus resultiert ein relativ hohes Gewicht, zumindest aber der Zwang einer aufwendigen Qualitätskontrolle [Halpin, 1972] und die Forderung nach kleinen Streufaktoren im Material und bei der Fertigung, sowie guter Kenntnis der während der Lebenszeit auftretenden Belastungen [Hertel].

Ein Weg Gewicht zu sparen ist aber der: Mit Hilfe von bruchmechanischen Rechnungen und Versuchen wird nachgewiesen, daß im Falle eines Schwingbruches die Rißausbreitungsgeschwindigkeit so gering ist, daß zwischen zwei Inspektionen ein Restbruch des Bauteiles ausgeschlossen ist. Weiterhin wird gewährleistet, daß Risse aus Schwingbeanspruchungen mit zerstörungsfreien Prüfverfahren schon im Anfangsstadium entdeckbar sind. Mit Hilfe dieser Maßnahmen besteht heute die Möglichkeit, für Safe-Life-Bauteile eine hohe Ausfallsicherheit zu gewährleisten (aus [Hoffer]). Allerdings verlangt dieser Weg aufwendige, systematische Schwingfestigkeitsversuche.

Eine Auslegung nach dem Safe-Life-Prinzip bedeutet allgemein nicht, daß das Bauteil theoretisch unendlich lange am Leben bleiben muß.

Bei einer sogenannten Fail-Safe-Auslegung muß man sicherstellen, daß im Falle eines Bauteil-Bruches die Lasten von parallel geschalteten Elementen übernommen werden. Dieses Verhalten ist im Flugzeugbau nicht nur rechnerisch, sondern auch versuchstechnisch nachzuweisen. Bei Auslegung dieser Elemente müssen alle wichtigen Eigenschaften

der gewählten Werkstoffe berücksichtigt werden. Besonders wichtig ist eine kleine Rißfortpflanzungsgeschwindigkeit, kombiniert mit einer hohen statischen Restfestigkeit. Eine Fail-Safe-Konstruktion läßt sich auch dadurch erzielen, daß bestimmte lasttragende Bauteile zweifach vorhanden sind (aus [Hoffer]).

Die Auslegung nach dem Fail-Safe (Versagenssicher)-Prinzip verlangt somit eine ausreichende Sicherheit der Konstruktion, falls ein örtlicher Schaden (Anriß) während der Lebenszeit oder zwischen den Inspektionszeiten auftritt sowie, daß keine Zerstörung auftritt bis der Schaden entdeckt ist.

Fail-Safe-Auslegungen gründen sich auf vielfältige Lastaufnehmbarkeit, Redundanz, Rißstoppermaßnahmen und mögliche, gute Rißfortschrittsvorhersagen.

Ziel der Auslegung ist es häufig, höchstmöglich Gewicht zu sparen, d.h. Überdimensionierungen zu vermeiden und trotzdem hohe Überlebenswahrscheinlichkeiten für ein Bauteil zu erzielen. Zu diesem Ziel führt eine Synthese der vorgenannten Methoden verbunden mit "Ermüdungssicherem Gestalten" (s. [Hertel]).

Mit einer genauen Überprüfung der verschiedenen, für das Schwingfestigkeitsverhalten wichtigen Werkstoffeigenschaften, mit einer sorgfältigen Konstruktion der gekerbten Bauteile und mit zusätzlichen fertigungstechnischen Maßnahmen besteht die Möglichkeit, schwingbeanspruchte Teile optimal auszulegen. Optimal bedeutet dabei, daß außer den Herstellkosten auch Inspektionskosten etc. einzubeziehen sind.

#### 9.4. <sup>1)</sup> Anwendungsbeispiel - Druckbehälter aus CFK -

##### 9.4.1. Allgemeine Beschreibung

Die Herstellbarkeit reproduzierbarer, hochfester Faserwerkstoffe gab der Luft- und Raumfahrt die Möglichkeit, an vielen Komponenten erheblich Gewicht sparen zu können. Eine solche Komponente ist ein Druckbehälter. Bild 3.6 zeigt die Hauptteile eines Behälters.

Die Faserstruktur des Behälters wird auf einen Aluminiumliner gewickelt, der aus einem Stück mit dem jeweiligen Fitting hergestellt wurde. Dieser Liner ist aus Dichtigkeitsgründen notwendig.

Um ausreichende Haftung zwischen Laminat und Liner zu erzielen, wer-

<sup>1)</sup>

Weitere Rechenbeispiele sind in der VDI-Richtlinie 2013 angeführt.

den die Liner vor dem Wickeln entfettet, gebeizt und mit Adiprene beschichtet. Die Beschichtung dient dazu, örtliche Spannungsspitzen zwischen CFK und Liner auszugleichen.

Da der Liner bei der Belastung des Hochdruckgehäuses in den Fließbereich kommt, muß eine einwandfreie Haftung des Liners ein Beulen bei Entlastung verhindern. Um ein Beulen des im zylindrischen Bereichs nur 0,5 mm dicken Liners durch die Vorspannung der aufgewickelten Fäden zu verhindern, wird das Wickeln unter stufenweise steigendem Innendruck durchgeführt.

Das Harzsystem hat eine Härtungstemperatur von nur 40° C. Dadurch werden die zusätzlichen Spannungen durch die unterschiedlichen Wärmeausdehnungen von Liner und CFK beim Härten gering gehalten.

Gewickelt wird mit 2 C-Faser-Rovings, die in separaten Harzbädern getränkt werden. Dies ist erforderlich, um die Fadenspannung der Rovings getrennt regeln zu können. Als Fadenzug liegt 2 5 N je Roving fest. Nach ~~zwei~~ Kreuzlagen und zwei Umfangslagen wird das Gehäuse bei 40° C zwölf Stunden zwischengehärtet und anschließend, nach dem Aufrauen der CFK-Oberfläche, fertigbewickelt. Der Zeitaufwand zum Wickeln des Behälters beträgt beim Wickeln mit zwei Rovings 36 Stunden.

Die Berechnung von gewickelten Druckbehältern wird im allgemeinen nach den Grundlagen der Netztheorie durchgeführt. Dabei wird der Behälter auf Faserbruch (FB) bzw. rechnerischen Berstdruck (DUL) ausgelegt. Der Auslegungsfaktor  $j_u$  bestimmt den Abstand zum maximal möglichen Betriebsdruck.

Diese Art der Auslegung bedeutet speziell bei der Verwendung von CFK, daß der Behälter im Betriebszustand noch ziemlich weit vom vollgerissenen Zustand entfernt ist. Zum Beispiel beginnt die Mikrorißbildung dieses auf einen rechnerischen Berstdruck<sup>90</sup> bar auszulegenden Behälters aus CFK bei geeigneter Harzmatrix erst bei etwa 30 bar. Deswegen sollte man sich bei der Berechnung der Spannungen im Betrieb nicht nur der Netztheorie, sondern auch der Kontinuums-  
theorie bedienen.

In solchen Fällen, wo die Kontinuumstheorie auch zur Auslegung herangezogen wird, sind Versagenskriterien gemäß Kapitel 8 mitzuverwenden.

Wir werden hier bei der Auslegung (Dimensionierung) die Netztheorie



und bei der Berechnung der Spannungen und Verformungen die Kontinuumsmechanik heranziehen.

Als Unterlagen zur Dimensionierung dienen die Membrantheorie der Schalen (dickschalige Faserverbundbehälter sollten nicht gewickelt werden, da sie in der Regel keine Vorteile gegenüber Metallbehältern bieten) und die Annahme, daß die Schalenmittelflächenkontur nur wenig von den Laibungskonturen abweicht. Für die Spannungs- und Verformungsnachweise im Betriebszustand wird die Technische Schalenbiegetheorie herangezogen.

Die Festigkeitsberechnungen sollen allein die Verbundhülle und nicht die Fittinge und Anschlußschrauben beinhalten.

#### 9.4.2. Auslegungsgrößen

##### Belastung:

max. Betriebsdruck:  $P_{\text{DUL}} = \mu + 3\sigma = 60 \text{ bar}$  (sichere Last);  
 $j_u = 1,5$  ( $\hat{=} S$ )

Beanspruchungsdauer: Kurzzeitvorgang

##### Abmessungen:

Innenradius am Äquator:  $R_i = 155 \text{ mm}$

Polöffnungen (symmetrisch):  $e = 70,2 \text{ mm}$

Tankvolumen:  $\text{Vol} = 35 \text{ Liter}$  (zugehörig zu  $R_i$ )

Linerwandstärke:  $t_L = 0,5 \text{ mm}$

##### Werkstoffgrößen:

Elastizitätsmodul des Liners:  $E_L = 0,7 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$  (AlMg3, F10)

Max. Zugspannung des Liner:  $\sigma_L = 180 \text{ N/mm}^2$  (Grundwerkstoff)

Elementarfestigkeit der Grafil AS-Faser:  $\sigma_F = 2300 \text{ N/mm}^2$

Elastizitätsmoduli:  $E_F = 2,0 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ,  $E_M = 3,0 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$

Verbundwerte für  $\varphi_{\alpha} = \varphi_{90} = \varphi = 0,6$  und Harz: Araldit E, Härter: HY 843 im Mischungsverhältnis 100/65:

$$E_{\parallel} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2, \quad E_{\perp} = 0,085 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$G_{\parallel\perp} = 6,0 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2, \quad \nu_{\perp\parallel} = 0,33$$

minimale Verbundbruchwerte für Kurzzeit (Tab. 2.6):

$$\sigma_{1190_B} = 1100 \text{ N/mm}^2 \quad (A = \varphi \cdot 2300 / 1100 = 1,25 \text{ für Fertigung usw.});$$

$$\sigma_{\perp B} = 40 \text{ N/mm}^2; \quad \tau_{\#B} = 80 \text{ N/mm}^2; \quad \sigma_{11\alpha_B} = 1000 \text{ N/mm}^2$$

##### Fertigung:

Wickelmaschine: Geiling. Fadenablage: geodätisch.

Abzugsgeschwindigkeiten des Fadens:  $0,3 \text{ m/s}$  ( $90^\circ$ );  $0,2 \text{ m/s}$  ( $\alpha^\circ$ )

Verwendung eines Wickelbandes aus zwei Rovings mit je 10.000 Elementarfäden à 9µm Durchmesser

$$A_z = 2 \frac{\pi(9 \cdot 10^{-3})^2}{4} \cdot 10000 = 1,27 \text{ mm}^2 \quad \text{und} \quad A_{\text{Band}} = \frac{A_z}{\varphi} = 2,12 \text{ mm}^2 .$$

Als Bandbreiten wurden für zwei Rovings gemessen

$$B_\alpha = 7,0 \text{ mm} \quad , \quad B_{90} = 8,2 \text{ mm} .$$

Verarbeitungstemperatur des Harzes: Raumtemperatur.

Gebrauchsdauer des Harzbades: 1,5 Stunden.

Lagenarten: Umfang (90°) und Winkel ( $\pm \alpha^\circ$ )

Wickelzug pro Roving:  $Z = 25 \text{ N}$

Aushärtung: 36 h bei 40° C.

### 9.4.3. Wickelwinkel, Wickelmuster und Kontur

Bei den meisten Behälterauslegungen liegt das Volumen fest. Da die Polöffnungen im allgemeinen aus konstruktiven Erfordernissen festliegen, ist weiterhin  $e$  bekannt. Wenn noch die Behälterform grob vorgeschrieben ist, so kann mit bekannten  $e$  und  $R$  das Muster gefunden werden. Für die geodätische Wickelart läßt sich dann der Wickelwinkel aus

$$R_z = 155 + \approx 2 = 157 \text{ mm (Mittelfläche)},$$

$$R_z \cdot \sin \alpha_z = e + B_\alpha / 2 = 70,2 + 7,0 / 2 = 73 ,$$

$$\sin \alpha_z = 73 / 157 = 0,469 \rightarrow \alpha_z = 28,0^\circ$$

errechnen.

Unter Benutzung einer Formel aus [Cuntze]

$$\text{Vol.} \approx \pi R_i^3 \left( \frac{l_z}{R_i} + 2 (\approx 0,44) \right)$$

und des Lösungswegblattes für die Auslegung geodätischer Faserverbundbehälter (Tab. 3.3) kann die ungefähre zylindrische Länge ermittelt werden. Sie ergibt sich (Volumenzuschlag für Mittelfläche 1 Liter) zu

$$l_{z1} = R_z \left( \frac{\text{Vol.}}{\pi R_z^3} - 0,88 \right) = 157 \left( \frac{36 \cdot 10^6}{\pi \cdot 157^3} - 0,88 \right) \\ = 327 \text{ mm} .$$

Nach Tabelle 3.2 kann der Bodenumschlingungswinkel mit  $\beta \approx 162,6^\circ$  eingesetzt werden. Der Umschlingungswinkel im Zylinderteil berechnet sich aus

$$\beta_z = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{l_z}{R_z} \tan \alpha_z = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{327}{157} \tan 28,0^\circ = 63,5^\circ .$$

Das Verhältnis der Dornumschlingungen zur Teilungszahl wird dann

$$\frac{DU}{T} = \frac{162,6^\circ + 63,5^\circ}{180^\circ} = 1,26 .$$

Ganzzahlige Brüche in diesem Bereich sind

$$\frac{DU}{T} = \frac{4}{3} = 1,33 ; \quad \frac{5}{4} = 1,25 \quad \text{und} \quad \frac{19}{15} = 1,265 .$$

Wir sehen, daß wir mit einer höheren Teilungszahl  $T$  im allgemeinen immer besser als mit einer niedrigeren die vorgeschriebenen konstruktiven Forderungen erfüllen können. Aus wickeltechnischen Gründen wählen wir aber  $T = 4$ , weil darin die Anforderung an die Ablegegenauigkeit des Fadens nicht so groß wie bei  $T = 15$  ist.

Zur Kontrolle werden  $\beta_z$  und  $l_z$  neu bestimmt

$$\beta_z = \frac{DU}{T} 180^\circ - \beta = 1,25 \cdot 180^\circ - 162,6^\circ = 62,4^\circ ,$$

$$l_z = 157 \left( \frac{\pi}{180^\circ} \frac{62,4^\circ}{\tan 28^\circ} \right) = 322 \text{ mm} .$$

Damit ergibt sich ein überschlägliches Volumen von

$$\text{Vol.} \approx \pi 155^3 \left( \frac{322}{155} + 0,88 \right) = 35 \text{ Liter} .$$

Die exakte Integration der Konturdifferentialgleichung liefert für  $DU/T = 1,25$  die Computerwerte

$$l_z = 322 \text{ mm und Vol} = 35 \text{ Liter (abgerundet)} .$$

Für die Herstellung der Konstruktionszeichnung müssen nun die innere und die äußere Linierkontur ermittelt und für die Fertigung (NC-Maschine) die Koordinaten dieser Konturen festgehalten werden. Dazu wird die Kontur im Gültigkeitsbereich der DGL ( $\alpha \leq 54,75^\circ$ ) soweit aufgetragen, wie sich eine sinnvolle Endkontur bis zum Pol gestalten läßt.

Im vorliegenden Fall wird die Lineraußenkontur einschließlich Fittingbereich ab  $\alpha = 45^\circ$  mit dem bei  $\alpha = 45^\circ$  vorliegenden Meridiantkrümmungsradius  $R_2 = R(45^\circ)$  weitergeführt. Der Unterschied zu einem kegeligen Abschluß ist dabei sehr gering. Die Linerinnenkontur einschließlich Fittingbereich wird durch einfache geometrische Beziehungen

mit Hilfe der Außenkontur gefunden.

Diese Arbeiten werden mit Hilfe des Programmes [Moore] berechnet.

Die geometrischen Verhältnisse  $L/D$  des betrachteten Behälters würden auch eine planare Fadenablage (falls eine Planar-Wickelmaschine vorhanden ist) möglich machen, so daß der dem idealen Bodentyp  $g_g$  nächstbeste Typ  $g_p$  (Rechenprogramm [Kreß]) erhalten würde.

Als wichtige Ausgabegröße weisen die Rechenprogramme auch die Verbundkörpermasse aus, damit die Fasermenge berechnet und bestellt werden kann.

#### 9.4.4. Wanddicke (Netztheorie)

Durch einige Versuchsreihen belegt, wurde hier ein Auslegungsfaktor  $j_u = 1,5$  angenommen. Das ergibt einen rechnerischen Berstdruck von

$$P_{DUL} = j_u \cdot P_{DUL} = 1,5 \cdot 60 = 90 \text{ bar} = 9,0 \text{ N/mm}^2.$$

Zur Bestimmung der Gesamtverbunddicke dienen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{erf. } t_{\alpha_z} &= P_{DUL} \frac{R_z}{2 E_{11\alpha_z} \cos^2 \alpha_z} = 9,0 \frac{157}{2 \cdot 1000 \cdot \cos^2 28,0^\circ} \\ &= 0,91 \text{ mm} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{erf. } t_{q_0} &= P_{DUL} \frac{R_z (1 - 0,5 \tan^2 \alpha_z)}{E_{11q_0}} = 9,0 \frac{157 (1 - 0,5 \tan^2 28,0^\circ)}{1100} \\ &= 1,10 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Für  $\varphi = 0,6$  entsprechen diese Verbunddicken reinen Faserdicken von

$$0,6 \cdot 0,91 = 0,55 \text{ mm} \quad \text{und} \quad 0,6 \cdot 1,10 = 0,66 \text{ mm.}$$

Als erforderliche Wanddicken liegen damit im Zylinderbereich

$$\text{erf } t = 0,91 + 1,10 = 2,01 \text{ mm}$$

und im Bodenbereich am Äquator

$$\text{erf } t = 0,91 \text{ mm}$$

vor. Die Wanddicken der Einzelschichten (= Einzellagen) errechnen sich aus

$$t_{\alpha_z}^1 = \frac{A_{\text{Band}}}{B_{\alpha}} = \frac{2,12}{7,0} = 0,303 \text{ mm} ,$$

$$t_{q_0}^1 = \frac{A_{\text{Band}}}{B_{q_0}} = \frac{2,12}{8,4} = 0,259 \text{ mm} \quad (\text{später } \frac{2,12}{7,3} = 0,290) .$$

#### 9.4.5. Wickelgrößen

Vor dem Wickeln muß die Anzahl der Schlittenumläufe ermittelt werden, mit denen ein geschlossenes Wickelmuster erreicht wird.

Bei jeder Winkellage ist aus wickeltechnischen Gründen für ein geschlossenes Muster ein Hin- und Hergang erforderlich. Das bedeutet, es müssen um die Doppelschicht zu erhalten (Glg. 3.5)

$$n_{28} = \frac{\pi D \cos \alpha}{B_{\alpha}} = \frac{\pi (314 + \approx 1) \cos 28^{\circ}}{7,0} = 118$$

Schlittenumläufe gemacht werden.

Wenn bei den Umfangslagen in Zylindermitte mit dem Wickeln begonnen wird, dann gilt für zwei Einzelschichten

$$n_{90} = 2 \frac{l_z}{B_{90}} = 2 \frac{322}{8,2} = 79.$$

Eine weitere notwendige Information für das Wickeln ist die Anzahl der Lagen (Schichten)

$$N'_{28} = \frac{0,91}{0,303} = 3,0 \quad \text{und} \quad N'_{90} = \frac{1,10}{0,259} = 4,2.$$

Es werden schließlich (trotz der Überdimensionierung, die nur mit einer fertigbaren, dünneren Schichtstärke korrigiert werden könnte) die ganzzahligen Werte (die Kreuzlagen müssen darüber hinaus ganzzahlig sein  $3 \rightarrow 4 \hat{=} 2 \times$ )

$$2 \times \hat{=} 2 \cdot 2 \cdot 0,303 = 1,2 \text{ mm} = t_{\alpha} \quad \text{u.} \quad 50 \hat{=} 5 \cdot 0,290 = 1,45 \text{ mm} = t_{90}$$

gewählt. Dabei ist in Umfangsrichtung auf die angepaßte, <sup>noch</sup>verwirklichbare Bandbreite

$$B_{90} = 7,3 \text{ mm}$$

übergangen worden, um das erforderliche Wandstärkenverhältnis, welches das Gleichgewicht im Netzwerk bestimmt,

$$\text{erf. } \frac{t_{90}}{t_{\alpha}} = \frac{1,10}{0,91} = 1,21 \approx \text{vorh. } \frac{t_{90}}{t_{\alpha}} = \frac{1,45}{1,20} = 1,20$$

einzuhalten.

Statt Verbundwanddicken und Lagenanzahl sind der Fertigung von der Berechnung manchmal nur die Faserwanddicken anzugeben. Für den in

der Festigkeitsrechnung benötigten Faservolumenanteil muß dann allerdings die Fertigung aufgrund ihrer Erfahrung garantieren können.

Es soll hier eine Innendruckstabilisierung des Liners vorgenommen werden, weil der Liner direkt bewickelt werden kann. Damit ist der Berstdruck des Liners von Interesse. Bei einem Schweißfaktor von 0,9 wird der bei Fehlbedienung maximal mögliche Innendruck

$$p_B = \frac{t_L}{R_Z} \sigma_L = \frac{0,5}{157} 100 \cdot 0,9 = 0,51 \text{ N/mm}^2 = 5,1 \text{ bar.}$$

Dieser Wert erfüllt die TÜV-Vorschrift für die Werkstattbeschäftigten, weil

$$p_B \cdot \text{Vol.} \approx 5,1 \cdot 35 = 180 \text{ bar Liter}$$

unter der (Gefahren) Grenze 200 bar-Liter liegen muß.

Die Hauptabsicherung hat gegen Mantelbeulung zu erfolgen, da die zugehörige Steifigkeit bei den üblichen Liner-Abmessungen vernachlässigbar ist. Den Mantelbeuldruck liefert die beim Wickeln verwendete Fadenspannung

$$\sigma = \frac{Z}{A_2} = \frac{2 \cdot 25}{127} = 39,3 \text{ N/mm}^2$$

Damit wird ein Druck durch die Einzellage  $\sigma$  auf den Liner von

$$p_0 = \frac{\sigma \cdot t_{90}}{R_Z} = \frac{0,6 \cdot 0,290}{157} 39,3 = 0,044 \text{ N/mm}^2 \hat{=} 0,44 \text{ bar,}$$

$$p_{\theta} = 2 p_0$$

hervorgerufen, der durch Innendruck unkritisch gemacht werden muß.

Um den durch die Winkellagen bedingten Axialdruck auszugleichen, benötigt man einen Innendruck (nach [Roark]) von

$$p_X = 2 p_{\theta} \cos \alpha_Z = 4 \cdot 0,44 \cos 20^\circ = 1,55 \text{ bar.}$$

Als äußerster ertragbarer Axialdruck, der für das Aufbringen der Winkellagen bedeutsam ist, läßt sich nach [Roark]

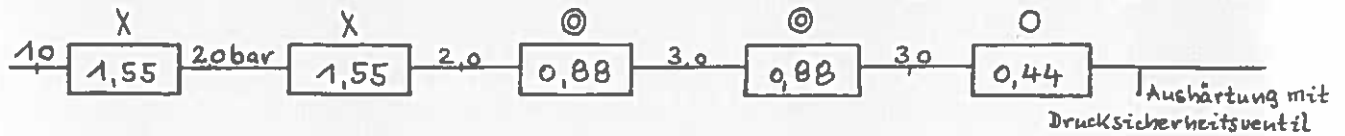
$$\text{ertr. } p_X = \frac{\approx 30\% \cdot E_L (t_L/R_Z) 2\pi R_Z t_L}{\pi R_Z^2} = \frac{P_{\text{krit}}}{\pi R_Z^2} = 0,43 \text{ N/mm}^2 = 4,3 \text{ bar}$$

ermitteln. Dieser Wert besagt, da er größer als  $p_X$  ist, daß praktisch nur gegen Mantelbeulung (ertr.  $p_0 \approx 0$ ) stabilisiert werden muß.

Als Alternative zum innendruckstabilisierten Liner kann auch ein

dickerer Liner (2,5 mm) benutzt werden, der nachträglich elektrolytisch abgetragen wird.

Eine Berücksichtigung aller vorgenannten Größen liefert schließlich den folgenden Wickelplan inklusiv Wickelfolge XX⊙⊙⊙ und Stabilisierungsdrücken, die vor jeder neuen Lage notwendig werden



Die Wicklung liefert ein orthotrop, unsymmetrisch aufgebautes Laminat.

Als Alternativlösung wäre auch die Wickelfolge OXX⊙⊙ möglich.

Man kann der verwendeten "Kesselformel" entnehmen, daß die Innendruckstabilisierung nur bei Vorhandensein weniger Schichten verbunden mit kleinem Radius möglich ist. Im anderen Fall muß zwischengehärtet werden, was etwas umständlich für den Fertigungsablauf ist. Um der Zwischenhärtung zu entgehen, oder falls kein innendruckstabilisierbarer Liner da ist, kann mit einem Adipreneliner plus Kern aus Polyvinylalkohol gearbeitet werden.

Bei dem Ablegen der Umfangslagen muß beachtet werden, daß infolge des Abrutschens der Randbänder ein Einrücken am Boden- Zylinder-Übergang vorgenommen werden muß. Der Wickelanfang ist deshalb im allgemeinen besser in die Mitte zu legen. Aus rein wickeltechnischen Gründen kann es wegen des Abrutschens der Bänder manchmal notwendig sein, eine 90°-Wicklung durch eine leicht winklige Wicklung zu ersetzen (natürlich muß dabei der Festigkeitseinfluß berücksichtigt werden).

#### 9.4.6. Spannungs- und Verformungsnachweis

Die Ermittlung der Spannungen und Verformungen des vorliegenden orthotropen Verbundes im Betriebszustand wird nach der Kontinuums-theorie vorgenommen. Die Berechnung soll mit Hilfe des Programms [Thiem/Raasch] erfolgen. Dieses Programm wird in Kapitel 10 beschrieben. Es berücksichtigt Schalenbiegung und nicht-symmetrischen Laminataufbau.

Es liegen für die Berechnung vor:

der Lastvektor

$$\{\hat{G}\} = (0, 0, p_{DL})^T$$

und die Elastizitätsmatrix der Einzelschicht

$$[Q_{12}]_2 = \begin{bmatrix} 120900 & 10500 & 0 \\ 2827 & 8566 & 0 \\ 0 & 0 & 6000 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Von den elastischen Größen der Einzelschicht kommen wir zu den Größen des Laminats (Schichtfolge + 28/- 28/+ 28/- 28/90/90/90/90) im Zylinderbereich

$$\begin{aligned} [\hat{Q}] &= \begin{bmatrix} 39900 & 10500 & 0 \\ 10500 & 74400 & 0 \\ 0 & 0 & 13600 \end{bmatrix}, & [B] &= \begin{bmatrix} -8700 & -2120 & 861 \\ -2120 & 12900 & 289 \\ 861 & 289 & -2120 \end{bmatrix} \\ [D] &= \begin{bmatrix} 3650 & 949 & -478 \\ 949 & 5720 & -161 \\ -478 & -161 & 1210 \end{bmatrix}, & [\hat{S}] &= \begin{bmatrix} 0,260 \cdot 10^{-4} & -0,366 \cdot 10^{-5} & 0 \\ -0,366 \cdot 10^{-5} & 0,140 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0,734 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Für Vergleichsrechnungen des Lesers seien noch die technischen Elastizitätskonstanten des Laminats angegeben:  $\hat{E}_A = 38400 \text{ N/mm}^2$ ;  $\hat{E}_U = 71600 \text{ N/mm}^2$ ;  $\hat{G}_{Au} = 13600 \text{ N/mm}^2$ ;  $\hat{\nu}_{UA} = 0,141$ ;  $\hat{\nu}_{Au} = 0,262$ .

Zum weiteren Vergleich - theoretisch erzielte Symmetrie - (90/90/+ $\alpha$ /- $\alpha$ /90/- $\alpha$ /+ $\alpha$ /90/90)

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} 39900 & 10500 & 0 \\ 10500 & 74400 & 0 \\ 0 & 0 & 13600 \end{bmatrix}, & [B] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [D] &= \begin{bmatrix} 1710 & 479 & -287 \\ 479 & 8590 & -96,4 \\ -287 & -96,4 & 743 \end{bmatrix}, & [\hat{S}] &= \begin{bmatrix} 0,260 \cdot 10^{-4} & -0,366 \cdot 10^{-5} & 0 \\ -0,366 \cdot 10^{-5} & 0,140 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0,734 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bei den vorstehenden Matrizen zeigten die Matrizen [B] und [D] wie unsymmetrisch die vorliegende Schichtung (engl. stacking se-



quence) des Laminats ist.

Wie man sich überlegen kann, ist der letztere, symmetrische Wickelaufbau technisch nicht verwirklicht. Im übrigen würde das Aufwickeln der Kreuzwicklung  $\lambda$  auf zwei Umfangslagen  $\odot$  am Äquator eventuell höhere, örtliche Störungen des Spannungszustandes bewirken als durch den symmetrischen Wickelaufbau (Eigen-) Biegespannungen abgebaut werden.

Von viel größerer Wichtigkeit sind Biegespannungen, die im Betriebszustand vorliegen und auf den in Wirklichkeit (gegenüber der Netztheorie gleiche Aufweitung) doch größeren Aufweitungen im Zylinder teil verglichen mit denen im Boden beruhen. Um diese Biegespannungen zu reduzieren sind im Zylinderbereich an den Äquatorstellen (gegenüber der Netztheorieauslegung) noch Verstärkungen zu empfehlen.

Nun sollten die Spannungen in den Einzelschichten an einigen Punkten des Äquatorbereichs mit dem Programm [Thiem/Raasch] ermittelt werden. Leider konnte die Durchrechnung nicht <sup>mehr</sup> rechtzeitig erfolgen.

Da aus bestimmten Gründen die im vorstehenden Text vorgeführte Auslegung eines Behälters nur ein Rechenbeispiel sein sollte, kann kein Vergleich mit Versuchsergebnissen erfolgen. Allerdings wurde eine verwandte Behälterausführung (dieselbe Faser) bei Berstversuchen vermessen. Dabei zeigte sich in Faserrichtung an allen Meßstellen bis  $\epsilon \approx 1\%$  eine lineare Dehnungszunahme. Weiter lag bei sachgemäßer Fertigung der nach der Netztheorie berechnete Berstdruck im Toleranzbereich  $\pm 10\%$  des wirklich erzielten, mittleren Berstwertes.

## 9.5. Anwendungsbeispiel 2 - Zentrifuge -

### 9.5.1. Allgemeine Beschreibung

Schnellaufende Zentrifugen haben in den letzten Jahren zunehmend technische Bedeutung erhalten.

Die hier betrachtete, schnellaufende Zentrifuge, die mechanisch unter den Begriff des Rotors fällt, besteht (Bild 9.21) aus einem zylindrischen, dünnwandigen Rohr mit unterem und oberem <sup>ab</sup>schließenden Deckel. Je nach Bedarf können zur Ausbildung von inneren Kammern noch Scheiben eingebaut werden.

Die Zentrierung des Rotors erfolgt am unteren Lager durch eine Nadel, auf der der Rotor gleichzeitig steht. Zwischen oberem Lager und Rotor wirkt eine magnetische Fesselung. Angetrieben wird der Rotor durch das Drehfeld einer Induktionsspule. Die Lagerung ist gedämpft.

Bei der Herstellung der Rohre solcher Zentrifugen werden sowohl hochfeste, metallische Werkstoffe als auch Faserverbundwerkstoffe verwendet. Besonders CFK und Kevlar-FK eignen sich zur Erzielung hoher Umfangsgeschwindigkeiten, so daß Emulsionen, die aus Flüssigkeiten mit etwa gleicher Dichte bestehen, getrennt werden können.

Eine Herstellungsmöglichkeit für das zylindrische Rohr besteht in der Wicklung einer zweischichtigen Verbundschale aus CFK. Die innere Schicht besteht aus für die Steifigkeit verantwortlichen Axiallagen oder auch aus Winkellagen (Bild 9.21, seitlicher Schnitt) und die äußere aus Umfangslagen, die die Umfangsbeanspruchung aus der Fliehkraft aufnimmt.

Als Hauptauslegungsgröße ist die Höhe der Trennleistung

$$U \sim Z \cdot u^4$$

von Interesse, die proportional zur Trennlänge  $Z$  ist, und theoretisch mit der vierten Potenz der Geschwindigkeit  $u$  wächst. Eine Zentrifugenauslegung wird demzufolge so erfolgen, daß die Geschwindigkeit so weit wie möglich gesteigert wird. Als einschränkende Größen wirken dabei die Bruchspannung des Rohres

$$\hat{\sigma}_y = \rho_v \Omega^2 R^2 = \rho_v u^2 \leq \sigma_B (\sigma_{NB})$$

in Umfangsrichtung (zur Erklärung dient Bild 9.22) und die Einhaltung der Stabilität der Zentrifuge (kritische Drehzahlen, Dämpfungsverhalten).

### 9.5.2. Auslegungsgrößen

#### Belastung:

Die Belastung ist quasistatisch und regelungstechnisch vollkommen abgesichert ( $j_L = 1$ ). Als Betriebsdrehfrequenz ist  $f = 1000$  Hz festgesetzt. Die Kreisfrequenz läßt sich daraus über

$$\Omega_{DL} = \Omega_{\text{Betrieb}} = 2\pi f = 6280 \text{ s}^{-1}$$

berechnen. Die für die Festigkeitsberechnung aussagekräftigen Ge-

schwindigkeit

$$u_{D.L.L.} = u_{\text{Betrieb}} = R_i \cdot \Omega_{D.L.L.}$$

ist mit Bekanntsein von  $R_i$  festgelegt. Die Betriebsdauer beträgt 5 Jahre.

#### Abmessungen:

Als Innenradius wird im vorliegenden Fall

$$R_i = 50 \text{ mm}$$

festgelegt.

Die Rohrwandung baut sich aus Fertigungsgründen aus verschiedenen Einzelschichten von etwa 0,2 mm auf. Die Zahl der Umfangsschichten muss dabei so groß sein, daß die wenigen, sich nicht selbst tragenden Längsschichten für die Zeit der Betriebsdauer sicher gehalten werden.

Angaben für die Komponenten Deckel, Scheibe, Nadel usf. brauchen für das Verständnis der Berechnung eines Rotors aus Faserverbund hier nicht aufgeführt zu werden.

#### Auslegungskriterien:

1. Die Spannung in den Fasern der Umfangsschicht darf nur so groß sein, daß die damit verbundene Kriechdehnung keine Gefährdung für das Betriebsverhalten darstellt (keine Ablösung von Komponenten vom Rohr u.a.).
2. Zusätzlich zu dem vorgenannten Kriterium, das als <sup>das</sup> Faserbruchkriterium (FB) betrachtet werden kann, ist ein Zwischenfaserbruchkriterium anzusetzen, da sonst die Dichtigkeits- und Rißproblematik vergrößert wird. Dazu werden in unserem Fall Glg. (7.8, 7.10) herangezogen.
3. Als Abstand zur sogenannten biegekritischen Drehzahl (des Gleichlaufs) wird 20 % angesetzt

$$\frac{u_{\text{kritisch}} - u_{\text{Betrieb}}}{u_{\text{kritisch}}} = 0,20 \quad \text{bzw.} \quad u_{\text{Betrieb}} = 0,8 u_{\text{kritisch}}$$

#### Werkstoffgrößen:

Harzsystem 0502-HX-DMP 30:

$$E_M = 0,03 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2, \quad \nu_M = 0,4,$$

$$\gamma_M = 1,22 \text{ g/cm}^3$$

Thomel 75 S-Faser:  $E_F = 55 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$  ,  
 Verbundwerte ( $\varphi_A = 0,6$ )  $E_{\parallel} = 3,2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$  ,  $E_{\perp} = 0,09 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$  ,  
 ( $\varphi_A = 0,60$ )  $G_{\#} = 0,06 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$  ,  $\nu_{\perp\parallel} = 0,33$  ,  $\rho = 1,58 \text{ g/cm}^2$

Torayca T 300 A-Faser:  $E_F = 2,4 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$  ,  
 Verbundwerte  $E_{\parallel} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$  ,  $E_{\perp} = 0,09 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$   
 ( $\varphi_u = 0,65$ )  $G_{\#} = 0,06 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$  ,  $\nu_{\perp\parallel} = 0,33$  ,  $\rho = 1,59 \text{ g/cm}^2$

Festigkeitswerte  $\sigma_{\parallel B} = 700 \text{ N/mm}^2$  ( $A \approx 1,3$  gegenüber Kriechen)  
 $\tau_{\#B} = 55 \text{ N/mm}^2$  ,  
 $\sigma_{\perp B} = 35 \text{ N/mm}^2$ .

### Fertigung:

Die Herstellung des Rohres erfolgt, indem der hochmodulige Längsverband unmittelbar auf den Rotor-Wickelkern gebracht wird. Die Umfangslagen werden auf die Längslagen gewickelt.

### 9.5.3. Festigkeitsauslegung

Im Rahmen dieses Beispiels wird nur auf die Auslegung des Faser-verbundrohres eingegangen. Die Auslegung der Komponenten wird nicht angesprochen. Der unsymmetrische Aufbau des Rohres bleibt unberücksichtigt.

Analog zur Kesselformel erfährt der rotierende Hohlzylinder eine aus der Fliehkraft herrührende Beanspruchung in Umfangsrichtung von (Bild 9.22)

$$\hat{\sigma}_{\perp} \cdot t \cdot dl = dm_1 \frac{u_1^2}{R_1} + dm_2 \frac{u_2^2}{R_2}$$

mit  $dm_k = \rho_k t_k d\beta dl$ .

Da das Rotorrohr sehr dünnwandig ist, und aus verschiedenen Schichten besteht, deren Materialien fast die selbe Dichte besitzen, wird aus der vorstehenden Gleichung

$$\hat{\sigma}_{\perp} \approx \hat{\sigma}_{\varphi} = \rho_v \cdot u^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\hat{\sigma}_{\varphi}}{\rho_v} = \frac{1}{g} u^2$$

(Das bedeutet, daß bei einer möglichen quadratischen Steigerung der sogenannten spezifischen Festigkeit  $\sigma/\rho$  die Trenngeschwindigkeit  $u$  linear wächst).

Es ist somit der Lastvektor

$$\{\hat{\sigma}\} = (\hat{\sigma}_A, \hat{\sigma}_u, \hat{\tau}_{Au})^T = (0, \gamma_v u^2, 0)^T$$

vorhanden.

Entsprechend der allein wirkenden Fliehkraft stellt somit das rotierende Rohr ein einachsig beanspruchtes Bauteil dar. Trotzdem treten infolge des Mehrschichtenverbundes (MSV) in den Einzelschichten auch Spannungen in Axialrichtung auf. Diese Spannungen bilden über der Wandung einen inneren (Eigen-) Spannungszustand und sind für das ZFB-Kriterium wichtig.

In ihrer Berechnung und zur Ermittlung der in Abschnitt 9.5.4. zu berechnenden kritischen Drehzahlen wird zweckmäßigerweise ein Computerprogramm aufgestellt, das die drei <sup>die</sup> Festigkeit und <sup>die</sup> Dynamik koppelnden Auslegungskriterien gleichzeitig erfüllt. Es wird damit die Länge des Rohres bestimmt und gleichzeitig werden FB- und ZFB-Kriterium sowie der Sicherheitsabstand eingehalten. Umgekehrt kann man bei vorgegebenen Rotorabmessungen die Schichtspannungen und den Sicherheitsabstand ermitteln.

Die festigkeitsmäßige Rechnung erfolgt derart, daß im Programm zuerst die Dehnungen der Faserverbundschale ermittelt werden

$$\{\epsilon\}_k = \{\hat{\epsilon}\} = [\hat{S}] \{\hat{\sigma}\} = [\hat{Q}]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_v u^2 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Das gelingt unter Aufstellung der Elastizitätsmatrizen der Schichten  $[Q_{ub}]_1$  und  $[Q_{ub}]_2$  und unter anschließender Berechnung von

$$[\hat{Q}] = \sum_{k=1}^2 [Q]_k = \sum_{k=1}^2 \frac{t_k}{t} [T_{\sigma}]_k [Q_{ub}]_k [T_{\sigma}]_k^T.$$

Jetzt lassen sich die Spannungen in den Einzelschichten bestimmen zu

$$[\sigma_{ub}]_k = [Q_{ub}]_k \{\epsilon_{ub}\}_k = [Q_{ub}]_k [T_{\sigma}]_k^T \{\hat{\epsilon}\}.$$

Die Transformationswinkel sind dabei in der Außenschicht  $\alpha = 90^\circ$  und in der Innenschicht  $\alpha = 0^\circ$  anzusetzen, da ein Kreuzverbund vorliegt.

Für die Berechnung der kritischen Drehzahlen benötigen wir die mit Hilfe der Nachgiebigkeitsmatrix  $[\hat{S}]$  herleitbaren technischen Elastizitätskonstanten, den axialen Elastizitätsmodul  $\hat{E}_A$  und den Schub-

modul  $\hat{G}_{Au}$ .

Die Festigkeitsaufgabe schließlich ist der Vergleich der Schichtspannungen mit den Auslegungsspannungen. Das geschieht im Rahmen des FB- und des ZFB-Kriteriums.

#### 9.5.4. Schwingungsberechnung

##### Festlegung der Rotorlänge bzw. Bestimmung der biegekritischen Drehzahlen

Bei rotierenden Bauteilen ist es notwendig, im Betrieb einen bestimmten Abstand zu der nächst-höherliegenden biegekritischen Drehzahl zu halten. Das erfolgt hier durch Einlage der längsorientierten, axialen Faserverstärkung von abgestimmter Schichtdicke. Dabei wird als Faser die Thornel 75-Faser gewählt, die eine sehr hohe spezifische Steifigkeit  $E/\gamma$  besitzt.

Die kritischen Drehzahlrechnungen dienen allgemein bei der Auslegung des Rotors zur Längenfestlegung des Rohres und damit auch des Rotors. Bei der Nachrechnung eines existierenden Rotors wird umgekehrt für eine vorgegebene Länge die kritische Drehzahl gesucht und festgestellt, ob der Sicherheitsabstand gemäß  $u_{max} \leq 0,8 u_{kritisch}$  eingehalten wurde.

Ausgangspunkt für die Berechnung der kritischen Drehzahlen ist in unserem Fall die Bewegungsdifferentialgleichung relativ kurzer, hohler Wellen (mit Kreiseinfluß), weil der Einfluß der Schubverformungen nicht vernachlässigt werden darf.

Als direkte Eingabegrößen für die kritische Drehzahlberechnung müssen Länge, Querschnittsfläche und axiales sowie äquatoriales Massenträgheitsmoment pro Längenabschnitt des Faserverbundrohres bekannt sein. Weiterhin sind rechnerisch oder versuchsmäßig (durch Pendelversuche) die Massenträgheitsmomente der Abschlußdeckel und deren Massen zu bestimmen.

Weitere Eingabegrößen sind der bei der Kontinuumsmechanikberechnung des vorigen Abschnitts 9.5.2. angefallenen axiale Gesamt-Elastizitätsmodul  $E^A$  und der -Schubmodul  $\hat{G}_{Au}$ .

Die Berechnung der kritischen Drehzahlen des Rotors wird mit dem sogenannten Übertragungsverfahren durchgeführt. Dieses Verfahren wird hier benutzt, um eine numerische Lösung des DGL-Systems für

die schubweiche Welle zu erzielen.

Zur Festlegung der Länge werden verschieden lange Rohre als Datensätze eingegeben, und es wird ausgerechnet, bei welcher Länge gerade die kritische Drehzahl bzw. die kritische Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} u_{\text{krit.}} &= \frac{1}{0,8} u_{\text{Betrieb}} = 1,25 \cdot R_i \cdot \Omega_{\text{Betrieb}} \\ &= 1,25 \cdot 0,050 \cdot 6280 = 392 \text{ m/s} \end{aligned}$$

erreicht wird.

### Stabilitätsrechnung

Mit der Festlegung der Länge ist die schwingungsmäßige Auslegung des Rotors noch nicht abgeschlossen, da das Bewegungsverhalten des Rotors aus Betriebssicherheitsgründen noch studiert werden muß. Es wären noch für den Betrieb des Rotors die drehzahlfrequenten (Unwuchten) und drehzahlfremde (Stöße) Störungen der Laufruhe zu untersuchen.

#### 9.5.5. Ergebnis

Als Resultat der gekoppelten Festigkeit-krit. Drehzahl-Rechnung wurde eine Länge des Rotors von

$$L \approx 600 \text{ mm}$$

ermittelt. Dabei wurden alle drei Auslegungskriterien eingehalten und ein Wandstärkenverhältnis von ungefähr  $t_{\alpha}/t_{q_0} = 1/6$  erreicht.

Die absolute Wandstärke hängt von der Art der Komponenten ab, die in das Rohr eingebaut werden, also auch von der kleinsten, reproduzierbaren Längsaussteifungsdicke ab.

Das Laufverhalten von Zentrifugen, die analog zur gezeigten Auslegung berechnet und gebaut wurden, zeigte eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch.

#### 9.5.6. Kontrollmöglichkeiten der wesentlichen technischen Elastizitätskonstanten

Gerade bei der Verwendung neuer Werkstoffe ist eine große Anzahl an Kontrollen angebracht. Bei dem vorliegenden Rotor-Rohr sind das u.a. Überprüfungen der Steifigkeitsgrößen der Schale.

Als relativ einfache Kontrolle bietet sich erstens die statische

Überprüfung der axialen Steifigkeit des MSV an. Dazu wird als Probe eines der ersten gewickelten Rohre, also direkt das Bauteil, verwendet und in Zug- und Druckversuch  $\hat{E}_A$  ermittelt. Für den Schubmodul  $\hat{G}_{AU}$  wird ein etwas breiterer NOL-Ring gewählt.

Den Elastizitätsmodul in Umfangsrichtung kann man mit dem NOL-Ring Versuch messen. Eine andere Möglichkeit bietet eine Aufweitungsvorrichtung des ganzen Rohres unter Innendruck.

Eine sehr gute Möglichkeit, eine Aussage für die Glaubwürdigkeit der Eingangsgrößen zu erhalten, ist die Biegeeigenfrequenzmessung. Dazu stellt man sich in unserem Fall ein langes Rohr her, um den Schubverformungseinfluß auszuschalten. Mit entsprechendem Versuchsaufbau stellt man die Eigenfrequenz  $f_{ei}$  einer frei-freien Welle fest (s. Bild 5.30).

Bei der Beurteilung und dem Vergleich der gefundenen Werte ist es ingenieurmäßig im allgemeinen ausreichend, wenn die größten und kleinsten Werte einer wesentlichen Größe wie  $\hat{E}_A$  nur um 10 % auseinander liegen.



## Auslegung

- Ermittlung der vorläufigen Lasten und der Umgebungseinflüsse;
  - Ermittlung von Steifigkeitskriterien und sonstigen Konstruktionsanforderungen;
  - Auswahl von Werkstoffen und Herstellungsverfahren; Vereinbarung (falls Vorschriften fehlen) zulässiger Größen und Sicherheitsfaktoren;
- (bei der Verwendung von Faserverbund muß in der Regel eine kurzfristige Ermittlung der notwendigen Werkstoffkennwerte in der Werkstoffabteilung erfolgen);
- Durchführung der Vordimensionierung.

## Nachweis

- Nach Festlegung der Spezifikationen (Lastenheft etc.) Durchführung der statischen und dynamischen Berechnungen von Strukturteilen und Gesamtstruktur;
- Detaillierte Analyse der Spannungen und <sup>Nachweis der</sup> ausreichenden Steifigkeiten (Verformungen, Instabilität, Eigenfrequenz);
- Durchführung von Nachrechnungen bei Bauabweichungen und Änderung von Werkstoffkennwerten;
- Versuchsplanung und strukturmechanische Auswertung der Versuchsergebnisse.

Tabelle 9.1 Zusammenstellung von Arbeitsaktivitäten während der Entwicklung einer Leichtbaustruktur aus Faserverbund (nach Salkind)

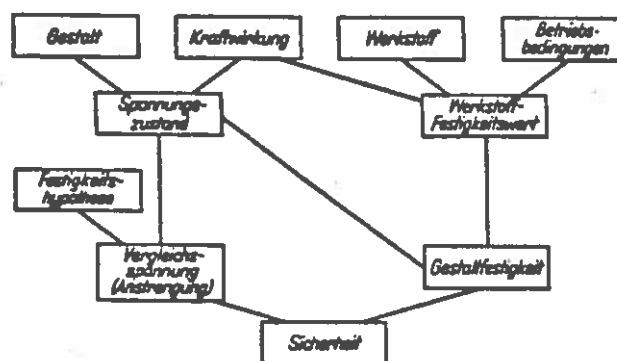


Bild 9.1 Gang einer Festigkeitsbetrachtung [VDI-Richtlinie 2226]

### Belastung

Angriffspunkt oder -fläche, Größe, Richtung, schwingende Belastung, Zeitdauer

### Steifigkeitsanforderungen

Durchbiegung, Dehnung, Rißbildungsverhinderung, Schädigungsgrenzen, Eigenfrequenzen

### Umweltanforderungen

Temperatur, Feuchtigkeit, UV-Strahlung, chemische Einwirkungen, elektrische Anforderungen, Ausgasung, Verschleiß

### Sicherheitsfaktoren

Lasten, Werkstoffwerte, Altern, Instabilität

### Fertigungseigenheiten

Herstellungsverfahren, Härtingsprozeß, Quellung, Schwindung, Nachhärtung

### Werkstoffwerte des Verbundes

Festigkeitswerte, Dehnungswerte, Elastizitätswerte, Wärmeausdehnungskoeffizienten, Wärmefluß, spezifische Wärme, Reibungskoeffizient, elektrischer Widerstand, Schwingungsdämpfung, Kriechwerte, Viskoelastizität, Reißlänge, spezifische Steifigkeit, Brandverhalten

### Wartung

Haltbarkeit, Reparaturen, Inspektionszeiten

Tabelle 9.2 Mögliche Auslegungskriterien

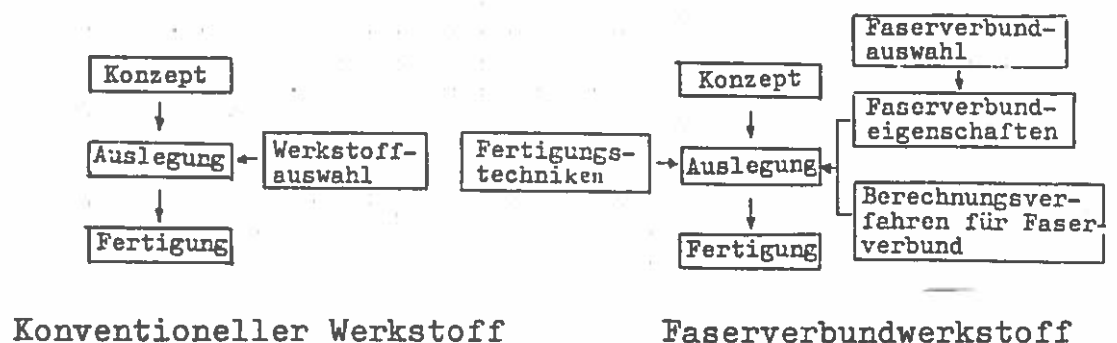


Bild 9.2 Auslegungsphilosophie für ein Bauteil aus konventionellem Werkstoff und aus Faserverbundwerkstoff

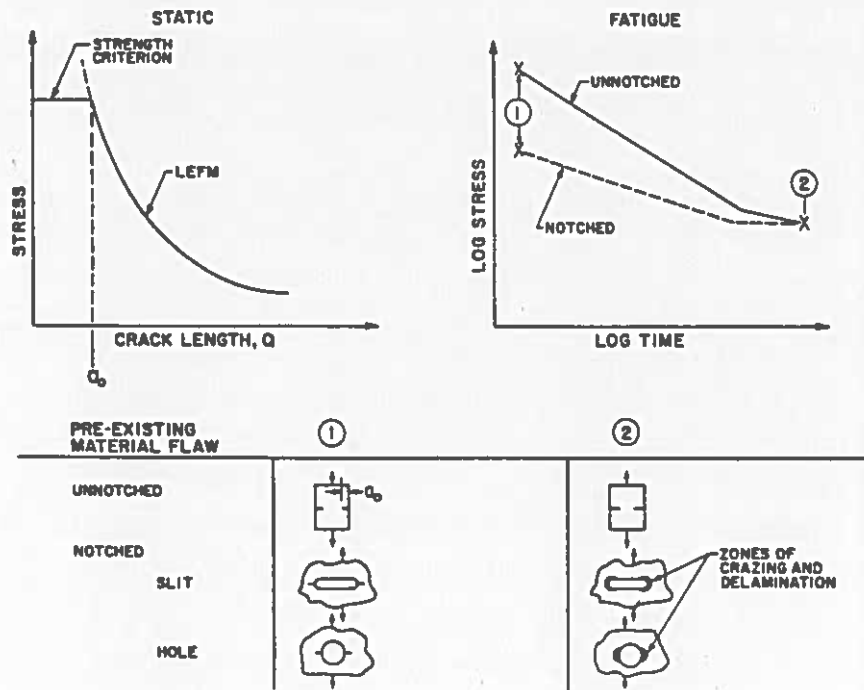


Bild 9.3 Schematische Darstellung des Ermüdungsverhaltens von gekerbten und ungekerbten Faserverbunden. Vergleichend das statische Verhalten. [Halpin et al, STP 521]

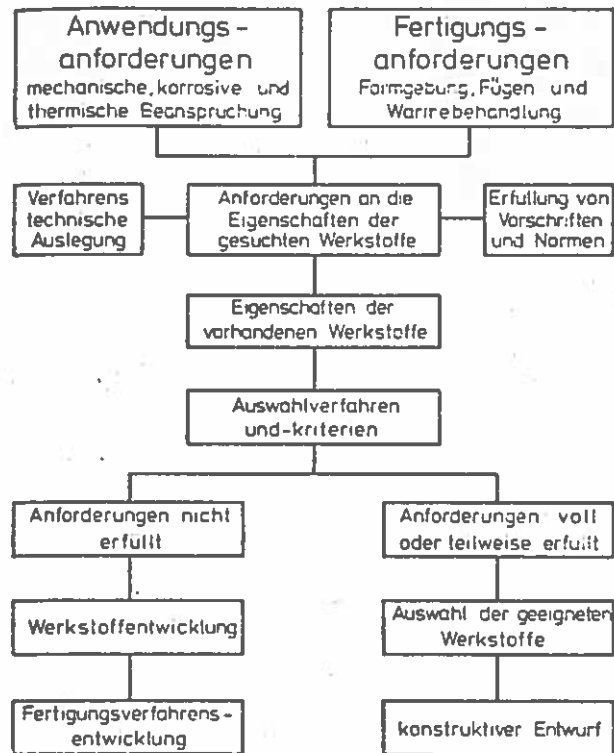


Bild 9.4 Ein Entscheidungssystem für die Materialauswahl [Hablitzel, Kunststoffe 1974]

Material	Ultimate Tensile Strength, ksi		Ultimate Compressive Strength, ksi		Initial Tensile Modulus, 10 <sup>4</sup> psi		Ultimate Tensile Strain, %	
	0 deg	90 deg	0 deg	90 deg	0 deg	90 deg	0 deg	90 deg
Type A	220	7-12	220	40	18	1.5	1.2	0.5-0.9
HT	200	6-12	200	35	22	1.3	0.9	0.5-0.9
HM	130	5-10	130	30	27	1.3	0.5	0.5-0.8
UHM	200	2-3	97	27	45	0.9	0.5	0.2-0.3
PRD	220	3-4	45	15	11	0.8	2.0	0.3-0.5
S glass	260	5-9	100	25	8	2.0	3.0	0.3-0.5
Boron	230	9-13	400	40	30	3.0	0.7	0.3-0.5

<sup>a</sup> 60% Fiber Volume

Tabelle 9.3 Mechanische Eigenschaften von Faserverbunden [Freeman/Kuebler]

als variabel angenommene Querschnittsgröße		Stab		Platte			
Festigkeitswertung	Zug	$\frac{P_1}{P_2} =$	$\frac{\sigma_1 F_1}{\sigma_2 F_2} = 1$	$\frac{\sigma_1 s_1}{\sigma_2 s_2} = 1$			
		$\frac{G_1}{G_2} =$	$\frac{\gamma_1 F_1}{\gamma_2 F_2} = \frac{\gamma_1 \sigma_1}{\gamma_2 \sigma_2}$	$\frac{\gamma_1 s_1}{\gamma_2 s_2} = \frac{\gamma_1 \sigma_2}{\gamma_2 \sigma_1}$			
	Wertung	Wertung	o / $\gamma$				
	Biegung	$\frac{M_1}{M_2} =$	$\frac{\sigma_1 W_1}{\sigma_2 W_2} = \frac{\sigma_1 r_1^3}{\sigma_2 r_2^3} = 1$	$\frac{\sigma_1 W_1}{\sigma_2 W_2} = \frac{\sigma_1 s_1}{\sigma_2 s_2} = 1$	$\frac{\sigma_1 W_1}{\sigma_2 W_2} = \frac{\sigma_1 s_1^2}{\sigma_2 s_2^2} = 1$		
		$\frac{G_1}{G_2} =$	$\frac{\gamma_1 r_1^2}{\gamma_2 r_2^2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$	$\frac{\gamma_1 s_1}{\gamma_2 s_2} = \frac{\gamma_1 \sigma_2}{\gamma_2 \sigma_1}$	$\frac{\gamma_1 s_1}{\gamma_2 s_2} = \frac{\gamma_1 \sigma_2}{\gamma_2 \sqrt{\sigma_1}}$		
	Wertung	$\sqrt[3]{\sigma^2 / \gamma}$	o / $\gamma$		$\sqrt{\sigma / \gamma}$		
Druck- bzw. Schubstabilität	$\frac{P_1}{P_2} =$	$\frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} = \frac{E_1 r_1^4}{E_2 r_2^4} = 1$	$\frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} = \frac{E_1 s_1}{E_2 s_2} = 1$	$\frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} = \frac{E_1 s_1^3}{E_2 s_2^3}$	$\frac{E_1 J_1}{E_2 J_2}$	Biegung	
	$\frac{G_1}{G_2} =$	$\frac{\gamma_1 r_1^2}{\gamma_2 r_2^2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{E_2}{E_1}$	$\frac{\gamma_1 s_1}{\gamma_2 s_2} = \frac{\gamma_1 E_2}{\gamma_2 E_1}$	$\frac{\gamma_1 s_1}{\gamma_2 s_2} = \frac{\gamma_1 E_2}{\gamma_2 \sqrt{E_1}}$	$\frac{G_1}{G_2}$		
Wertung		E / $\gamma$		$\sqrt[3]{E / \gamma}$	Wertung		
		$\frac{E_1 r_1^2}{E_2 r_2^2} = 1$	$\frac{E_1 s_1}{E_2 s_2} = 1$		$\frac{E_1 F_1}{E_2 F_2}$	Steffigkeitswertung	
		$\frac{\gamma_1 r_1^2}{\gamma_2 r_2^2} = \frac{\gamma_1 E_2}{\gamma_2 E_1}$	$\frac{\gamma_1 s_1}{\gamma_2 s_2} = \frac{\gamma_1 E_2}{\gamma_2 E_1}$		$\frac{G_1}{G_2}$		
		E / $\gamma$		Wertung	Zug u. Druck		

Tabelle 9.4 Gewichtsspezifische Materialwertung. Kenngrößen [Wiedemann, Hertel]

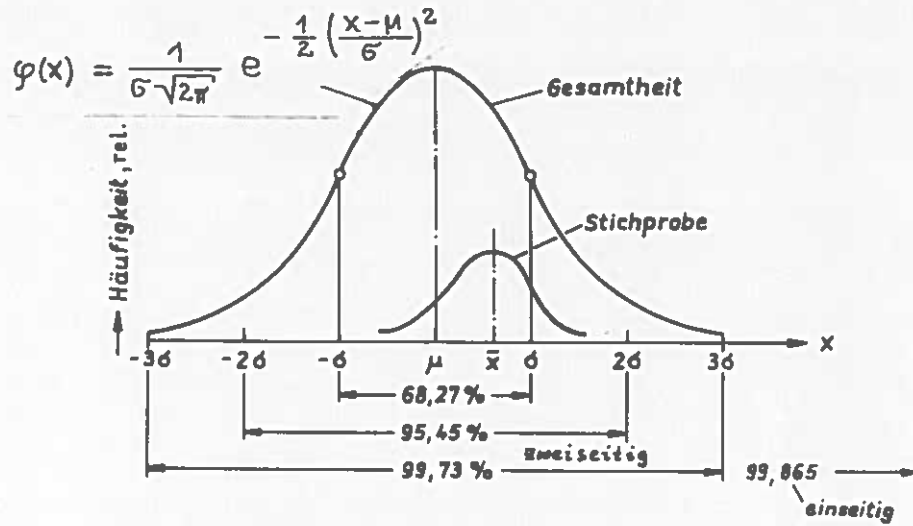


Bild 9.5 Gaußsche Normalverteilung mit Normalstreuung (einer Bauteileigenschaft zum Beispiel)

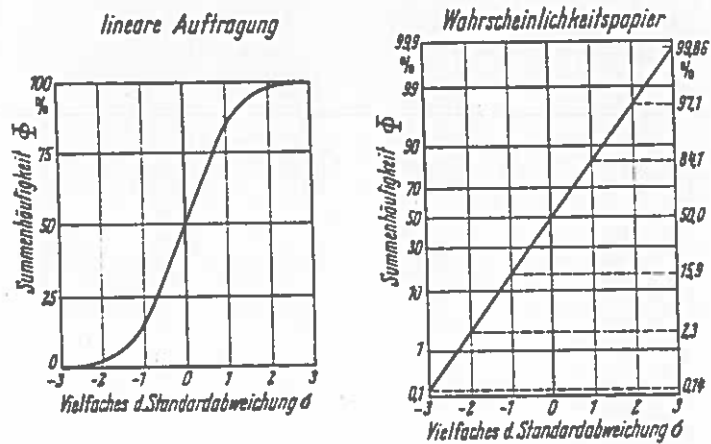


Bild 9.6 Lineare Auftragung der Summenhäufigkeit und Auftragung im Wahrscheinlichkeitspapier [Hertel]

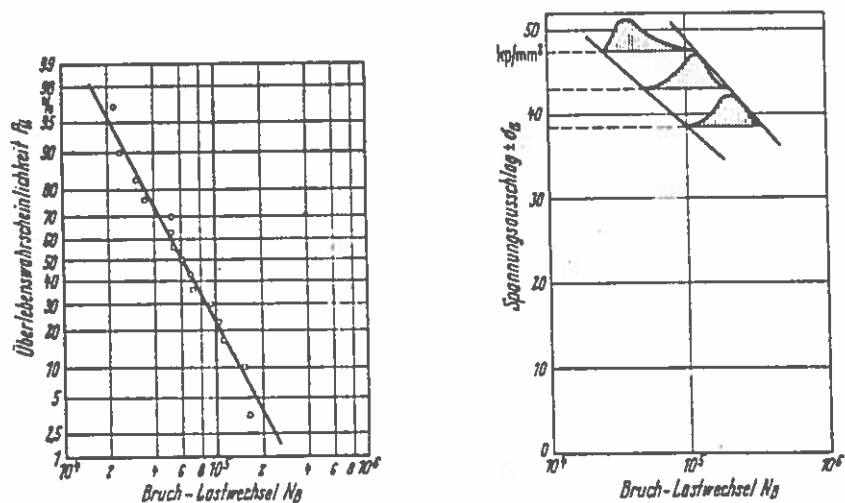


Bild 9.7 Auftragung von Bruchlastwechselzahlen für ein Spannungsniveau bei Einstufenversuchen [Hertel]

Bild 9.8 Häufigkeitsverteilungen von Bruchlastwechselzahlen - Schematische Darstellung - [Hertel]

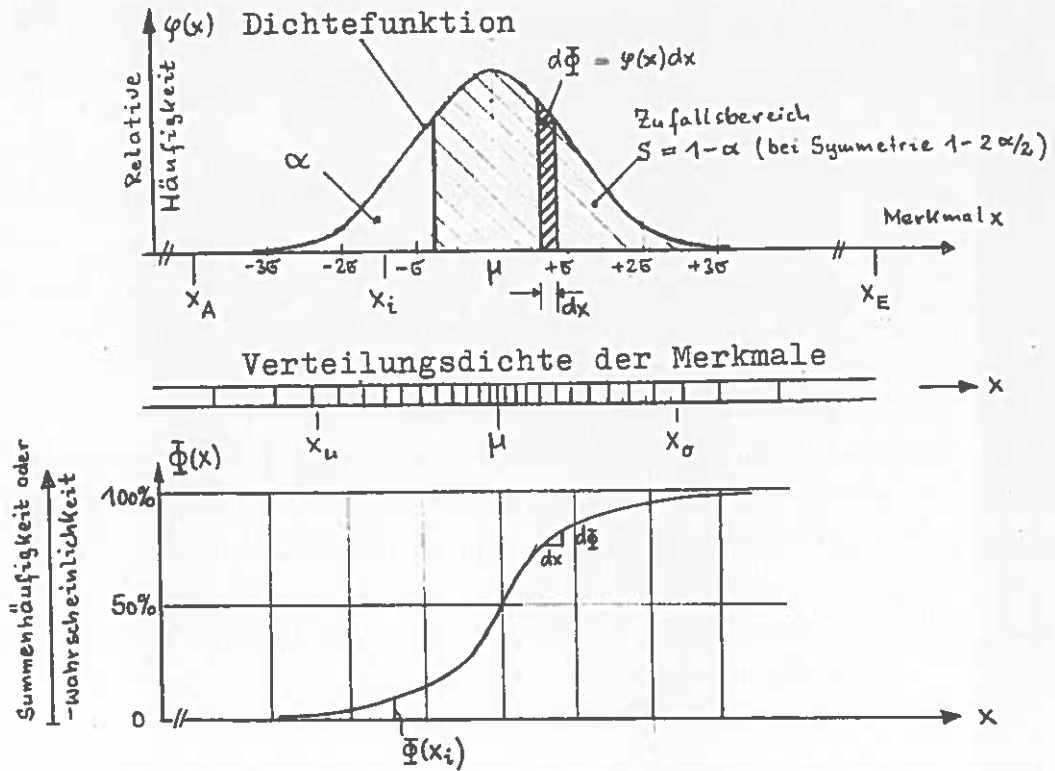


Bild 9.9 Relative Häufigkeit, Verteilungsdichte, Summenhäufigkeit und Schwellenwerte der statistische Sicherheit

\*) Summenhäufigkeiten  $H_i(n)$  (in Prozent) zum Eintragen der Punkte  $[x_{ii}; H_{ii}]$  von geordneten Stichproben in das Wahrscheinlichkeitsnetz bei kleinem Umfang  $n$  der Stichprobe; ( $6 \leq n \leq 30$ )

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	10,2	8,9	7,8	6,8	6,2	5,6	5,2	4,8	4,5	4,1	3,9	3,7	3,4	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7	2,6	2,4	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1
2	26,1	22,4	19,9	17,6	15,9	14,5	13,1	12,3	11,3	10,6	10,0	9,3	8,9	8,4	7,9	7,6	7,2	6,9	6,7	6,4	6,2	5,9	5,7	5,6	5,3
3	42,1	36,3	31,9	28,4	25,6	23,3	21,6	19,8	18,4	17,1	16,1	15,2	14,2	13,6	12,9	12,3	11,7	11,3	10,7	10,4	9,9	9,5	9,2	8,9	8,7
4	57,9	50,0	44,0	39,4	35,2	32,3	29,6	27,4	25,8	23,9	22,4	20,9	19,8	18,7	17,9	17,1	16,3	15,6	14,9	14,2	13,8	13,4	12,7	12,3	11,9
5	73,9	63,7	56,0	50,0	45,2	41,3	37,8	34,8	32,3	30,2	29,4	26,9	25,1	23,0	22,7	21,8	20,6	19,8	18,9	18,1	17,6	16,9	16,4	15,9	15,2
6	89,8	77,6	68,1	60,0	54,8	50,0	46,0	42,5	39,4	36,7	34,8	32,0	30,9	29,1	27,9	26,4	25,1	24,2	23,3	22,4	21,5	20,6	19,8	19,2	18,7
7		91,2	80,2	71,6	64,8	58,7	54,0	50,0	46,4	43,3	40,9	38,2	36,3	34,6	32,6	31,2	29,8	29,4	27,4	26,1	25,1	24,2	23,3	22,7	21,8
8			92,2	82,4	74,6	67,7	62,2	57,5	53,8	50,0	46,8	44,0	41,7	39,7	37,8	35,9	34,1	32,6	31,6	30,2	29,1	28,1	27,1	26,1	25,1
9				93,2	84,1	76,7	70,5	65,2	60,8	56,7	53,2	50,0	47,2	44,8	42,6	40,5	38,6	37,1	35,6	34,1	33,0	31,6	30,5	29,5	28,4
10					93,8	85,5	78,5	72,6	67,7	63,3	59,1	56,0	52,8	50,0	47,6	45,2	43,3	41,3	39,2	38,2	36,7	35,2	34,1	33,0	31,9
11						94,4	86,9	80,2	74,6	69,8	65,2	61,8	58,3	55,2	52,4	50,0	47,6	45,6	43,6	42,1	40,5	39,0	37,4	36,3	35,2
12							94,9	87,7	81,0	76,1	71,6	67,4	63,7	60,3	57,5	54,8	52,4	50,0	48,0	46,0	44,4	42,6	41,3	39,7	38,0
13								95,3	88,7	82,0	77,0	73,2	69,1	65,5	62,2	59,3	56,7	54,4	52,0	50,0	48,0	46,4	44,8	43,3	41,7
14									95,5	89,4	83,9	79,1	74,9	70,9	67,4	64,1	61,4	58,7	56,4	54,0	52,0	50,0	48,4	46,4	45,2
15										95,9	90,0	84,8	80,2	76,1	72,2	68,8	65,9	62,9	60,3	57,9	55,8	53,6	51,6	50,0	48,4
16											96,1	90,7	85,9	81,3	77,3	73,6	70,2	67,4	64,4	61,9	59,5	57,5	55,2	53,0	51,6
17												96,3	91,2	86,4	82,1	78,2	74,9	71,6	68,4	65,9	63,3	61,0	58,7	56,7	54,8
18													96,6	91,6	87,1	82,9	79,4	75,8	72,6	69,8	67,0	64,8	62,6	60,3	58,3
19														96,7	92,1	87,7	83,6	80,2	76,7	73,9	70,9	68,4	65,9	63,7	61,4
20															96,9	92,4	88,3	84,4	81,1	77,9	74,9	71,9	69,5	67,0	64,8
21																97,1	92,8	88,7	85,1	81,9	78,5	75,8	72,9	70,5	68,1
22																	97,2	93,1	89,3	85,8	82,4	79,4	76,7	73,9	71,6
23																		97,3	93,3	89,6	86,2	83,1	80,2	77,3	74,9
24																			97,4	93,6	90,2	86,8	83,6	80,6	78,2
25																				97,6	93,8	90,5	87,3	84,1	81,3
26																					97,8	94,1	90,8	87,7	84,8
27																						97,7	94,3	91,2	88,1
28																							97,8	94,5	91,3
29																								97,9	94,7
30																									97,9

\*) Nach H.-J. HENNING und R. WARTMANN: Stichproben kleinen Umfangs im Wahrscheinlichkeitsnetz. Mittbl. f. math. Statistik, 9, 1957, S. 168.

Tabelle 9.5 Summenhäufigkeiten  $H_1(n)$   
[Graf/Henning/Stange]

DLL = Design Limit Load. Sichere Last.  
 Max. Operating Pressure. Grenzdruck im Betrieb.

DUL = Design Ultimate Load. Rechnerische Bruchlast.

UL = Ultimate Load. Höchste ertragbare Last.  
 Min. Berstdruck.  
 (Dieser Wert ist an ein bestimmtes Paar  $S_z / S_v$  gebunden)

$\mu$  = Mittlere Bruchlast der Gesamtheit

$\bar{x}$  = Mittlere Bruchlast der Stichprobe

$$s(99,865\%/95\%) = \frac{79,1}{60,0} = 1,31$$

$$j_u = \frac{90,0}{60,0} = 1,5$$

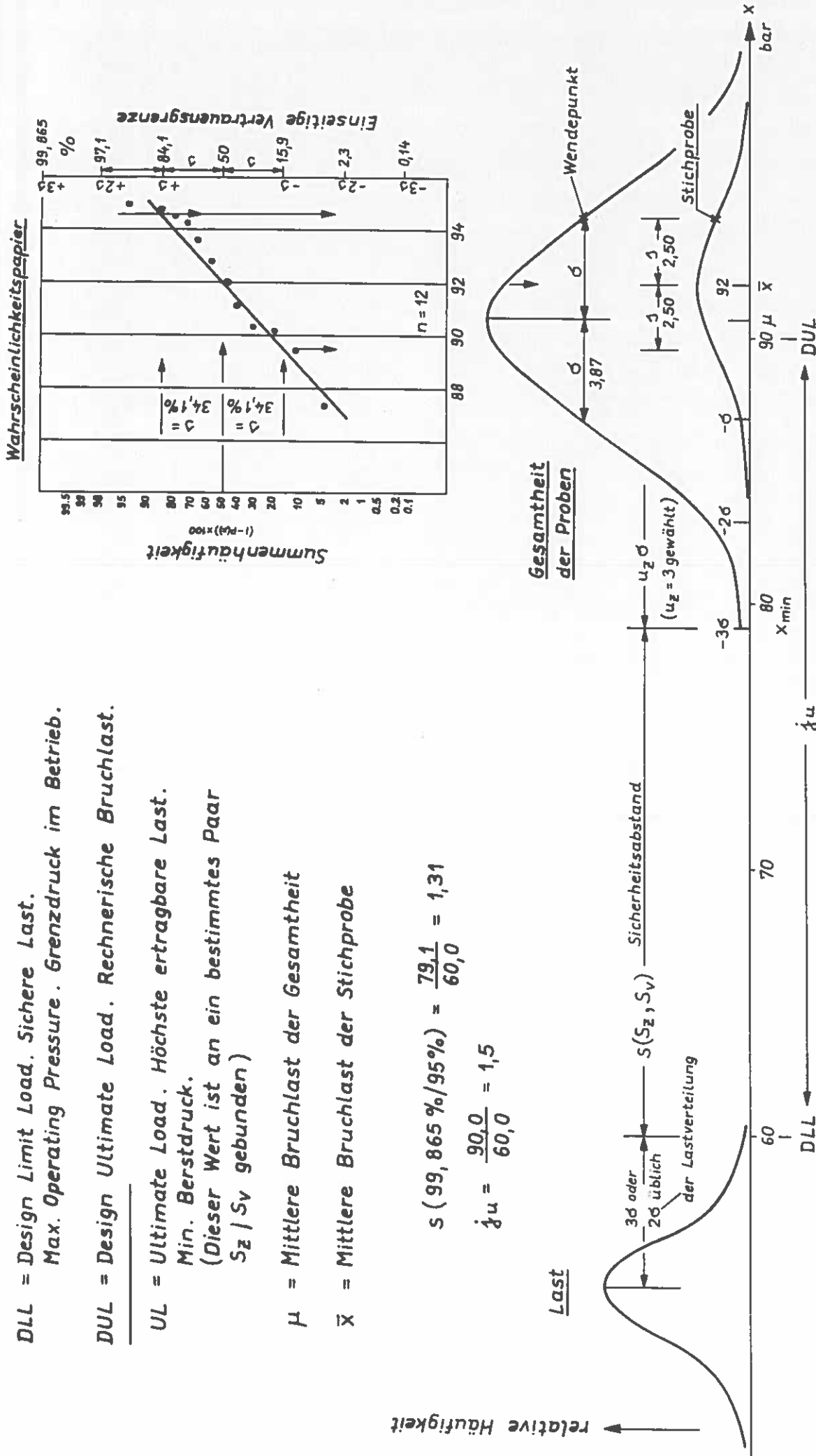


Bild 9.10 Überprüfung der statistischen Sicherheit  $s$  des Gesamtbauteils (Behälter) bei einer erwünschten Vertrauenssicherheit von  $S_v = 95\%$ .

statistischen Sicherheit  $S = 1 - \alpha$  (bei zweiseitiger Abgrenzung) in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad  $f$

$$t_{1-\alpha/2} = -t_{\alpha/2}$$



zur statistischen Sicherheit  $S = 1 - \alpha$  (bei einseitiger Abgrenzung) in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad  $f$

$$t_{1-\alpha} = -t_{\alpha}$$



Freiheitsgrad $f$	Statistische Sicherheit $S = 1 - \alpha$								Freiheitsgrad $f$
	80%	90%	95%	98%	99%	99.5%	99.9%	99.9%	
1	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	118,3	336,0	1	
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60	2	
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,941	10,21	12,92	3	
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610	4	
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869	5	
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,950	6	
7	1,416	1,895	2,305	2,998	3,499	4,785	5,408	7	
8	1,397	1,860	2,266	2,896	3,355	4,501	5,041	8	
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781	9	
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587	10	
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437	11	
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,950	4,318	12	
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221	13	
14	1,346	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140	14	
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073	15	
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,016	16	
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,640	3,965	17	
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922	18	
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883	19	
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850	20	
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819	21	
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,503	3,792	22	
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768	23	
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,746	24	
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725	25	
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707	26	
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690	27	
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674	28	
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659	29	
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646	30	
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551	40	
50	1,299	1,678	2,008	2,403	2,678	3,261	3,496	50	
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460	60	
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,193	3,416	80	
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390	100	
200	1,286	1,652	1,972	2,346	2,601	3,131	3,340	200	
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310	500	
$\infty$	1,282	1,645	1,960	2,320	2,576	3,090	3,291	$\infty$	

Freiheitsgrad $f$	Statistische Sicherheit $S = 1 - \alpha$								Freiheitsgrad $f$
	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,9%	99,95%		
1	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	118,3	336,0	1	
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60	2	
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,941	10,21	12,92	3	
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610	4	
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869	5	
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,950	6	
7	1,416	1,895	2,305	2,998	3,499	4,785	5,408	7	
8	1,397	1,860	2,266	2,896	3,355	4,501	5,041	8	
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781	9	
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587	10	
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437	11	
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,950	4,318	12	
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221	13	
14	1,346	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140	14	
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073	15	
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,016	16	
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,640	3,965	17	
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922	18	
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883	19	
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850	20	
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819	21	
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,503	3,792	22	
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768	23	
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,746	24	
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725	25	
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707	26	
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690	27	
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674	28	
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659	29	
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646	30	
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551	40	
50	1,299	1,678	2,008	2,403	2,678	3,261	3,496	50	
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460	60	
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,193	3,416	80	
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390	100	
200	1,286	1,652	1,972	2,346	2,601	3,131	3,340	200	
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310	500	
$\infty$	1,282	1,645	1,960	2,320	2,576	3,090	3,291	$\infty$	

Tab. C4 und C5 nach E. T. Fenzl: Extended tables of the percentage points of Student's  $t$ -distribution. J. Am. Stat. Ass. 54, 1959, S. 883.

Tabelle 9.6 Schwellenwerte  $t_{1-\alpha/2; f}$  und  $t_{1-\alpha; f}$  [Graf/Henning/Stange]

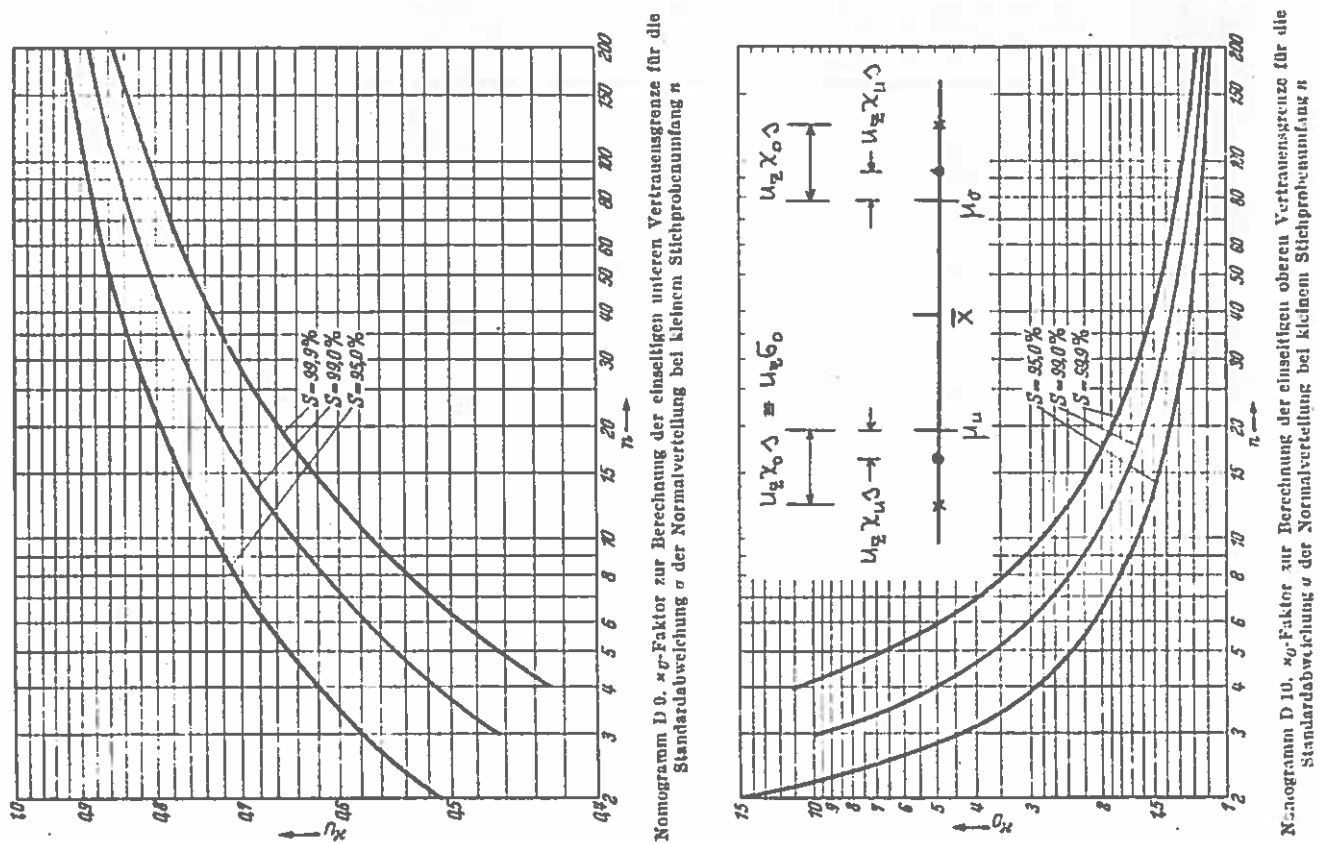
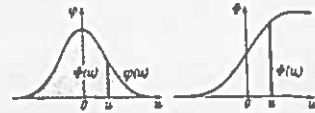


Bild 9.11 Nomogramme zur Berechnung der einseitigen Vertrauensgrenzen  $x_u$  und  $x_o$ . [Graf /Henning/Stange]



$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-t^2/2} dt; \quad \Phi(u) = 1 - \Phi(-u)$$

Ablesbeispiel:  $\Phi(0,78) = 0,776373$



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953
0,1	,539828	,543795	,547768	,551717	,555670
0,2	,579260	,583166	,587064	,590954	,594835
0,3	,617911	,621720	,625516	,629300	,633072
0,4	,655422	,659197	,662957	,666702	,670431
0,5	,691462	,695174	,698869	,702544	,706201
0,6	,725747	,729389	,733017	,736633	,740236
0,7	,758036	,761648	,765238	,768805	,772359
0,8	,788145	,791730	,795292	,798831	,802348
0,9	,815940	,819519	,823084	,826635	,830172
1,0	,841345	,844932	,848503	,852059	,855601
1,1	,864334	,867912	,871476	,875026	,878562
1,2	,894330	,897897	,901451	,904992	,908521
1,3	,920200	,923753	,927292	,930818	,934331
1,4	,942943	,946473	,949989	,953492	,956982
1,5	,963303	,966793	,970271	,973737	,977191
1,6	,980760	,984213	,987662	,991107	,994548
1,7	,993963	,997404	,1,000842	,1,004277	,1,007708
1,8	,999535	,1,002966	,1,006395	,1,009822	,1,013246
1,9	,999933	,1,003364	,1,006793	,1,010220	,1,013644
2,0	,999970	,1,003401	,1,006830	,1,010257	,1,013681
2,1	,999985	,1,003432	,1,006861	,1,010288	,1,013712
2,2	,999993	,1,003463	,1,006892	,1,010319	,1,013743
2,3	,999997	,1,003494	,1,006923	,1,010350	,1,013774
2,4	,999999	,1,003525	,1,006954	,1,010381	,1,013805
2,5	,999999	,1,003556	,1,006985	,1,010412	,1,013836
2,6	,999999	,1,003587	,1,007016	,1,010443	,1,013867
2,7	,999999	,1,003618	,1,007047	,1,010474	,1,013898
2,8	,999999	,1,003649	,1,007078	,1,010505	,1,013929
2,9	,999999	,1,003680	,1,007109	,1,010536	,1,013960

0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	u
0,619039	0,623022	0,627003	0,631181	0,635356	0,0
,659618	,663599	,667576	,671548	,675515	0,1
,698706	,702678	,706640	,710592	,714534	0,2
,736830	,740787	,744739	,748686	,752628	0,3
,773045	,776992	,780934	,784871	,788803	0,4
,798840	,802781	,806718	,810650	,814577	0,5
,828444	,832381	,836313	,840240	,844162	0,6
,853141	,857072	,860998	,864919	,868835	0,7
,874028	,877953	,881874	,885790	,889701	0,8
,891350	,895267	,899179	,903086	,906988	0,9
,914892	,918799	,922701	,926598	,930490	1,0
,926471	,930368	,934260	,938147	,942030	1,1
,939429	,943316	,947200	,951081	,954958	1,2
,956970	,960847	,964721	,968592	,972459	1,3
,974112	,977979	,981842	,985701	,989556	1,4
,989818	,993671	,997520	,1,001365	,1,005206	1,5
,995975	,1,000000	,1,004000	,1,008000	,1,012000	1,6
,997200	,1,001333	,1,005333	,1,009333	,1,013333	1,7
,997857	,1,001667	,1,005667	,1,009667	,1,013667	1,8
,998111	,1,001999	,1,005999	,1,010000	,1,014000	1,9
,998222	,1,002333	,1,006333	,1,010333	,1,014333	2,0
,998299	,1,002667	,1,006667	,1,010667	,1,014667	2,1
,998333	,1,003000	,1,007000	,1,011000	,1,015000	2,2
,998333	,1,003333	,1,007333	,1,011333	,1,015333	2,3
,998333	,1,003667	,1,007667	,1,011667	,1,015667	2,4
,998333	,1,004000	,1,008000	,1,012000	,1,016000	2,5
,998333	,1,004333	,1,008333	,1,012333	,1,016333	2,6
,998333	,1,004667	,1,008667	,1,012667	,1,016667	2,7
,998333	,1,005000	,1,009000	,1,013000	,1,017000	2,8
,998333	,1,005333	,1,009333	,1,013333	,1,017333	2,9

u	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$\Phi(u)$	$1 - 1,350 \cdot 10^{-8}$	$1 - 2,326 \cdot 10^{-9}$	$1 - 3,167 \cdot 10^{-11}$	$1 - 3,398 \cdot 10^{-16}$	$1 - 2,867 \cdot 10^{-17}$
$\Phi(u)$	50%	60%	70%	80%	90%
u	0	0,253	0,524	0,842	1,282

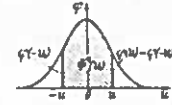
6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	u
$1 - 0,866 \cdot 10^{-10}$	$1 - 1,280 \cdot 10^{-13}$	$1 - 0,221 \cdot 10^{-18}$	$1 - 1,120 \cdot 10^{-23}$	$1 - 7,020 \cdot 10^{-28}$	$\Phi(u)$
97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%
1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291
u					u

Für  $\Phi(u) = 1 - \alpha$  ergeben sich für u die Werte  $u_{1-\alpha}$ . Zahlenwerte  $u_{1-\alpha}$  + 5 Tafelwerks: FISHER und YATES: Statistical Tables for Biological, Agricultural and

(Probab) zum Summenwert  $\Phi(u) = 1 - \alpha$  erhält man einfach bei Benutzung des Medical Research, Edinburgh: Oliver and Boyd 1963, Table IX.

$$\Phi^*(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1 - \Phi(u); \quad \Phi^*(u) = -\Phi^*(-u)$$

Ablesbeispiel:  $\Phi^*(1,22) = 0,777535$



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,0	0,007979	0,015957	0,023933	0,031907
0,1	,070950	,081591	,092232	,102873	,113514
0,2	,158519	,166332	,174145	,181958	,189770
0,3	,235823	,243636	,251449	,259262	,267075
0,4	,310813	,318626	,326439	,334252	,342065
0,5	,382923	,389949	,396975	,403999	,411023
0,6	,451494	,458520	,465546	,472571	,479595
0,7	,516073	,522100	,528126	,534152	,540178
0,8	,576289	,582316	,588342	,594368	,600394
0,9	,631890	,637917	,643943	,649969	,655995
1,0	,682889	,688916	,694942	,700968	,706994
1,1	,728698	,734725	,740751	,746777	,752803
1,2	,769861	,775888	,781914	,787940	,793966
1,3	,806389	,812416	,818442	,824468	,830494
1,4	,838487	,844514	,850540	,856566	,862592
1,5	,896386	,902413	,908439	,914465	,920491
1,6	,960401	,966428	,972454	,978480	,984506
1,7	,991969	,997996	,1,004022	,1,010048	,1,016074
1,8	,998139	,999666	,1,001192	,1,002718	,1,004244
1,9	,999267	,999894	,1,001420	,1,002946	,1,004472
2,0	,999560	,999789	,1,001417	,1,002943	,1,004469
2,1	,9996271	,9998142	,1,001414	,1,002940	,1,004466
2,2	,9996583	,9998193	,1,001411	,1,002937	,1,004463
2,3	,9996735	,9998112	,1,001408	,1,002934	,1,004460
2,4	,9996805	,9998047	,1,001405	,1,002931	,1,004457
2,5	,9996881	,9997982	,1,001402	,1,002928	,1,004454
2,6	,9996962	,9997916	,1,001399	,1,002925	,1,004451
2,7	,9997049	,9997852	,1,001396	,1,002922	,1,004448
2,8	,9997141	,9997788	,1,001393	,1,002919	,1,004445
2,9	,9997238	,9997724	,1,001390	,1,002916	,1,004442

0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	u
0,039878	0,047844	0,055806	0,063763	0,071713	0,0
,110235	,127119	,134090	,142047	,150000	0,1
,197413	,205338	,213260	,221181	,229104	0,2
,273061	,281153	,289240	,297328	,305413	0,3
,347290	,354484	,361645	,369773	,377896	0,4
,417881	,424521	,431122	,438685	,446209	0,5
,484309	,490746	,497142	,503590	,509986	0,6
,546745	,552745	,558700	,564618	,570499	0,7
,604675	,609675	,614630	,619540	,624404	0,8
,657888	,662846	,667760	,672629	,677453	0,9
,706282	,710855	,715381	,719858	,724287	1,0
,749858	,753951	,757999	,761999	,765954	1,1
,788700	,792331	,795915	,799455	,802949	1,2
,822984	,826170	,829313	,832413	,835471	1,3
,852941	,855710	,858438	,861127	,863776	1,4
,878858	,881240	,883585	,885893	,888165	1,5
,901057	,903086	,905081	,907043	,908972	1,6
,918882	,921192	,923273	,924924	,926546	1,7
,935886	,937114	,938316	,939492	,940642	1,8
,948824	,950004	,951162	,952296	,953406	1,9
,968626	,969601	,970548	,971474	,972382	2,0
,980845	,981645	,982416	,983163	,983887	2,1
,985851	,986479	,987079	,987652	,988200	2,2
,988227	,988711	,989166	,989592	,989989	2,3
,989574	,989916	,990221	,990498	,990746	2,4
,990228	,990433	,990600	,990740	,990854	2,5
,990851	,990986	,991086	,991161	,991219	2,6
,991440	,991499	,991534	,991556	,991566	2,7
,991629	,991649	,991659	,991660	,991659	2,8
,991822	,991824	,991816	,991807	,991797	2,9

u	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$\Phi^*(u)$	$1 - 2,700 \cdot 10^{-8}$	$1 - 4,853 \cdot 10^{-9}$	$1 - 6,334 \cdot 10^{-10}$	$1 - 6,795 \cdot 10^{-16}$	$1 - 5,733 \cdot 10^{-17}$
$\Phi^*(u)$	80%	60%	70%	80%	90%
u	0,675	0,842	1,036	1,282	1,645

6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	u
$1 - 1,973 \cdot 10^{-6}$	$1 - 2,660 \cdot 10^{-12}$	$1 - 1,244 \cdot 10^{-18}$	$1 - 2,257 \cdot 10^{-23}$	$1 - 1,524 \cdot 10^{-28}$	$\Phi^*(u)$
97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%
2,241	2,576	2,807	3,023	3,291	3,481
u					u

Für  $\Phi^*(u) = 1 - \alpha$  ergeben

sich für u die Werte  $u_{1-\alpha}$ .

Graf/Henning/Stange, Formeln und Tabellen, 2. Aufl.

Tabelle 9.7 Summenfunktion der Normalverteilung Graf/Henning/Stange

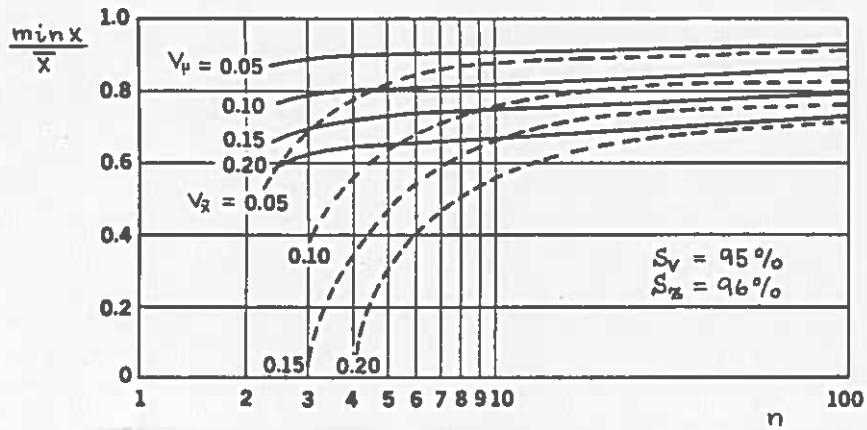


Bild 9.12 Abhängigkeit des Mindestwertes  $\min x$  ( $S_z, S_v$ ) von der Probenzahl bei Bekanntsein von  $\bar{x}, v_{\bar{x}}$  und  $\bar{x}, v_{\mu}$  [Jones]

LOAD	COEFFICIENT OF VARIATION, $v_{\mu}$	
	RANGE	AVERAGE
<b>TENSION</b>		
LONGITUDINAL	0.04 - 0.12	0.10
TRANSVERSE	0.01 - 0.20	0.11
<b>COMPRESSION</b>		
LONGITUDINAL	0.08 - 0.16	0.12
TRANSVERSE	0.05 - 0.11	0.08
<b>SHEAR</b>		
IN-PLANE	0.02 - 0.08	0.06
INTERLAMINAR	0.02 - 0.08	0.05
<b>FLEXURE</b>		
LONGITUDINAL	0.01 - 0.06	0.03
TRANSVERSE	0.01 - 0.02	0.08
<b>FILAMENTS</b>	0.06 - 0.19	0.12

Tabelle 9.8

Charakteristische Werte  $v_{\mu}$  für verschiedene Belastungsarten [Jones]

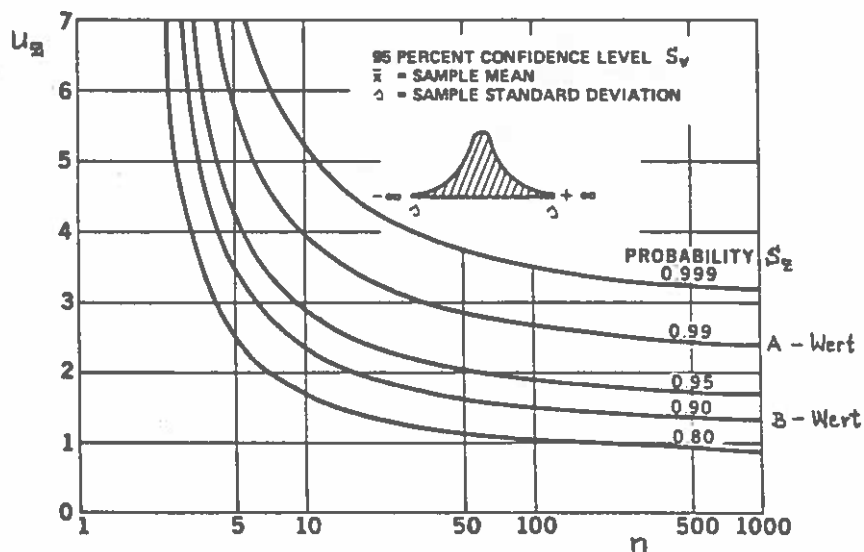


Bild 9.13 Zusammenhang der Anzahl  $n$  der Versuchsergebnisse mit der Zuverlässigkeitssicherheit  $S_z$  bzw. dem einseitigen Toleranzfaktor  $u_z$  bei vorgegebener Vertrauenssicherheit  $S_v = 95\%$

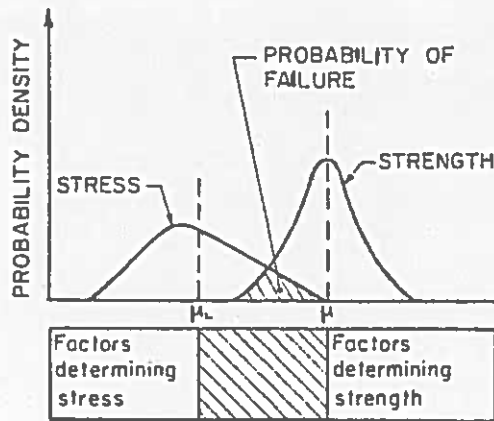


Bild 9.14

Anschauliche Darstellung der Bruchwahrscheinlichkeit (aus [Dao-Thien/Massoud])

Einzelabminderungsfaktor	Möglicher Bereich für verschiedene GFK	Mattenlaminate Bemessung gegen		
		Bruch (B)	Proportionalitätsgrenze (P)	Instabilität (I)
A... <sub>1</sub>	1,4...3,4	2,0	2,2	1,8
A... <sub>2</sub>	1,1...1,8	1,2	1,3	1,3
A... <sub>3</sub>	1,1...1,8	1,3	1,3	1,3
A... <sub>4</sub>	1,1...1,5	1,2	1,2	1,2
Gesamtfaktoren:		3,75	4,45	3,65

Tabelle 9.9

Abminderungsfaktoren  $A_i$  für Mattenlaminat aus GFK [Dolfen]

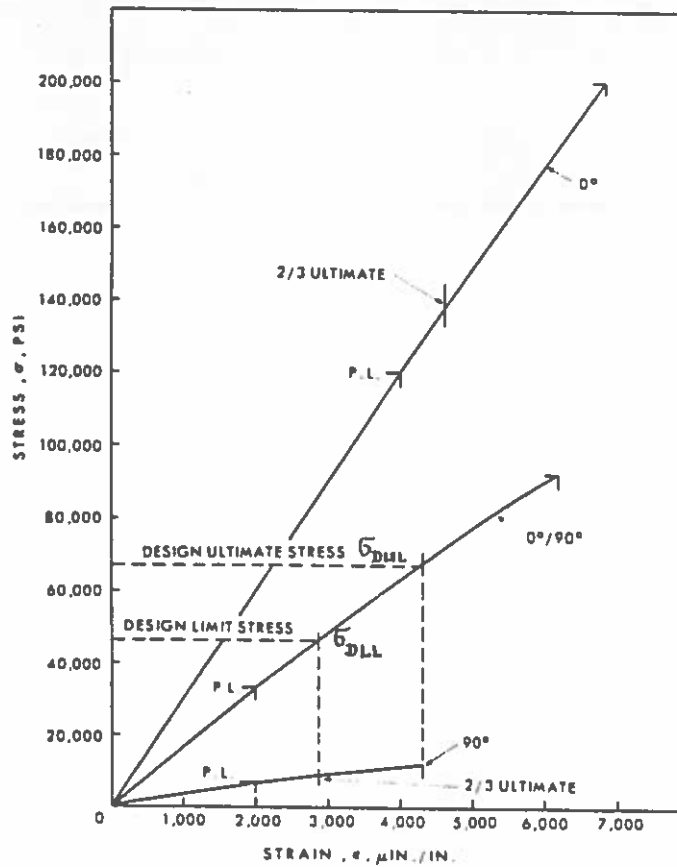


Bild 9.15 Auslegungsspannungen  $\sigma_{DUL}$  und  $\sigma_{DLL}$  [Hackman]

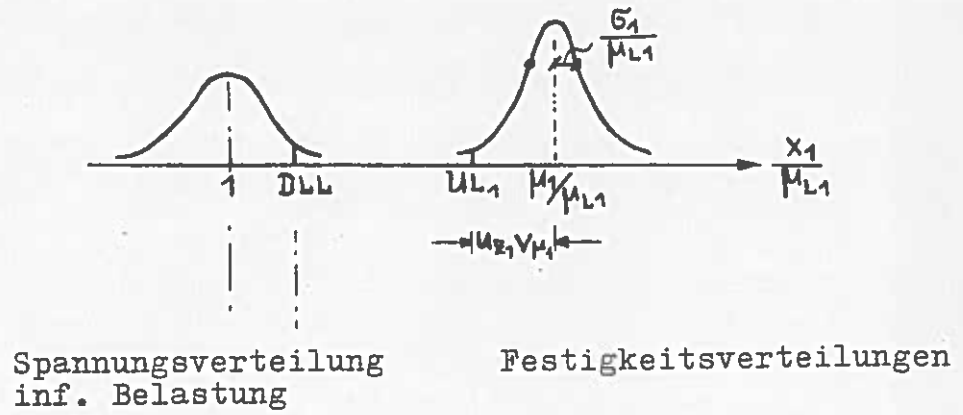


Bild 9.16 Schematischer Vergleich zweier Festigkeitsverteilungen mit einer Spannungsverteilung infolge Belastung

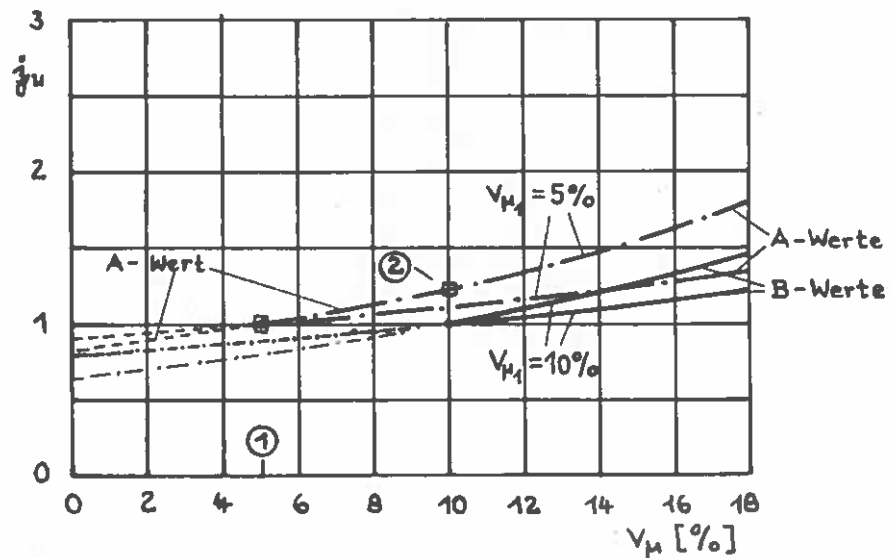


Bild 9.17 Veränderung des Auslegungsfaktors  $j_u$  für einen Zugstab bei Verwendung eines Werkstoffes 2 der dieselbe Sicherheit  $s(S_z, S_v)$  haben soll, aber einen anderen Variationskoeffizienten  $v_{\mu}$

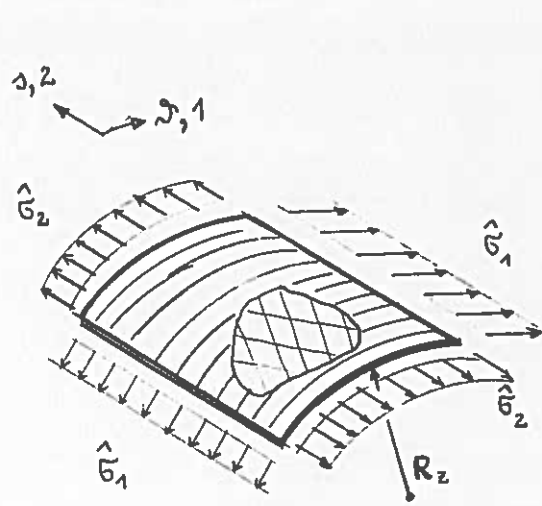


Bild 9.18 Definition der Spannungen im Zylinderbereich

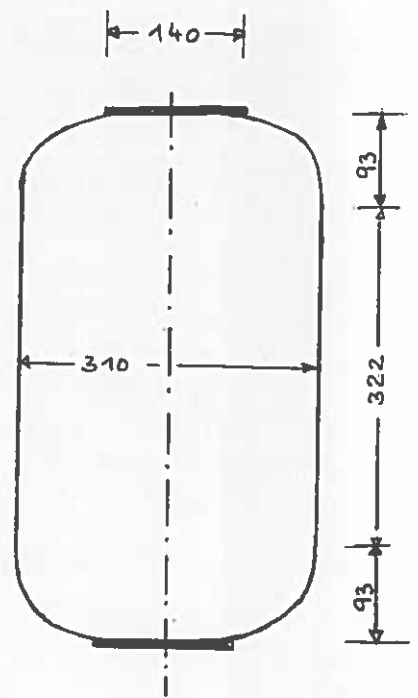


Bild 9.19 Behältermaße

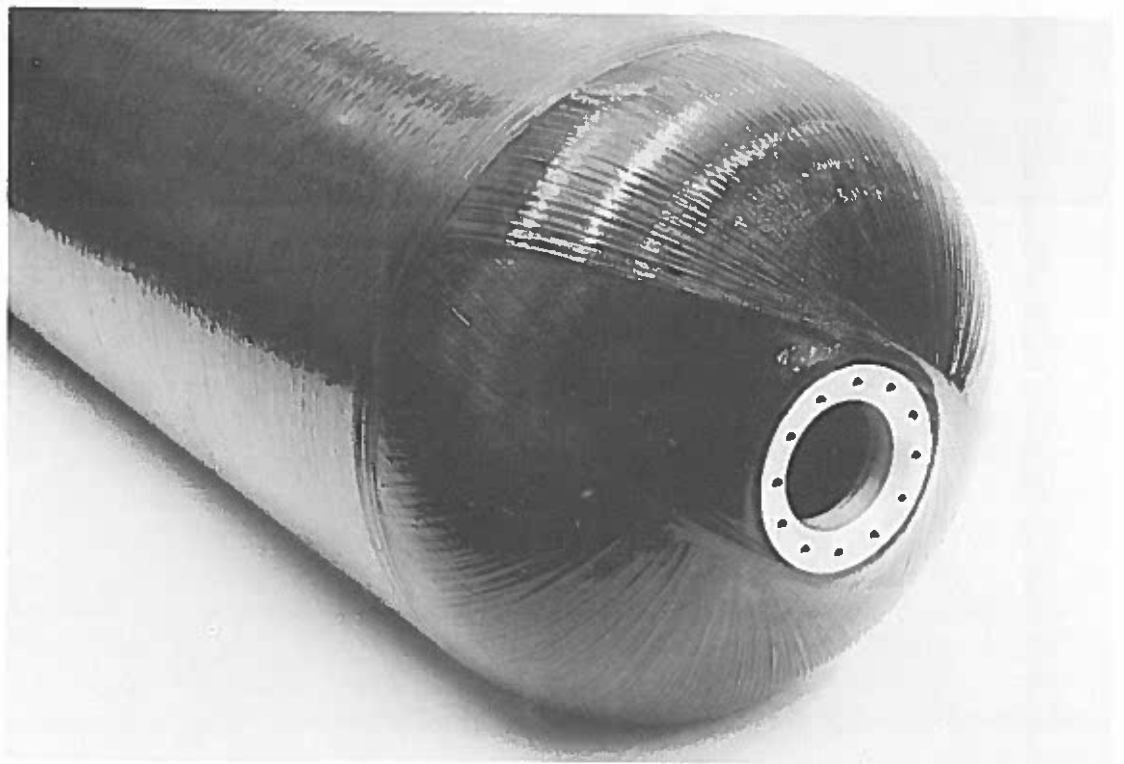


Bild 9.20 Gebauter CFK-Behälter verwandter Form (T = 2)

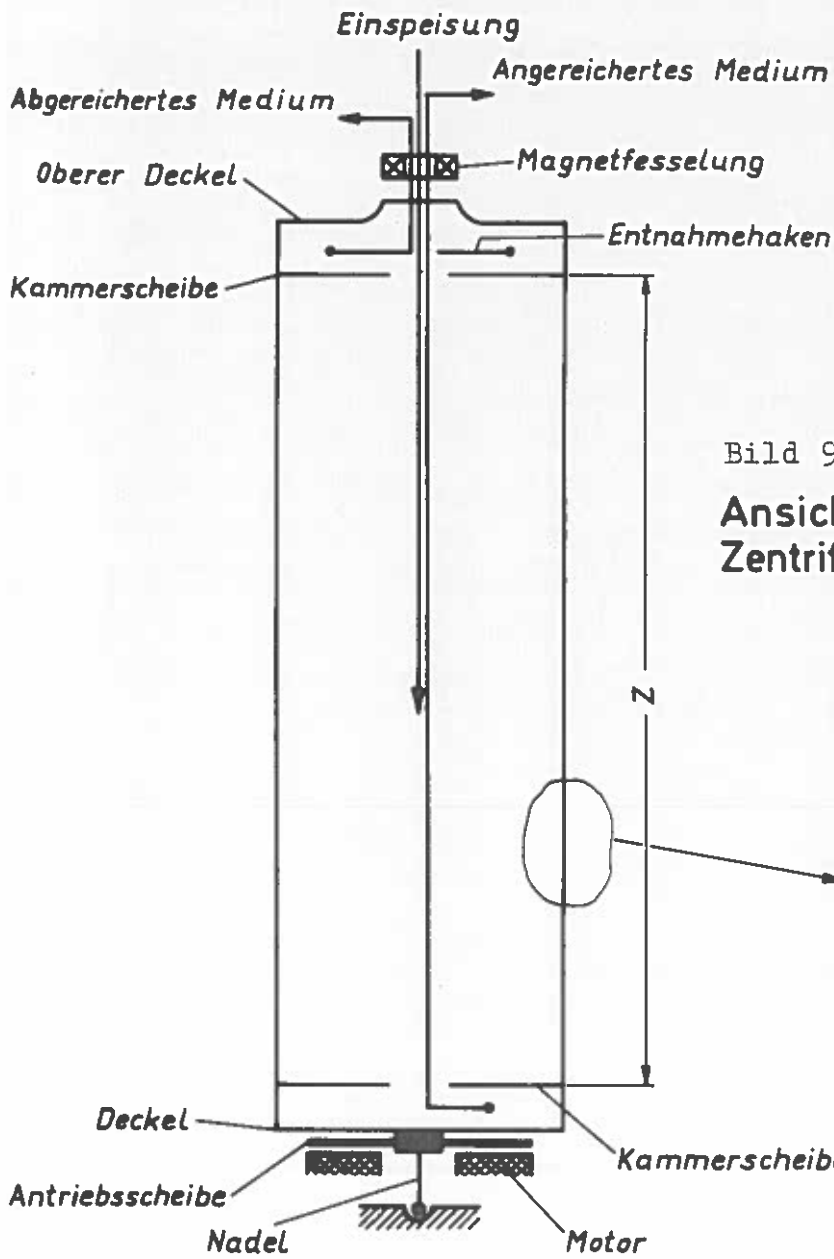


Bild 9.21

Ansicht einer schnellaufenden Zentrifuge

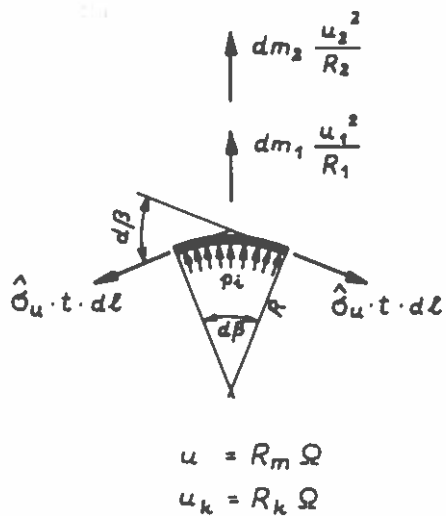


Bild 9.22

Beanspruchung einer Zentrifuge

## 10. Methoden zur Lösung von Differentialgleichungssystemen

### 10.1. Allgemeines über Lösungsverfahren

#### Lösungsweg über Differentialgleichungen

Bei der Ermittlung der Verformungen und Spannungen in einem Tragwerk geht man von drei "Grundgedanken" aus, die sich auf das physikalische Verhalten elastisch verformbarer Tragwerke abstützen [Buck]:

Die ersten beiden Grundgedanken beruhen auf den Bedingungen, daß äußere und innere Kräfte im Gleichgewicht stehen (Glg. (4.32)),

$$\tau^{ij}|_i + p^j = 0,$$

und daß die kinematische Verträglichkeit durch die Formänderungsbeziehungen

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i|j} + u_{j|i}),$$

und stetige Verformungen  $u$  erfüllt ist. Das bedeutet weiter, daß benachbarte Tragwerksteile nach der Deformation weder auseinanderklaffen dürfen noch sich durchdringen dürfen und daß die Verformungen an kinematisch geführten Randpunkten (wie Lagern) den dortigen Verformungen entsprechen müssen. Die vorgenannten Gleichgewichtsbedingungen und Formänderungsbeziehungen wurden in Kapitel 4 hergeleitet.

Der dritte Grundgedanke ist das Stoffgesetz. Es lautet, wenn von plastischen Verformungen abgesehen wird,

$$\tau^{ij} = E^{ijkl} (\gamma_{kl} - \gamma_{kl}^0)$$

und wurde in Kapitel 5 vorgestellt.

Die Verbindung der drei Grundgedanken miteinander liefert die DGLn elastischer Kontinua.

Eine analytische Lösung dieser DGLn ist nur bei Vorhandensein einfacher Randbedingungen möglich, weshalb man sehr häufig auf numerische Lösungsverfahren angewiesen ist. Bild 10.1 gibt einen Überblick, welche Möglichkeiten bei der Berechnung einer Struktur geboten werden.

Die Anwendung numerischer Rechenverfahren bringt heute durch die zunehmende Verbreitung von Großrechnern keine Nachteile mehr mit sich. Außerdem zeigt die Verwendung von computergerechten Lösungsverfahren, daß der Aufwand beim numerischen Berechnen von Problemen, die ana-

lytische Lösungen haben, öfters erheblich geringer sein kann als die Auswertung analytischer Formeln.

### Lösungsweg über ein Variationsprinzip

Bei der numerischen Ermittlung der Verformungen und Spannungen in einem Tragwerk wird sehr häufig als Lösungsweg der Weg über ein Variationsprinzip, also eine Integralbeziehung beschrrieben [Buck u.a.]. Das Variationsprinzip wird als Prinzip der virtuellen Arbeit formuliert und führt im Rahmen mehrerer Variationsprozesse zu den Gleichgewichtsbedingungen und den Verträglichkeitsbedingungen für Verschiebungen und Dehnungen. Als Beziehungen sind darin die ersten beiden Grundgedanken abzulesen, welche aber hier unter dem Integralzeichen weiter verarbeitet werden.

### Lösungsweg über eine Finite-Element-Methode:

Das Prinzip der virtuellen Arbeit wird auch bei den Finite-Element-Methoden (FEM) herangezogen. Diese sind Matrizenmethoden zur numerischen Lösung elastomechanischer Probleme.

Bei den Finite-Element-Methoden wird das Tragwerk in viele kleine Elemente zerlegt, die es ermöglichen, geometrisch beliebige Tragwerksformen zu berechnen. Die Genauigkeit der mit dieser Methode erzielbaren Lösungen hängt im wesentlichen von der Anzahl der verwendeten Elemente ab, sowie der Güte, mit der diese Elemente beschrieben werden.

Benutzt man einfache Elemente, so braucht man entsprechend viel davon zum Erreichen einer bestimmten Genauigkeit der Lösung. Benutzt man kompliziertere Elemente, so sind bei gleicher Lösungsgüte weniger notwendig, aber der Teilaufwand beim einzelnen Element, als Baustein der Gesamtstruktur, steigt an. Welche Elementtypen und welche Elementanzahl sinnvoll sind, hängt von der verlangten Lösungsqualität und Form des zu idealisierenden Tragwerks ab. Unregelmäßige Formen muß man sicherlich mit einer feinen Element-einteilung idealisieren.

### 10.2. Ein spezielles FEM-Verfahren

In diesem Kapitel wird eine spezielle, jedoch wichtige numerische Lösungsmethode aus der Familie der Finite-Element-Methoden (FEM) vorgestellt. Das mit dieser Methode (Verfahren) hergeleitete Rechenprogramm wird zur Berechnung orthotroper, mehrschichtiger, rotations-



symmetrischer Belastung benutzt (isotrope, einschichtige Schalen können damit natürlich auch berechnet werden).

Bei dem zu beschreibenden Programm (Abschnitt 10.3) werden gekrümmte, isoparametrische Elemente verwendet. Die Eigenheit dieser Elemente ist, daß bei ihnen für die geometrische Form des Elementes und für den Ansatz des Verschiebungsfeldes dieselbe Interpolationsformel verwendet wird. Während in Abschnitt 10.2 ein zweiparametrisches gekrümmtes, isoparametrisches Element (Toruselement)-der Allgemeinheit wegen-betrachtet wird, wird <sup>dann</sup> in Abschnitt 10.3 auf ein einparametrisches Rotationsschalenelement übergegangen.

### 10.2.1 Aufstellung der Variationsgleichung

Die Herleitung der finiten Gleichungen erfolgt mit Hilfe eines der beiden klassischen Variationsprinzipie (s. Literatur [Wunderlich], [Zienkiewicz], [Buck/u.a.]). Hier wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen gewählt, womit angezeigt wird, daß als finites Element ein "Verschiebungs-Modell" und kein "Gleichgewichts-Modell" gewählt wurde. Bei den Verschiebungsmodellen werden Ansätze für die Verschiebungen gemacht, wobei für die Verschiebungen die Kompatibilitätsforderungen an den Elementrändern mehr oder weniger erfüllt werden und das Gleichgewicht über ein Minimalprinzip befriedigt wird. Bei den Gleichgewichtsmodellen hingegen werden mit Ansätzen für die Spannungen das Gleichgewicht direkt und über das Prinzip der virtuellen Kräfte (Castigliano) die Kompatibilitätsanforderungen erfüllt. Der Vollständigkeit wegen seien weiterhin die "Gemischten Modelle" und die "Hybrid-Modelle" erwähnt. Bei ersteren werden Ansätze für die Spannungen und gleichzeitig für die Verschiebungen gemacht, bei letzteren werden Spannungsansätze im Feld und Verschiebungsansätze am Rand bzw. umgekehrt gemacht. Entsprechend den verwendeten Variationsprinzipien und der Tatsache, daß die Energie mit Ansätzen angenähert wird, sind die Modelle unterschiedlich steif (vgl. dazu Bild 10.2).

Die virtuelle Arbeit eines elastischen Strukturelementes genügt der Beziehung [Pflüger]

$$\delta^* A = \delta^* A_1 + \delta^* A_a \quad (10.1)$$

#### Fußnote

- 1) In einigen anderen Arbeiten heißt es infolge anderer Definition  $-\delta^* A_a$
- 2) Die virtuelle Verschiebung ist eine beliebige, mit den Zwangsbedingungen (Auflager etc.) verträgliche Verschiebung.
- 3) Von dem Begriff Arbeit spricht man so lange, wie ein Werkstoffgesetz nicht vorliegt.

Sie setzt sich also aus zwei Anteilen zusammen: der Arbeit der inneren und der Arbeit der äußeren Kräfte ( $\delta A_a$ ).

Sie ist vom Stoffgesetz unabhängig und besagt wie der allgemeine Arbeitssatz [Ruoff]: Die Arbeit der inneren Kräfte einer statisch zulässigen Kräftegruppe (1) längs einer geometrisch zulässigen Verschiebung (2) ist gleich der Arbeit der Volumenskräfte des Zustandes (1) entlang der Verschiebung (2) und der Arbeit der Randkräfte des Zustandes (2). Der Übergang dieser formalen Aussage zu einer physikalischen Aussage wird erst mit einer eindeutigen Beziehung zwischen den Zuständen (1) und (2) - wie dem Werkstoffgesetz - hergestellt.

Existiert ein konservatives System, so ist ein äußeres Potential vorhanden, und es gilt

$$\delta A_i = - \delta \Pi_a. \quad (10.2a)$$

Mit einem Werkstoffgesetz (Elastizitätsgesetz), das bei physikalisch linearer Elastizitätstheorie durch (Glg.(5.3))

$$\tau^{ij} = E^{ijkl} (\gamma_{kl} - \overset{\circ}{\delta}_{kl}) \quad \text{HOOKE Stoffgesetz}$$

dargestellt wird ( $\overset{\circ}{\delta}_{kl}$  = Anfangsverzerrungen), heißt es

$$\delta A_i = + \delta \Pi_i. \quad (10.2b)$$

Mit Einführung der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen (geometrische Feldgleichungen) der geometrisch linearen Theorie (Glg.(4.22b))

$$\delta_{kl} = \frac{1}{2} (u_{*|l} + u_{l|*}) \quad \text{CAUCHY - GREEN Verzerrungstensor}$$

erfolgt eine Beschränkung auf kleine Verschiebungen und der Stern (\*) kann fortgelassen werden. Die virtuelle Verschiebung  $\delta$  ist dann gleich der Variation  $\overset{*}{\delta}$  zu setzen. Aus Glg. (10.1) wird somit

$$\delta \Pi = \delta \Pi_i - \delta \Pi_a. \quad (10.3)$$

Dieser Ausdruck muß nach dem allgemein-geltenden Gesetz zur Erhaltung der Energie Null werden, weil die Arbeit der äußeren Kräfte auf den virtuellen Verschiebungswegen gleich der im Innern aufgespeicherten elastischen Energie ist, also

$$\delta \Pi = 0. \quad (10.4)$$

Glg. (10.4) besagt auch, daß im betrachteten Körper Gleichgewicht herrscht. Für Gleichgewicht muß  $\Pi$  ein Extremum, für stabiles Gleichgewicht ein Minimum sein. Mathematisch gesehen ist Glg. (10.4) die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für Gleichgewicht.

Mit dem Hookeschen Gesetz führt das Energieerhaltungsgesetz in Form der virtuellen Arbeiten zum "Satz vom Minimum der potentiellen Energie (Formänderungsenergie)". Andererseits führt vom "Prinzip der virtuellen Verschiebungen" eine Annahme darüber, wie sich die inneren und äußeren Kräfte während der virtuellen Verschiebung verändern zum "Prinzip vom stationären Wert der potentiellen Energie". Bei statischen Problemen ist der stationäre Wert das vorgenannte Minimum, bei Stabilitätsproblemen kann es auch ein Maximum sein ( $\delta^2 \Pi \geq 0$ ).

Ein elastischer Körper erfährt diejenige Formänderung, für die sein elastisches Potential ein Minimum hat!

Das innere Potential eines realen Spannungsfeldes lautet bei Aufbringung sehr kleiner virtueller Verschiebungen, die mit den geometrischen Zwangsbedingungen verträglich sein müssen

$$\delta \Pi_i = \int_V \tau^{ij} \delta \gamma_{ij} dV, \quad (10.5a)$$

und das äußere Potential

$$\delta \Pi_a = \int_V p^i \delta u_i dV + \int_\sigma s^i \delta u_i d\sigma. \quad (10.5b)$$

Die Beziehung (10.5a) stellt die virtuelle Arbeit der wirklichen inneren Kräfte längs der virtuellen inneren Verzerrung dar. In (10.5b) beinhaltet der erste Ausdruck die virtuelle Arbeit der wirklichen Volumenskräfte längs der virtuellen Verschiebungen im Innern ~~und~~, der zweite die virtuelle Arbeit der wirklichen Oberflächenkräfte längs der virtuellen Oberflächenverschiebungen.

Nach Einsetzen der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen heißt Glg. (10.3)

$$\delta \Pi = \int_V \left[ \tau^{ij} \frac{1}{2} (\delta u_{i|j} + \delta u_{j|i}) - p^i \delta u_i \right] dV - \int_\sigma s^i \delta u_i d\sigma. \quad (10.6a)$$

Die vorstehende Gleichung kann mit Hilfe des Gaußschen Integral-satzes umgeformt werden ( $n_n$  sind die Komponenten des normalen Einheitsvektors auf der Oberfläche  $\sigma$ )

$$\int_V \tau^{mn} \delta u_{m|n} dV = \int_\sigma \tau^{mn} \delta u_m n_n d\sigma - \int_V \tau^{mn|n} \delta u_m dV, \quad (10.7)$$

so daß

$$\delta \Pi = \int_V \left[ -\frac{1}{2} \tau^{ij}|_j \delta u_i - \frac{1}{2} \tau^{ij}|_i \delta u_j - p^i \delta u_i \right] dV + \int_\sigma \left[ \frac{1}{2} \tau^{ij} n_j \delta u_i + \frac{1}{2} \tau^{ij} n_i \delta u_j - s^i \delta u_i \right] d\sigma \quad \text{wird.} \quad (10.6b)$$

Durch Umbenennung des Summationsindizes und unter Ausnutzung der

Symmetrie des Spannungstensors erhält man schließlich

$$\delta \Pi = - \int_V [\tau^{ij}{}_{,j} + p^i] \delta u_i dV + \int_\sigma [\tau^{ij} n_j - s^i] \delta u_i d\sigma. \quad (10.8)$$

Darin stellen die eckigen Klammern die sog. Eulergleichungen des Variationsproblems dar, die erste Klammer beinhaltet die Gleichgewichtsbedingungen  $\tau^{ij}{}_{,j} + p^i = 0^1$  und die zweite die Spannungsrandbedingungen  $\tau^{ij} n_j - s^i = 0$  auf der Oberfläche.

In (10.8) ist eine Identität zu erkennen: Die Lösung der Gleichgewichtsdifferentialgleichungen unter Einhaltung der Spannungsrandbedingungen ist der Lösung des Variationsproblems gleichwertig, wenn das Werkstoffgesetz  $\tau^{ij} = E^{ijkl} \gamma_{kl}$ , die geom. Feldgleichungen  $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  und mit den Zwangsbedingungen-verträgliche Verschiebungsvariationen  $\delta u_i$  vorliegen, und es weiter

$$\Pi = + \int_V [\frac{1}{2} E^{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} - p^i u_i] dV - \int_\sigma s^i u_i d\sigma = \text{Min} \quad (10.9)$$

heißt (Kontrolle über Glg. (10.7)).

Bei dem betrachteten numerischen Verfahren werden Näherungsansätze für die Verschiebungen  $u_i$  gemacht. Damit wird die Bedingung  $\Pi = \text{Min}$  nur angenähert erfüllt, indem die angenäherte potentielle Energie  $\tilde{\Pi}$  in Abhängigkeit der Freiwerte  $\alpha_i$  der Verschiebungsansätze zum Minimum gemacht wird

$$\tilde{\Pi} = \text{Min.}$$

Das ist aber gleichbedeutend mit

$$\delta \tilde{\Pi} = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \alpha_i} = 0. \quad (10.10a)$$

> Nach diesen etwas ausführlichen Darstellungen kann die Anwendung <sup>in Richtung</sup> auf ein finites Schalen-Element erfolgen. Dazu wählen wir zweckmäßigerweise die Glg. (10.6)

$$\delta \tilde{\Pi} = \int_V \tau^{ij} \delta \gamma_{ij} dV - \int_V p^i \delta u_i dV - \int_\sigma s^i \delta u_i d\sigma = 0 \quad (10.10b)$$

und setzen unter Berücksichtigung von Anfangsverzerrungen das Elastizitätsgesetz  $\tau^{ij} = E^{ijkl} (\gamma_{kl} - \overset{\circ}{\gamma}_{kl})$  in (10.10b) ein.

Das ergibt in Matrixschreibweise für das einzelne Element (s. [Zienkiewicz]:  $E^{ijkl} \rightarrow D$ ,  $\tau^{ij} \rightarrow \sigma$ ,  $\gamma_{ij} \rightarrow \epsilon$ ), das durch den Index  $e$  gekennzeichnet wird

$$\delta \tilde{\Pi} = \int_V \delta \{\epsilon\}^{eT} \{\sigma\} dV - \int_V \delta \{f\}^{eT} \{p\} dV - \int_\sigma \delta \{s\}^{eT} \{s\} d\sigma = 0. \quad (10.10c)$$

1) Bei kartesischem KOS ist die kovariante Ableitung  $/i$  gleich der partiellen Ableitung,  $i = \frac{\partial}{\partial x^i}$



kartesischen System mit geraden Linien oder mit Parabeln 2. bis 3. Ordnung begrenzt sein. Die unbestimmten Koeffizienten  $\alpha_i$  werden aus der Abbildung der zwölf Knotenpunkte im Einheitsquadrat bestimmt (vgl. Bild 10.3)

$$\begin{aligned} r_{(1)} &= [P_1]^T \{\alpha\} & \text{für } \zeta = -1, \eta = -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{(5)} &= [P_5]^T \{\alpha\} & \text{für } \zeta = -\frac{1}{3}, \eta = -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{(12)} &= [P_{12}]^T \{\alpha\} & \text{für } \zeta = -1, \eta = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Das ergibt ein Gleichungssystem

$$\{r\}^e = [C] \{\alpha\},$$

dessen Inverse die gesuchte Matrix  $\{\alpha\}$  ist

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{r\}^e.$$

Als Transformationsbeziehung gilt für das betrachtete Element

$$\{r\} = [P]^T [C]^{-1} \{r\}^e = [N']^T \{r\}^e \quad (10.11b)$$

Für das Verschiebungsfeld  $u$  kann ebenso angesetzt werden (bei isopar. Elementen)

$$\{u\} = [N']^T \{u\}^e$$

und für das zweidimensionale Feld (vgl. [Zienkiewicz])

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [N']^T \{u\}^e \\ [N']^T \{w\}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & N_2' & 0 & \dots \\ 0 & N_1' & 0 & N_2' & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e. \quad (10.12)$$

In Glg. (10.10) müssen die dem Problem zugehörigen geometrischen Feldgleichungen  $\{\varepsilon\}$  eingesetzt werden, die durch Anwendung des Differentialoperators  $D\sigma$  auf Glg. (10.12) gewonnen werden (Anwendung in Abschnitt 10.3).

$$\{\varepsilon\} = [D\sigma] \{f\} = [D\sigma] [N] \{\delta\}^e = [B] \{\delta\}^e \quad (10.13)$$

mit der sogenannten Verzerrungsgrößenfunktionsmatrix  $[B]$ .

Für die Integration von (10.10) im Einheitsquadrat benötigt man die partiellen Ableitungen der Gestaltfunktion  $\{f\}$  nach  $r$  und  $z$ . Entsprechend der partiellen Differentiationsregel gilt mit

$$\frac{\partial N_i}{\partial j} = \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial j} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial j}$$

zum Beispiel der Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} . \quad (10.14)$$

Darin ist  $[J]$  die sogenannte Jakobi - Matrix, die bei isoparametrischen Elementen explizit in Ausdrücken der lokalen Koordinaten gefunden werden kann. Mit Hilfe von Glg. (10.12) wird nämlich

$$[J] = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1'}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_{12}'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1'}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_{12}'}{\partial \eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 & z_1 \\ r_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ r_{12} & z_{12} \end{pmatrix} . \quad (10.15)$$

Um die globalen Ableitungen zu gewinnen, wird  $[J]$  invertiert, so daß die rechte Seite des folgenden Ausdrucks bekannt ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} . \quad (10.16)$$

An die Stelle des Flächenelementes  $drdz$  tritt

$$dr dz = [J] d\xi d\eta ,$$

so daß in einem Element jeweils ein Integral der Form

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G(\xi, \eta)]^e d\xi d\eta \quad (10.17)$$

numerisch zu integrieren verbleibt,

Nach Anwendung der Transpositionsregel  $([A] \cdot [B])^T = [B]^T \cdot [A]^T$  können  $\{\epsilon\}^T = \{\delta\}^T [B]^T$  und  $\{f\}^T = \{\delta\}^T [N]^T$  in Glg. (10.10c) eingesetzt werden

$$\delta \tilde{\pi} = \int_V \{\delta\}^T [B]^T \{\epsilon\} dV - \int_V \{\delta\}^T [N]^T \{p\} dV - \int_{\sigma} \{\delta\}^T \{s\} d\sigma = 0$$

bzw.

$$\delta \tilde{\pi} = \{\delta\}^T \left\{ \int_V [B]^T \{\epsilon\} dV - \int_V [N]^T \{p\} dV - \int_{\sigma} \{s\} d\sigma \right\} = 0 . \quad (10.10d)$$

Die Minimierung fordert  $\delta \tilde{\pi} = 0$ , das bedeutet, die geschweifte Klammer muß Null werden

$$\int_V [B]^T \{\epsilon\} dV - \int_V [N]^T \{p\} dV - \int_{\sigma} \{s\} d\sigma = 0 .$$

Weiterhin ist für ein Ringelement  $dV = 2\pi r dz ds$  und  $d\sigma = 2\pi r ds$  einzusetzen, so daß aus der vorstehenden Gleichung

$$2\pi \left[ \int_A [B]^T \{\epsilon(z)\} r(z) dz ds - \int_A [N]^T \{p\} r(z) dz ds - \int_\Omega \{s\} r(z) dz \right] = 0$$

wird. Die Durchführung der Integration liefert für kleine Wanddicken die Beziehung

$$\int_A [B]^T \{\epsilon(z)\} r(z) dz ds - \int_\Omega [N]^T \{p\} r(z) dz ds - \int_\Omega \{s\} r(z) dz = 0,$$

wobei der erste Ausdruck erst nach Kenntnis von  $\epsilon(z)$  integriert werden kann.

Die Glg. (10.10c) heißt ausführlich nach Anschreiben der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung (Zienkiewicz verwendet den Buchstaben D für die Elastizitätsmatrix)

$$\{\epsilon(z)\} = [D] \{\epsilon(z)\} = [D][B] \{\delta\}^e, \quad (10.18)$$

$$\int_A \int [B]^T [D] [B] \{\delta\}^e r(z) dz ds - \int_\Omega [B]^T [D] \{\epsilon\} r(z) dz ds - \int_\Omega [N]^T \{p\} r(z) dz ds - \int_\Omega \{s\} r(z) dz = 0. \quad (10.18a)$$

Da für den Vektor  $\{\epsilon\}$  analog zu Glg. (10.13)  $[B] \{\delta\}^e$  geschrieben werden kann, lautet Glg. (10.18) abgekürzt

$$[K]^e \{\delta\}^e + \{F\}_{\epsilon_0}^e + \{F\}_p^e - \{F\}^e = 0. \quad (10.19b)$$

In dieser Beziehung stellen  $[K]^e = \int_A \int [B]^T [D] [B] r dz ds$  die Steifigkeitsmatrix,  $\{F\}_{\epsilon_0}^e, \{F\}_p^e, \{F\}^e$  die Knotenkräfte zu den Anfangsverzerrungen, den verteilten inneren Belastungen und den äußeren Lasten des einzelnen Elementes dar.

### 10.2.3 Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems

Der Übergang zum gesamten Ersatzmodell gelingt durch Einfügen der Knotengleichungen jedes Elementes in das Gesamtgleichungssystem des Ersatzmodells (Dieses kann recht übersichtlich am Beispiel eines einfachen Dreiknotenelementes gezeigt werden, das pro Element nur  $3 \times 2$  Knotengleichungen hat und bei einer rotierenden, ebenen, anisotropen Scheibe angewendet werden kann (Bilder 10.4 bis 10.6))

$$\{F\} = [K] \{\delta\} + \{F\}_{\epsilon_0} + \{F\}_p \quad (10.20)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrizen werden dabei in die bandstrukturierte Gesamtsteifigkeitsmatrix additiv eingebaut, die Element-Kräfte auf der rechten Seite (Bild 10.6 und Flußdiagramm in Bild 10.7).

Das unbekannte Verschiebungsfeld  $\{\delta\}$  kann dann nach Einarbeitung der Randbedingungen mit einem Gleichungslösungsverfahren aus dem reduzierten Gleichungssystem

$$\{F\} = [K_r] \{\delta_r\} \quad (10.21)$$

gewonnen werden.



Bei bekanntem globalem Verschiebungsfeld lassen sich die Elementspannungen leicht mit Glg. (10.18) aus den lokalen Verschiebungen ermitteln.

### 10.3 Anwendung auf eine mehrschichtige, dünne Faserverbundschale

Alle Herleitungen vor diesem Abschnitt waren etwas allgemeiner gehalten und betrafen ein Toruselement, das auch als dickwandiges Schalenelement Anwendung findet. Bis hierher ist also eine allgemeine Querschnittsverformung inklusiv Schub möglich.

Beim Übergang auf eine mehrschichtige, dünne Faserverbundschale werden die Voraussetzungen der technischen Schalentheorie (S. 4-40) gemacht. Aufgrund der Normalhypothese braucht dann nur noch mit einem einparametrischen (in Richtung des Meridians), finiten Element gearbeitet zu werden, bei dem das Verschiebungsfeld  $\{\delta\}$  von den Knotenverschiebungen und -verdrehungen abhängt. Die Verschiebungen  $\bar{u}$  und  $\bar{w}$  des Bildes 10.8 hängen also allein von  $\delta$  ab.

Bei Verwendung eines Polynomes 3ten Grades definieren die Koordinaten  $r$  und  $z$  die Schalenmittelfläche durch folgende Zusammenhänge (vgl. Glg. (10.11a))

$$\begin{aligned} r &= [1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3]^T \{\alpha\} \\ z &= [1 \quad \eta \quad \eta^2 \quad \eta^3]^T \{\alpha\} \end{aligned} \quad (10.22)$$

Die freien Koeffizienten werden über die Verschiebungen und die Neigungen an den Knotenpunkten ① und ② bestimmt. Thiem erhält

$$r = \sum_1^2 (N_i' r_i + N_i'' (\frac{dr}{d\xi})_i)$$

mit

$$N_i' = \frac{1}{4}(-\xi_0^2 + 3\xi_0 + 2), \quad N_i'' = \frac{-1}{4}\xi_0(1+\xi_0)^2(1-\xi_0), \quad \xi_0 = \xi_i \}$$

(z.B.:  $\xi_1 = -1 \rightsquigarrow \xi_0 = -\xi$ ,  $N_1' = \frac{1}{4}(+\xi^3 - 3\xi + 2)$ ,  $N_1'' = \frac{-1}{4}(1-\xi)^2(1+\xi)$ )

und

$$z = \sum_1^2 (N_i' z_i + N_i'' (\frac{dz}{d\eta})_i)$$

Für die globalen Verschiebungen ist dann einfach

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^2 (N_i' z_i + N_i'' (\frac{dz}{d\eta})_i), \quad w \text{ entsprechend} \quad (10.23a)$$

oder

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} N_1' & N_1'' & N_2' & N_2'' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1' & N_1'' & N_2' & N_2'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}^e \quad (10.23b)$$

zu setzen.

Die globalen Verformungsgrößen müssen noch in lokale überführt werden. Es gilt z.B. für die Verformungsgrößen am Punkt  $i$

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ du_i/d\bar{\gamma} \\ dw_i/d\bar{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\bar{\Phi}_i & \cos\bar{\Phi}_i & 0 & 0 \\ \cos\bar{\Phi}_i & -\sin\bar{\Phi}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ d\bar{u}_i/d\bar{\gamma} \\ d\bar{w}_i/d\bar{\gamma} \end{Bmatrix} = [T_i] \{\bar{\delta}_i\}$$

oder nach Umordnung in u- und w-Blöcke

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ du_1/d\bar{\gamma} \\ u_2 \\ du_2/d\bar{\gamma} \\ w_1 \\ dw_1/d\bar{\gamma} \\ w_2 \\ dw_2/d\bar{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\bar{\Phi}_1 & 0 & 0 & 0 & \cos\bar{\Phi}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\bar{\Phi}_2 & 0 & 0 & 0 & \cos\bar{\Phi}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\bar{\Phi}_1 & 0 & 0 & 0 & -\sin\bar{\Phi}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\bar{\Phi}_2 & 0 & 0 & 0 & -\sin\bar{\Phi}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ d\bar{u}_1/d\bar{\gamma} \\ \bar{u}_2 \\ d\bar{u}_2/d\bar{\gamma} \\ \bar{w}_1 \\ d\bar{w}_1/d\bar{\gamma} \\ \bar{w}_2 \\ d\bar{w}_2/d\bar{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (10.24a)$$

bzw.

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \quad (10.24b)$$

Mit der Substitution der Variablen  $\bar{\gamma}$  durch  $s$  (vgl. Glg. (4.109)) in der Form (s. [Zienkiewicz], S. 250)

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{\gamma}} = \frac{d\bar{u}}{d\bar{\gamma}} \frac{d\bar{\gamma}}{ds} \quad , \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{\gamma}} = \frac{d\bar{w}}{d\bar{\gamma}} \frac{d\bar{\gamma}}{ds}$$

und

$$ds^2 = dr^2 + dz^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{ds}{d\bar{\gamma}} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\bar{\gamma}}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\bar{\gamma}}\right)^2}$$

wobei bei Schalen mit kleinen Krümmungsänderungen

$$\frac{dr}{d\bar{\gamma}} \approx \frac{\Delta r}{\Delta \bar{\gamma}} = \frac{r_2 - r_1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{d\bar{\gamma}} \approx \frac{\Delta z}{\Delta \bar{\gamma}} = \frac{z_2 - z_1}{2}$$

gesetzt werden kann, erhalten wir den Verschiebungsvektor

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [N(s)] \{\delta\}^e \quad \left( \{\delta\}^e \neq \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}, \text{ da andere Anordnung} \right) \quad (10.25)$$

in Abhängigkeit von der Schalenkoordinate  $s$ . Darin ist

$$\{\delta\}^e = [\bar{u}_1, \frac{d\bar{u}_1}{ds}, u_2, \frac{d\bar{u}_2}{ds}, \bar{w}_1, \frac{d\bar{w}_1}{ds}, w_2, \frac{d\bar{w}_2}{ds}]^T \quad (10.26)$$

Mit (10.25) ist über die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung (s. Bild 10.7, vgl. [Navaratna] u.a. ; das KOS in den Glgn. (4.131a) ist anders)

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \hat{\epsilon} \\ -\hat{\chi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ -\chi_s \\ -\chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du/ds - w d\bar{\Phi}/ds \\ \frac{u}{r} \sin\bar{\Phi} + \frac{w}{r} \cos\bar{\Phi} \\ -\frac{d^2w}{ds^2} - \frac{du}{ds} \frac{d\bar{\Phi}}{ds} - u \frac{d^2\bar{\Phi}}{ds^2} \\ -\frac{1}{r} \sin\bar{\Phi} \frac{dw}{ds} - \frac{u}{r} \sin\bar{\Phi} \frac{d\bar{\Phi}}{ds} \end{Bmatrix} = [D\bar{O}] \{f\} = [B] \{\delta\} \quad (10.27)$$

der noch fehlende Vektor  $\{\epsilon\}$  in Glg. (10.19a) bekannt.

Entsprechend Abschnitt 4.7 wird die Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte getroffen. Damit kommen wir bei der rotationssymmetrischen Schale mit nichtsymmetrischem Schichtaufbau unter rotationssymmetrischer Belastung zu (die hier verwendeten  $\wedge$ -Zeichen sollen nur wieder die Verwendung von Laminatgrößen kennzeichnen, Glg. (5.44b))

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\varphi \\ M_s \\ M_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ \text{symm.} & & D_{11} & D_{12} \\ & & & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\epsilon}_s \\ \hat{\epsilon}_\varphi \\ -\hat{\chi}_s \\ -\hat{\chi}_\varphi \end{Bmatrix} = [\tilde{K}] \begin{Bmatrix} \hat{\epsilon} \\ -\hat{\chi} \end{Bmatrix} = [K] \{\epsilon\} \quad (10.28)$$

Wenn man in Glg. (10.18), Index  $k$  später wieder weggelassen

$$\{\sigma\}_k = [Q]_k \left( \{\hat{\epsilon}\} + \frac{h_k - h_{k-1}}{2} \{-\hat{\chi}\} \right) \quad \text{bzw.} \quad \{\sigma(z)\} = [Q(z)] \left( \{\hat{\epsilon}\} + z \{-\hat{\chi}\} \right)$$

einsetzt, so erhält man nach Aufteilung in Mittelflächendehnungen  $\hat{\epsilon}$  und -Verdrehungen  $\hat{\chi}$

$$\int_{\Omega} \int_z [B]^T [Q] \begin{Bmatrix} \hat{\epsilon} \\ -\hat{\chi} \end{Bmatrix} r(s) dz ds - \int_{\Omega} \int_z [B]^T [Q] \begin{Bmatrix} \hat{\epsilon} \\ 0 \end{Bmatrix} r(s) dz ds + \{F\}_p^e = \{F\}^e.$$

und nach Durchführung der Integration

$$\int_{\Omega} [B]^T [K] \begin{Bmatrix} \hat{\epsilon} \\ -\hat{\chi} \end{Bmatrix} r(s) ds - \int_{\Omega} [B]^T [\hat{Q}] \begin{Bmatrix} \hat{\epsilon} \\ 0 \end{Bmatrix} r(s) ds - \{F\}_p^e = \{F\}^e. \quad (10.29)$$

Hierin ist noch Glg. (10.27a) einzusetzen

$$\begin{Bmatrix} \hat{\epsilon} \\ -\hat{\chi} \end{Bmatrix} = \{\epsilon\} = [B] \{s\}^e. \quad (10.27b)$$

In (10.29) sind die Belastungsvektoren  $\{F\}_p^e$  und  $\{F\}^e$  analog zu  $\{s\}^e$  aufgebaut und beinhalten nun auch Momente (vgl. [Zienkiewicz], S. 217).

Nach Durchführung der numerischen Rechnung erhalten wir die  $\{s\}^e$  und mit diesen wiederum die Dehnung in jeder Schicht eines Laminates

$$\{\epsilon\}_k = \{\hat{\epsilon}\} + h_k \{-\hat{\chi}\}.$$

Die Spannungen in der Schicht berechnet man schließlich aus Glg. (5.40)

$$\{\sigma\}_k = [Q]_k \{\epsilon\}_k$$

und Glg. (5.58)

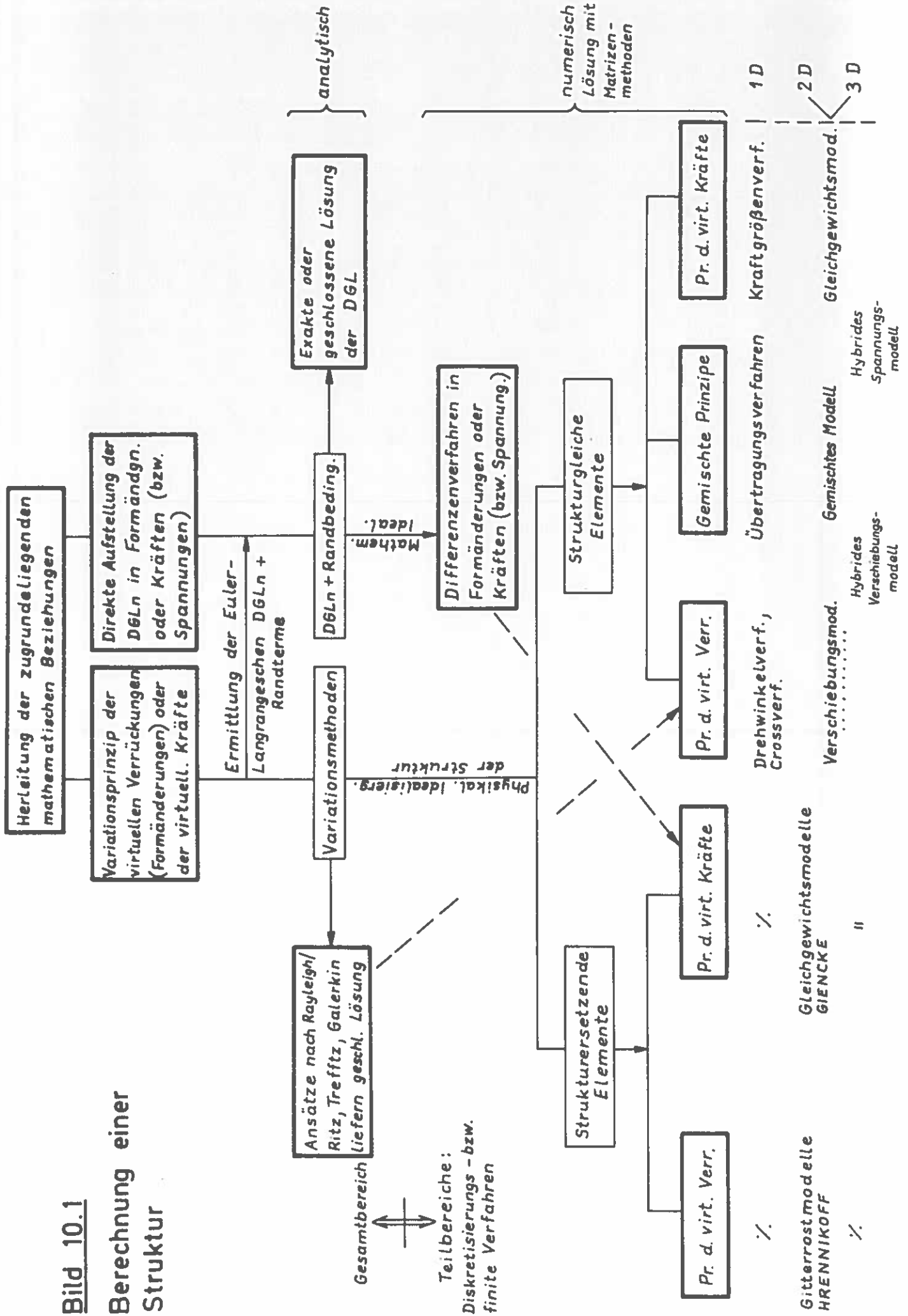
$$\{\sigma_{\alpha\beta}\}_k = [\tau_\sigma]_k^{-1} \{\sigma\}_k. \quad (10.28)$$

Bild 10.9 zeigt das vollständige Flußdiagramm zur Berechnung einer dünnen Rotationsschale aus mehrschichtigem Faserverbund. Das zugehörige Programm beinhaltet den Einbau eines neuen finiten Elementes in das Programm SAP IV.

\*) Zur Unterscheidung gegenüber der Steifigkeitsmatrix  $[K]$  ist die Elastizitätsmatrix  $[K]$  der Glg. (5.44b) mit einem Tilde-Zeichen versehen.

**Bild 10.1**

**Berechnung einer Struktur**



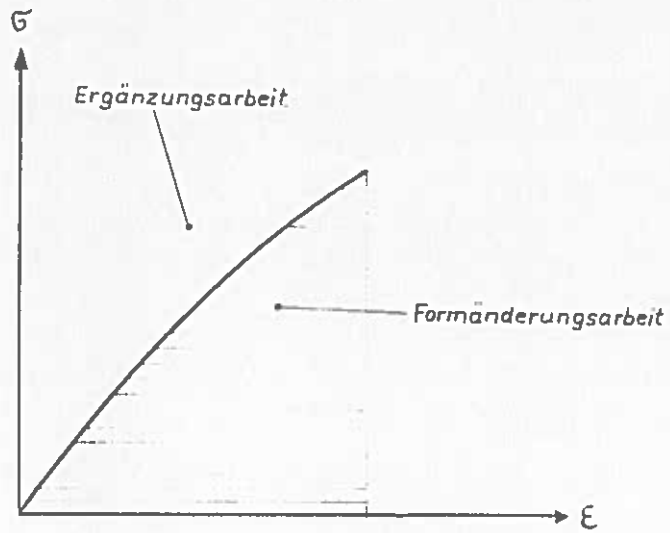


Bild 10.2 Formänderungsarbeit und Ergänzungsarbeit

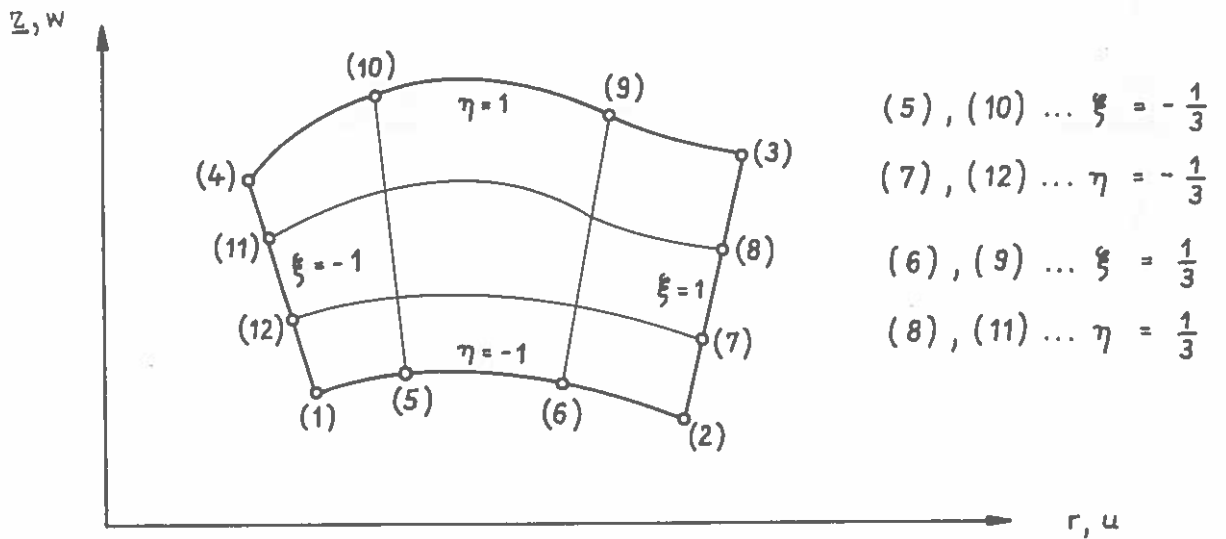
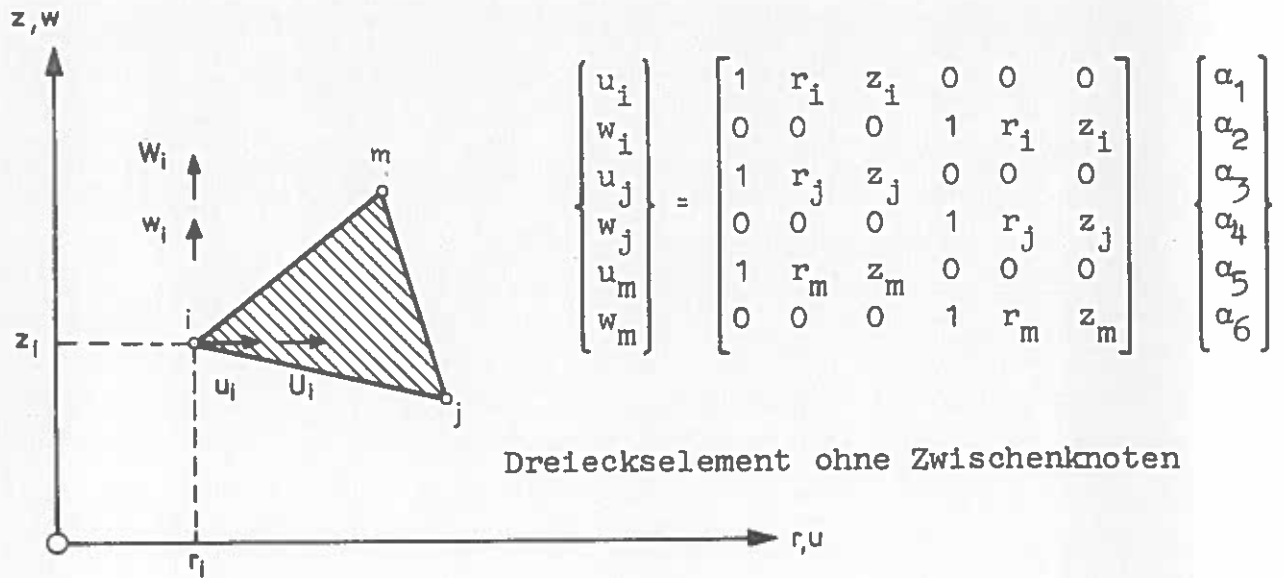


Bild 10.3 Ein zweidimensionales, isoparametrisches Element

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i, 0, b_j, 0, b_m, 0 \\ 0, c_i, 0, c_j, 0, c_m \\ a_i, b_i, c_i, b_j, c_j, b_m, c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_r \cdot \theta \\ \alpha_z \cdot \theta \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} q_{11}, q_{12}, 0 \\ q_{12}, q_{22}, 0 \\ 0, 0, q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i, 0, c_i \\ 0, c_i, b_i \\ b_j, 0, c_j \\ 0, c_j, b_j \\ b_m, 0, c_m \\ 0, c_m, b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^r \Omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i, 0, c_i \\ 0, c_i, b_i \\ b_j, 0, c_j \\ 0, c_j, b_j \\ b_m, 0, c_m \\ 0, c_m, b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc_i, 0 \\ 0, abc_i \\ abc_j, 0 \\ 0, abc_j \\ abc_m, 0 \\ 0, abc_m \end{bmatrix} \\
 & \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i, 0, c_i \\ 0, c_i, b_i \\ b_j, 0, c_j \\ 0, c_j, b_j \\ b_m, 0, c_m \\ 0, c_m, b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc_i, 0 \\ 0, abc_i \\ abc_j, 0 \\ 0, abc_j \\ abc_m, 0 \\ 0, abc_m \end{bmatrix} \\
 & [B]^T [D] [B] = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \quad [B]^T [D] \{ \epsilon_0 \} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \\
 & [B]^T [D] [B] = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \quad [B]^T [D] \{ \epsilon_0 \} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \\
 & [B]^T [D] [B] = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \quad [N]^T \{ P \} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{ F \}^e &= \iint_{\Delta} [B]^T [D] [B] \cdot t(r, z) dr dz + \{ \delta \}^e - \iint_{\Delta} [B]^T [D] \{ \epsilon_0 \} t(r, z) dr dz - \iint_{\Delta} [N]^T \{ P \} t(r, z) dr dz \\
 \{ F \}^e &= [K]^e \cdot \{ \delta \}^e + \{ F \}^e_{\epsilon_0} + \{ F \}^e_p
 \end{aligned}$$

Bild 10.4 Darstellung der Gleichgewichtsbeziehungen für ein sehr einfaches Dreieckselement einer rotierenden, anisotropen, ebenen Scheibe [Cuntze, 1970]



$$\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ u_j \\ w_j \\ u_m \\ w_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_m & z_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

$$N_i' = (a_i + b_i r + c_i z) / 2\Delta$$

$$a_i = r_j z_m - r_m z_j$$

$$b_i = z_j - z_m$$

$$c_i = r_m - r_j$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i' & 0 & N_j' & 0 & N_m' & 0 \\ 0 & N_i' & 0 & N_j' & 0 & N_m' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ u_j \\ w_j \\ u_m \\ w_m \end{Bmatrix}$$

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{vmatrix}$$

$$\{f\} = [N] \{\delta\}^e$$

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha_r \theta^e \\ \alpha_z \Theta^e \\ 0 \end{Bmatrix}$$

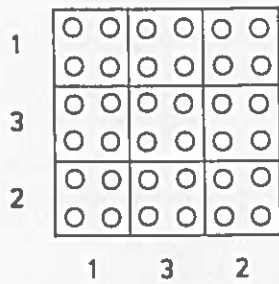
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ u_j \\ w_j \\ u_m \\ w_m \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \\ U_j \\ W_j \\ U_m \\ W_m \end{Bmatrix}$$

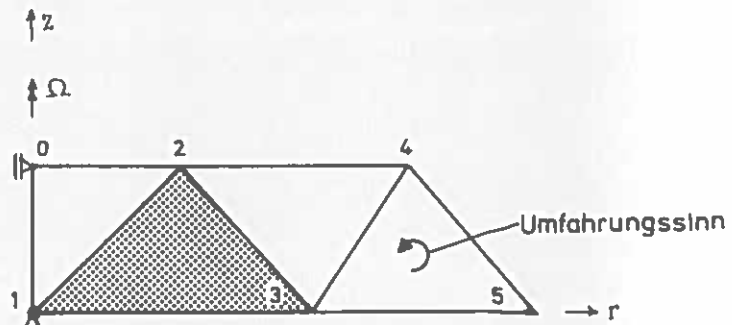
$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\}^e$$

Bild 10.5 Zusammenstellung der Ausgangsmatrizen beim einfachen Dreieckselement [Zienkiewicz]

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} \rho r \Omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Steifigkeitsmatrix  $[K]^e$   
des Elementes 1,3,2



Aufteilung der wirklichen Scheibe  
in das idealisierte Modell

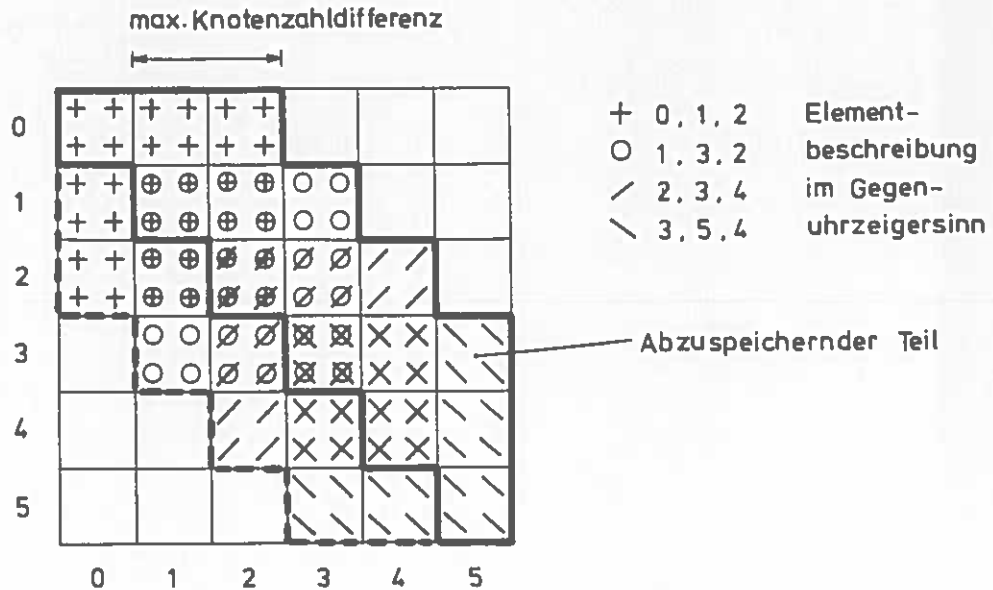


Bild 10.6 Einspeicherungs-schema der Element-Steifigkeitsmatrizen  $[K]^e$  in die Gesamt-Steifigkeitsmatrix  $[K]$  der Struktur

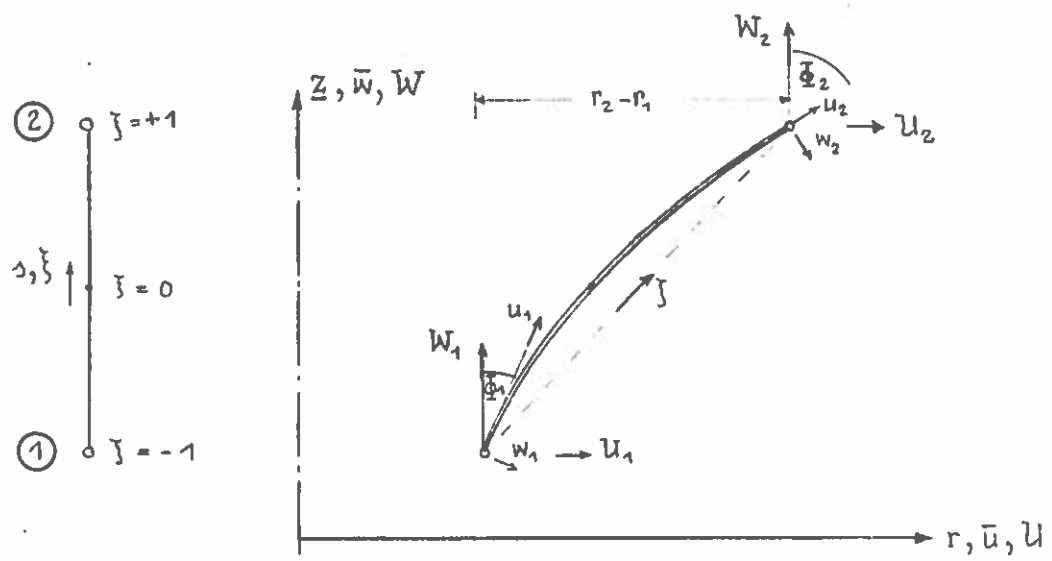


Bild 10.8 Geometrische Zusammenhänge bei einem einachsigen, isoparametrischen Schalelement



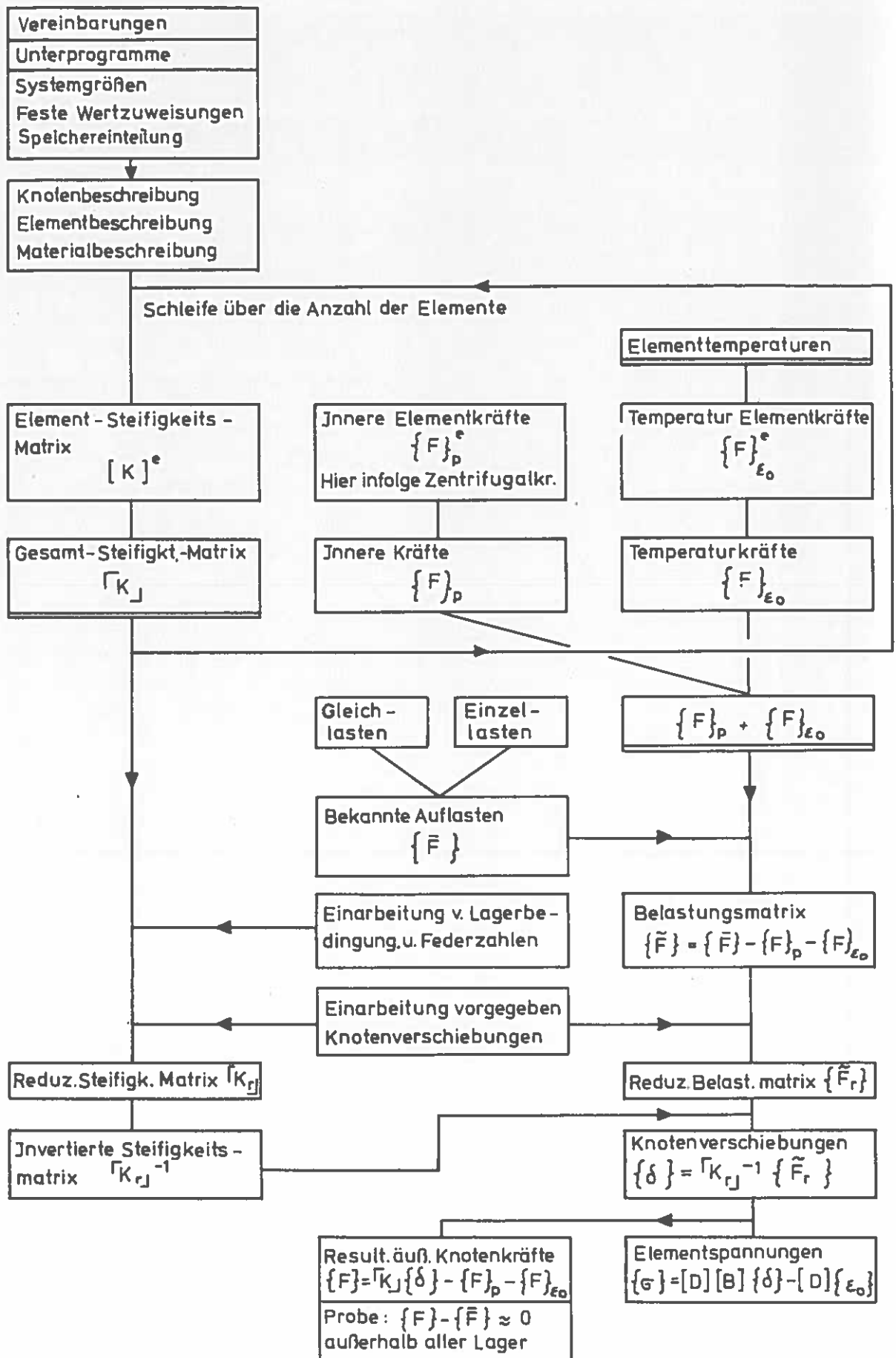
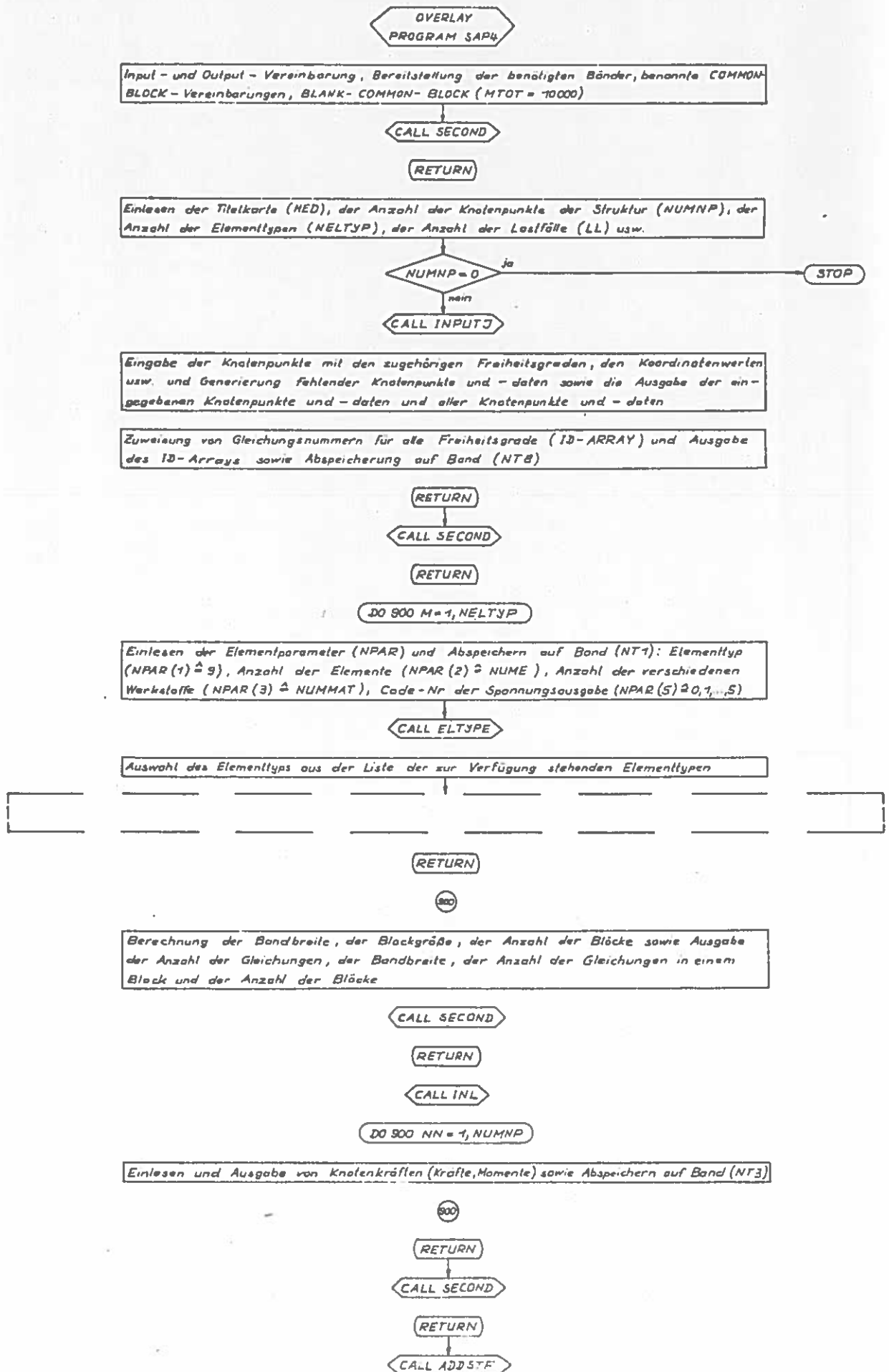


Bild 10.7 Allgemeines Flußdiagramm zur Berechnung einer Struktur

Bild 10.9 Flußdiagramm: Berechnung einer dünnen Rotationsschale aus mehrschichtigem Faserverbund [Thiem]



Einlesen und Ausgabe des Multiplikators für die Elementbelastung (STR), sowie Abspeichern auf Band (NT8)

Aufstellen der globalen Gleichungsgleichungen in Blöcken. Zusammenbau der Massenmatrix und Abspeichern auf Band (NT9), der Belastung mit den Elementlasten und Abspeichern auf Band (NT4), der Steifigkeitsmatrix und Abspeichern für Hilfszwecke auf Band (NT7)



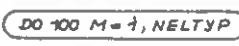
Lösung des globalen Gleichungssystems in Blöcken (Gauss-Jordan)



Lesen des ID-Arrays vom Band (NT8) und Ausgabe der Verschiebungen aller Lastfälle



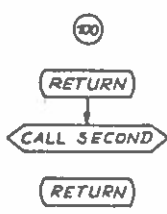
Lesen der Elementbelastung (STR) und der Verschiebungen in Blöcken vom Band (NT8, NT2)



Lesen der Elementparameter (NPAR) vom Band (NT1) und Setzen NPAR(1) = 0



Auswahl des Elementtyps aus der Liste der zur Verfügung stehenden Elementtypen

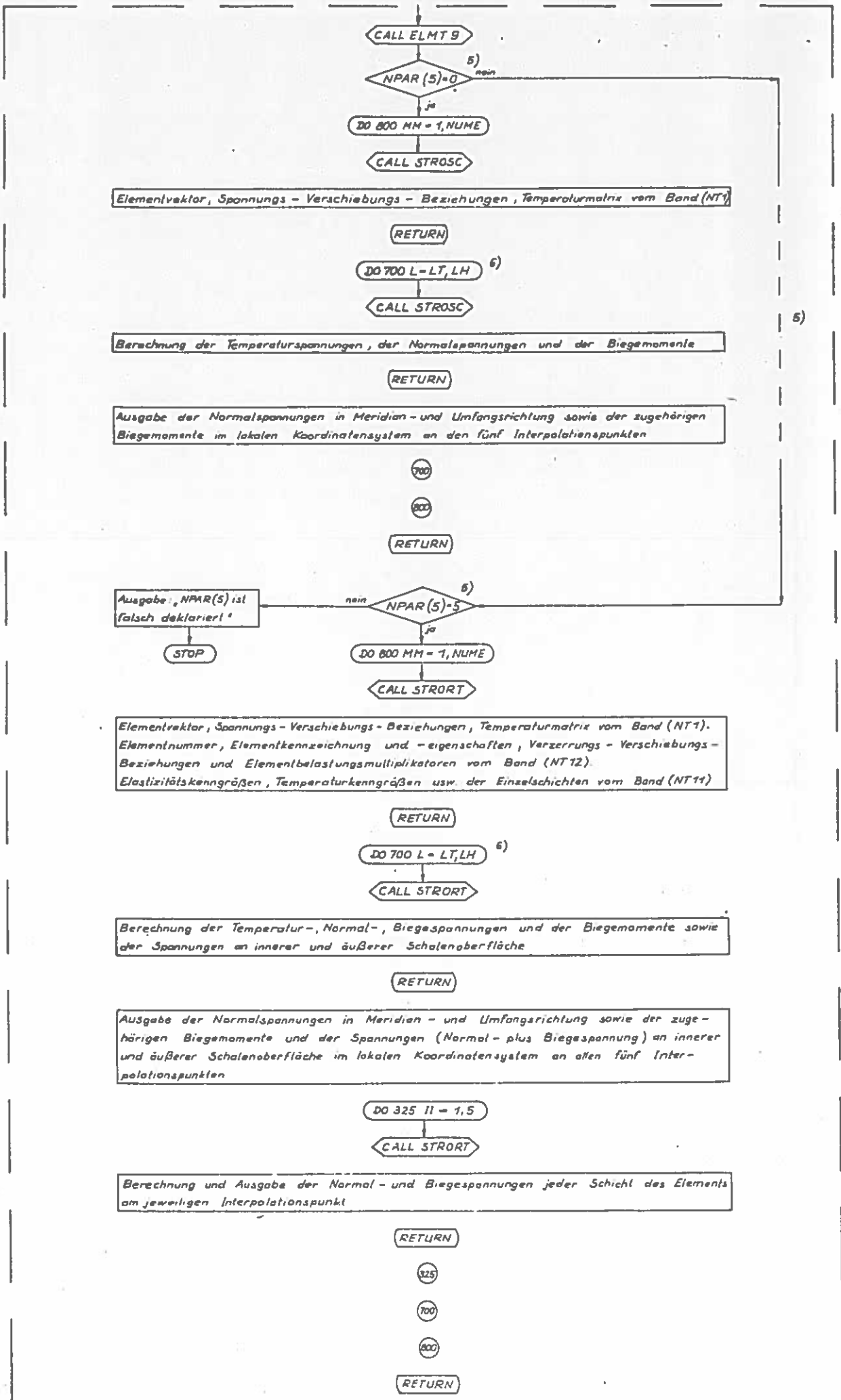


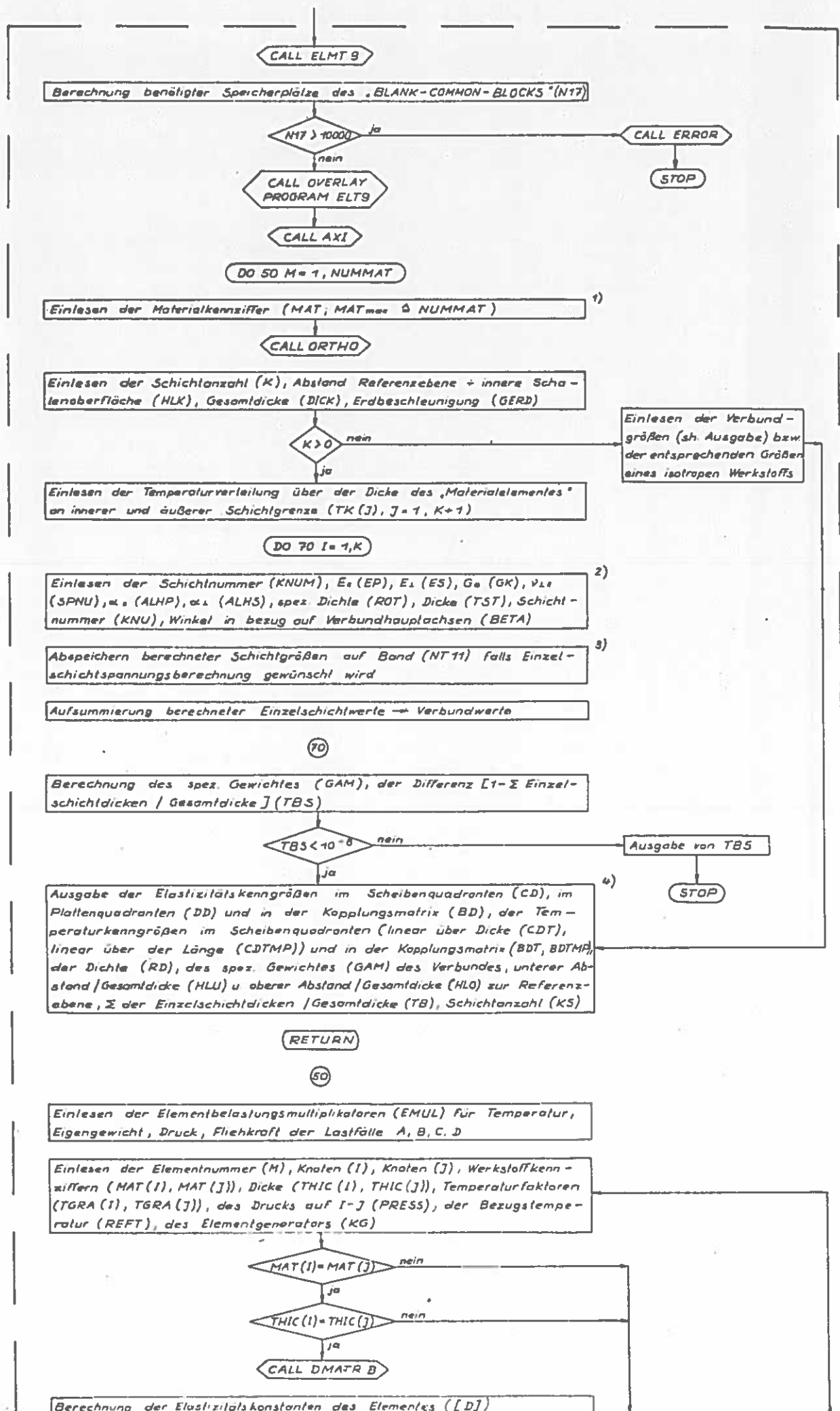
Ausgabe: Zeit zur Lösung der Gleichungen, Ausgabezeit der Verschiebungen, Zeit für den Erhalt der Spannungen

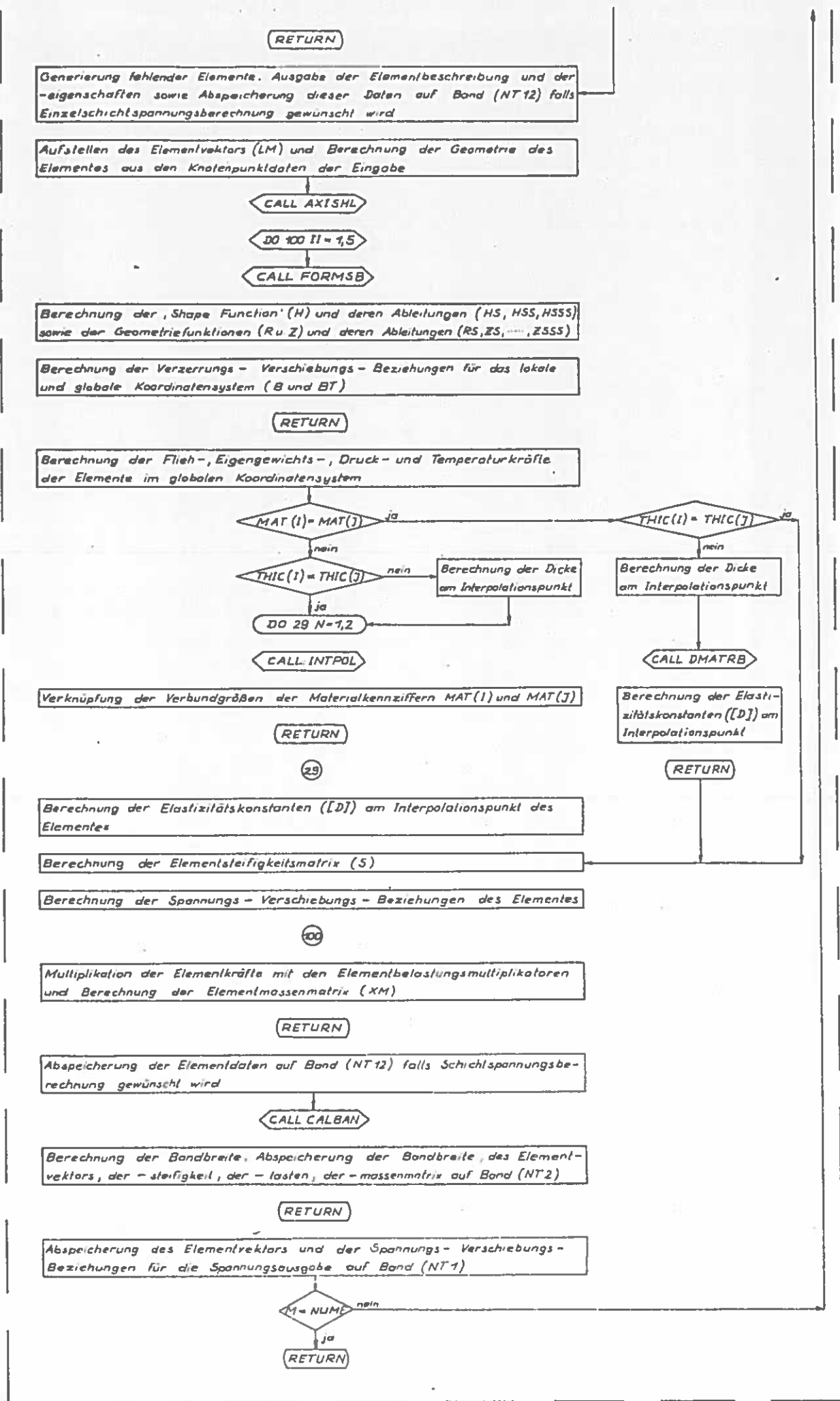


Ausgabe: Zeit für Eingabe der Knotenpunkte, Zeit für Elementsteifigkeitsberechnung, Zeit für Eingabe der Knotenkräfte, Zeit für Zusammenbau der Steifigkeitsmatrix für statische Lösung und Gesamtlösungszeit









## 11. Literaturverzeichnis zu den einzelnen Kapiteln

Bei der Aufstellung des Literaturverzeichnisses wurde eine Zuordnung nach Kapiteln getroffen. Literaturstellen, die bei Abschluß der Arbeit bekannt wurden, sind am Ende des Verzeichnisses zusammengefaßt worden. Ergänzend sei noch auf das Literaturverzeichnis von Dolfen hingewiesen.

### Kapitel 1:

AMBARTSUMYAN, S.A.: Theory of Anisotropic Plates. Progress in Materials Science Series, Vcl. II, Stamford: Technomic Publ., 1970

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (ASTM):

Metal Matrix Composites, STP 438 (1968);

Fiber Strengthened Metallic Composites, STP 427 (1967);

Applications of Composite Materials, STP 524 (1973);

Analysis of the Test Methods for High Modul Fiber and Composite, STP 521 (1973);

Fatigue of Composite Materials, STP 569 (1975);

Interfaces in Composites, STP 452 (1969);

Composite Materials: Testing and Design, STP 460, 1969, 582 p.;

STP 497, 1972, Second Conference; STP 546, 1974, 673 p., Third Conference

ASHTON, J.E., HALPIN, J.C., PETIT, P.H.: Primer on Composite Materials: Analysis. Stamford: Technomic Publ., 1969

ASHTON, J.E., WHITNEY, J.M.: Theory of Laminated Plates. Progress in Materials Science Series. Vol. IV, Stamford: Technomic Publ., 1970

BEYER, W., SCHAAB, H.: Glasfaserverstärkte Kunststoffe. Kunststoffverarbeitung 2. München: Carl Hanser, 1969, 4. Auflage

BROUTMAN, L.J., KROCK, R.H.: Modern Composite Materials. Reading: Addison-Wesley Publ. Comp., 1967

CALCOTE, L.R.: The Analysis of Laminated Composite Structures. Van Nostrand, New York, 1969, 222 p.

DIETZ, A.G.H.: Composite Engineering Laminates. Cambridge: The MIT Press, 1969, 329 p.

DOLFEN, E.: Bemessungsgrundlagen für tragende Bauelemente aus glasfaserverstärkten Kunststoffen. Frankfurt: Umschau Verlag, 1969

DOMININGHAUS, H.: Kunststoffe I. Aufbau und Eigenschaften - Kunststoffsorten - Anwendungen, Düsseldorf: VDI-Verlag, 1969

Fatigue of Composite Materials. ASTM, STP 569, 1975, 334 p.

Fiber Strengthened Metallic Composites. ASTM, STP 427, 1967

GILL, R.M.: Carbon Fibres in Composite Materials. London: Iliffe Books, 1972, 207 p.

Glasfaserverstärkte Kunststoffe. Lehrgangshandbuch des VDI-Bildungswerk, Teil 1 "Werkstoffe und Verfahren", Teil 2 "Anwendung und Konstruktion, 1972

HAFERKAMP, H.: Glasfaserverstärkte Kunststoffe. VDI-Taschenbuch T 17, VDI-Verlag, GmbH, Düsseldorf 1970

- HASHIN, Z.: Theory of Fiber Reinforced Materials. NASA CR-1974, by Univ. of Pennsylvania under Contract NAS 1 - 8818, 1972, 690 p.
- Interfaces in Composites. ASTM, STP 452, 1969
- LANGLEY, M.: Carbon Fibres in Engineering. London: Mc Graw Hill, 1973, 262 p.
- LEKHNITSKII, S.G.: Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. San Francisco: Holden Day Inc., 1963, 404 p.
- Metal Matrix Composites. ASTM, STP 438, 1968
- PARRATT, N.J.: Fibre-Reinforced Materials Technology. New York: Von Nostrand, 1971, 179 p
- Plastics for Aerospace Vehicles. Mil-Hdbk 17 A, Jan. 1971, Part. 1
- ROSATO, D.V., GROVE, C.S.: Filament Winding: Its Development, Manufacture, Applications and Design. New York: John Wiley and Sons, 1964, 360 p.
- SALHOFER, J.F., THOMASS, H.: Kunststoffverarbeitung. Würzburg: Vogel, 1967
- SCHREYER, G.: Konstruieren mit Kunststoffen. München: Carl Hanser, 1972, Teil 1 und 2
- SIEBEL, E.: Handbuch der Werkstoffprüfung. Berlin: Springer, 1955, 754 s.
- Testing Techniques for Filament Reinforced Plastics Symposium, September 1966. AFML TR 66-274, Wright Patterson Air Force Base Ohio, 1967, 860 p.
- TSAI, S.W., HALPIN, J.C., PAGANO, N.J.: Composite Materials Workshop. Stanford: Technomic Publ., 1968, 345 p.



## Kapitel 2:

- BEYER, W., SCHAAB, H.: Glasfaserverstärkte Kunststoffe. Kunststoffverarbeitung 2. München: Carl Hanser, 1969, 4. Auflage
- BÖDER, H.: Stand der Verwendung von Kohlenstofffasern. Kunststoffe 62 (1972), 293-296
- BROUTMAN, L.J., KROCK, R.H.: Modern Composite Materials: Reading: Addison-Wesley Publ. Comp., 1967
- BUHMANN, K.P., WINKLER, Th.: Kennwertbestimmung an GFK unter technischen und wirtschaftlichen Gesichtspunkten. Kunststoffe 63 (1973), H. 12, 9 S.
- BUNSELL, A.R., HARRIS, B.: Hybrid Carbon and Glass Fibre Composites. Composites (1974), pp. 157-164
- CHIAO, T.T., MOORE, R.L.: Organic-fibre/ Epoxides Composites. Composites, Jan. 1973
- DÄPPEN, W.: Untersuchungen an PRD 49-Fasern und -Laminaten. Mitteilung aus dem DFVIR-Institut für Flugzeugbau, Braunschweig-Flughafen
- DEAN, G.D., TURNER, P.: The Elastic Properties of Carbon Fibres and their Composites. Composites (1973), 174-180
- EHRENSTEIN, G.W.: Mechanische und thermische Eigenschaften von GFK. VDI Bildungswerk, BW 1587
- EHRENSTEIN, G.W., NEITZEL, M., SCHIK, J.P.: Probleme bei der Ermittlung von Kennwerten von GFK. Kunststoffe (1972), H. 12, 6 S.
- FENNINGER, H.: Moderne hochfeste Verstärkungsfasern, Teil I und II. VDI-Z. 113 (1971)
- GEIGER, J., FUELLER, J.: Whisker als Verstärkungskomponente von Verbundwerkstoffen, verfahrenstechnische Methoden zur Ausrichtung. Kunststoffe 7 (1972), H. 12
- GILL, R.M.: Carbon Fibres in Composite Materials. London: Iliffe Books, 1972, 207 p.
- HAFERKAMP, H.: Glasfaserverstärkte Kunststoffe. VDI-Taschenbuch T 17, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1970
- HEIMLICH, S.: Neue Verstärkungsfaser für Kunststoffe. Z.f. Werkstofftechnik/J. of Mat. Technology (1973), Nr. 6, S. 341
- HEISSLER, H.: Kohlenstofffaser-Kunststoff. Leichtbau der Verkehrsfahrzeuge 19 (1975), 30-31
- HOLTMANN, R., MENGES, G., V. HARNIER, A.: Neue Glasseidenfäden für hochfeste Polyester- und Epoxidharzlaminate. Kunststoffe 63 (1973), 839-844
- JAEGER, W.: Neuentwicklung von Endlos-Glasfaser Verstärkungsmaterial. Kunststoffe 63 (1973), S. 834 - 838
- KOCHENDÖRFER, R., JAHN, H.: Über Belastbarkeit, Technologie und Anwendung borfadenverstärkter Kunststoffe. Kunststoffe (1972), H. 12, 6 S.
- KREFT, H., WOLF, G., CUNTZE, R.: Investigation of Fibres and Composites. Applicable to the Design of High Pressure Vessels for Satellites. NT 10/72 under ESTEC Contract, No. 1485/71 AA, MAN-Neue Technologie, May 1972

- LARK, R.F.: Filament-Wound Composite Vessel Materials Technology NASA TM X - 68196, Lewis Research Center, Cleveland, 1973
- MECKELBURG, E.: Titan und seine Legierungen. Techn. Rundschau Nr. 36, S. 23 - 25
- MOORE, J.W., STURGEON, D.L.G.: High Modulus Organic Fibre Composites in Aircraft Applications. Composites, Jan. 1973
- NEITZEL, M. Verbundwerkstoffe im Druckbehälterbau. Fortschritt.-Ber. VDI-Z. Reihe 5, Nr. 8, 1969\*
- NIEDERSTADT, G., PABSCH, A.: Ein Beitrag zur Entwicklung von Druckbehältern aus faserverstärkten Kunststoffen. IB 152 - 73/1B, DFVLR, Institut für Flugzeugbau, Braunschweig, 1973
- NIEDERSTADT, G.: Temperaturbeständige Verbundwerkstoffe. 7. Lehrgang für Raumfahrttechnik, 1968
- NIXDORF, J.: Die Bedeutung von Whiskern und Fasern für die Herstellung faserverstärkter Werkstoffe.
- PARRATT, N.J.: Fibre-Reinforced Materials Technology. New York: Von Nostrand, 1971, 179 pp.
- RAUCH, H.W., SUTTON, W.H., MC GREIGHT, L.R.: Ceramic Fibers and Fibrous Composite Materials. London:Academic Press, 1968
- SCHÄUBLE, E. Fertigungsmittel aus Epoxidharzen. Techn. Rundschau Jan. 1975, S. 29-31
- SCHNEIDER, W.: Berechnung und Gestaltung hochbeanspruchbarer Bauteile aus glasfaserverstärktem Kunststoff. VDI-Z 115 (1973), 375-382
- SCHREYER, G., BAUER, P.: Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Kunststoffen im Zug-, Druck- und Biegeversuch. Kunststoffe 58 (1968), 98 - 100 Teil 1
- SIEGLING, H.F.; GALLERT, H.: Anwendungserprobung von Polyimidharz H 353. MBB-Bericht Nr. URV-78 (74), Messerschmidt-Bölkow-Blohm, München (1974), 50 Seiten
- SIMON, R.A.: Carbon Fiber Internal Pressure Vessels. NASA CR-121138, NOL, White Oak, 1973, 20 p.
- SIMON, R., AIFRING, R.: Properties of Graphite Fiber at Cryogenic Temperatures. NOL-United States Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland. NASA CR-72652, MAY 1970
- SOFFER, L.M., MOLHÖ, R.: Cryogenic Resins for Glass-Filament-Wound Composites. NASA CR-72114, by Aerojet under Contract NAS-3-6287, 1967
- STENZENBERGER, H.: Anwendung einer modifizierten und optimierten Polyimidmatrix unter Verwendung von hochfesten Fasern. Entwicklungsauftrag RVI 1-IA-3(3)/72, Technochemie, Dossenheim, Jan. 74
- STRATTON, W.K.: Evaluation of Dupont's High Modulus Organic Fibre PRD-49 Type I. The Boeing Company, SAMPE 71, S. 325-343
- TAPROGGE, R.: Faserverstärkte Verbundwerkstoffe-Entwicklungs- und Einsatzmöglichkeiten. Institut zur Erforschung technologischer Entwicklungslinien, Hamburg, Heft 2/1971
- THORNE, D.J.: Carbon Fibres with Large Breaking Strain. Nature Vol. 248 (1974), S. 754 - 756
- TRIGG, T.A.: The evaluation of carbon fibre for the filament-winding of rocket motor cases and pressure vessels. International Conference on Carbon Fibres, their Composites and Applications, London 1971, Paper No. 48 P.8

VETTER, J.: Vergleichende Zusammenstellung der Werkstoffeigenschaften für Linerwerkstoffe. AV/W 700064-EV-001, MAN-Neue Technologie München 1972, 6 Seiten

WRIGHT, O.C.: Development of a High Performance PRD-49-III Filament-Wound Chamber for Trident I (C4) Third Stage. AIAA/SAE 9th Propulsion Conf., AIAA Paper No. 73-12 59, 1973

Carboform. Technical Data Sheet. Fothergill and Harvey Ltd, Littleborough. 1971

Final Report for Phase 1 of a Study on the Use of Carbon Fibre Reinforced Plastics in Satellite Structures. HSDTP 7427, Hawker Siddeley Dynamics, Hatfield under ESTEC Contract No. 1735/72PP, Oct. 1973

Glasfaserverstärkte Kunststoffe. Lehrgangshandbuch des VDI-Bildungswerk, Teil 1 "Werkstoffe und Verfahren", Teil 2 "Anwendung und Konstruktion, 1972

PRD-49/Harz als Ersatz für GFK und Aluminium. WF-Informationen S. 75 - 81 u. 138 - 139/73, MBB - München

Technische Merkmale und Anwendungsmöglichkeiten für "Kevlar 49". Aramid (Aromatisches Polyamid). Organische Faser-Steifigkeit. Du Pont Bulletin Nr. 1 Genf, Sept. 1973

VETROTEX - Textilglas Broschüre. Gevetex Textilglas GmbH, Düsseldorf (1974)

### Kapitel 3:

- AINSWORTH, L.: The State of Filament Winding. Composites (1971), p. 14-28
- BAER, H., BRAUN, G.: Das rationelle Wickeln von einstöckigen Behältern und anderen Rotationskörpern mit anspruchsvollen Wickelprogrammen. Kunststoffe 197
- BEYER, W., SCHAAB, H.: Glasfaserverstärkte Kunststoffe. Kunststoffverarbeitung 2. München: Carl Hanser, 1969, 4. Auflage
- DOMININGHAUS, H.: Kunststoffe I. Aufbau und Eigenschaften - Kunststoffsorten - Anwendungen. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1969
- DUERKOP, J.: Herstellen von Behältern aus glasfaserverstärkten Reaktionsharzen. Kunststoffe 60 (1970), S. 228-236
- EHRENSTEIN, G.W.: Mechanische und thermische Eigenschaften von GFK. VDI Bildungswerk, BW 1587
- GRUENEWALD, R.: Roving-Wickeltechnik. Kunststoffe 55 (1965), S. 2-6
- HAFERKAMP, H.: Glasfaserverstärkte Kunststoffe. VDI-Taschenbuch T 17, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1970
- JONES, M.W.: Fabrication of Filament-wound CFRP components. International conference on Carbon Fibres, their Composites and Applications, London 1971, Paper No. 47 P.5
- JUBE, G.: Probleme der Herstellung von Strukturen nach den Wickelverfahren. Luftfahrttechnik-Raumfahrttechnik 12 (1966), 2-10
- JUBE, G.: Filament Winding Without Mandrel. 18th Nat. SAMPE Symp. and Exhib., Vol. 18, 1973, 571-575
- KLEINER, W.: Die Glasfaserwickeltechnik - Fertigungsverfahren für hochbeanspruchte Bauteile.
- KLEINHOLZ, R.: Verarbeitungstechnische Untersuchungen zum Faser - Harz - Spritzverfahren. Kunststoffe 62 (1972), H. 12, 7 S.
- MENGES, G., KELENTER, M., KLEINHOLZ, R.: Mit Schaumglasgranulat gefüllte modellierfähige UP-Pasten zur Herstellung von Stützkerne für Sandwichkonstruktionen. Kunststoffe 60 (1970), S. 1079-1086
- NEITZEL, M.: Verbundwerkstoffe im Druckbehälterbau. Fortschritt.-Ber. VDI-Z. Reihe 5, Nr. 8, 1969
- PARRATT, N.J.: Fibre-Reinforced Materials Technology. New York: Van Nostrand, 1971, 179 pp.
- PATTERSON, W.W.: Filament Winding Design Consideration for High Pressure Gas Containers. Filament Winding Symposium 1961,
- ROSATO, D.V., GROVE, C.S.: Filament Winding: Its Development, Manufacture, Applications and Design. New York: John Wiley and Sons, 1964, 360 p.
- SALHOFER, J.F., THOMASS, H.: Kunststoffverarbeitung. Würzburg: Vogel, 1967
- SCHÄUBLE, E.: Fertigungsmittel aus Epoxidharzen. Techn. Rundschau Jan. 1975, S. 29-31
- SCHMIDT, K.A.F.: Textilglaserzeugnisse und ihre Auswahl für die Kunststoff-Verstärkung. VDI-Bildungswerk, BW 1076, 11 S.
- Herstellen von Werkstücken aus GFK. VDI-Richtlinie 2011, 1967
- WRIGHT, O.C.: Development of a High Performance PRD-49-III Filament - Wound Chamber for Trident I (C4) Third Stage. AIAA/SAE 9th Propulsion Conf., AIAA Paper No. 73-12 59, 1973, 17 p.

#### Kapitel 4:

- ABRAMS, J.I., SCHEYHING, E.R.: Thin Laminates with Homogeneous Elastic Properties. J. Eng. Mech. Div. (1970), 847-866
- ARGYRIS, J.H.: Three-Dimensional Anisotropic and Inhomogeneous Elastic Media Matrix Analysis for Small and Large Displacements. Ing.-Archiv 34 (1965), S. 33 - 55
- AMBARTSUMYAN, S.A.: Theory of Anisotropic Plates. Progress in Materials Science Series, Vol. II. Stamford: Technomic Publ., 1970
- BRUNELLE, E.J.: The Statics and Dynamics of a Transversely Isotropic Timoshko Beam. J. Composite Materials 4 (1970), 404-416
- CALCOTE, L.R.: The Analysis of Laminated Composite Structures. Van Nostrand, New York, 1969, 222 p.
- CHAMIS, C.C.: Computer Code for the Analysis of Multilayered Fiber Composites - Users Manual. NASA TND-7013, 1971, 116 p.
- COOK, R.D.: Two Hybrid Elements for Analysis of Thick, Thin and Sandwich Plates. Int. J. for Numerical Methods in Engineering 6 (1972), pp. 277-288
- DIETZ, A.G.H.: Composite Engineering Laminates. Cambridge: The MIT Press, 1969, 320 p.
- DONG, S.B.: Analysis of Laminated Shells of Revolution. J. of Eng. Mech. Div, 1966, p. 135 - 154
- FILONENKO-BORODITSCH, M.M.: Elastizitätstheorie. Leipzig: VEB-Fachbuchverlag, 1967
- FLUEGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Berlin: Springer, 1962, 3. Auflage
- FOERSTER, R.: Grundlagen der Optimierung von Mehrschichtenverbunden aus faserverstärkten Werkstoffen. Teil 1, Kunststoffe 62 (1972), S. 57-62, Teil 2, Kunststoffe 62 (1972), S. 181-186
- GEIER, B.: Berechnung zweischichtiger, durch Innendruck belasteter, fasergewickelter Rotationsschalen. DLR FB 68-84, DFL-Institut für Flugzeugbau, Braunschweig, 1968
- GREEN, A.E., ADKINS, J.E.: Large Elastic Deformations. Oxford, 1960
- GREEN, A.E., ZERNA, W.: Theoretical Elasticity, 2. Ed. Oxford: Clarendon Press, 1968
- GRESZUK, L.B.: Axisymmetric Bending of Isotensoid Dome Shapes. The Society of Plastics Industry, Inc. 20th Annual Meeting at Chicago, Section 5-B, pp. 1-10
- GROSSKOPF, P., WINKLER, TH.: Auslegung von GFK/Hartschaum-Verbundwerkstoffen. Kunststoffe 63 (1973), S. 881-888
- ISMAR, H.: Die Verstärkung von rotierenden Scheiben und Schalen durch Einlagern von Fasern oder Fäden. Habilitation, TU-Hannover, 1971
- JONES, A.T.: Exact Natural Frequencies and Modal Functions for a Thick Off-Axis Laminat
- HELLER, R.A.: Interlaminar Shear Stress in Sandwich Beams. Experimental Mechanics (1969), pp. 2141-2146

- HERTEL, H.: Leichtbau. Berlin: Springer, 1960
- HSU, T.M., WANG, J.T.-S.: A Theory of Laminated Cylindrical Shells Consisting of Layers of Orthotropic Laminae.
- KAIBA, K.: Computer-Programm zur Auslegung von faserverstärkten Tanks. NT 26-71, MAN-Neue Technologie, München 1971
- KAVANAGH, K.T., CLOUGH, R.W.: Finite Element Applications in the Characterization of Elastic Solids. Int. J. Solids Structures 7 (1971), pp. 11-23
- KHATUA, T.P., CHEUNG, Y.K.: Bending and Vibration of Multilayer Sandwich Beams and Plates. Int. J. f. Num. Methods in Eng. 6 (1973), pp. 11-24
- KLINGSBELL, E.: Tensorrechnung für Ingenieure. BI-Hochschultaschenbuch 197/197a, 1966
- KRAUS, H., SCHELLING, H.: Mehrachsig beanspruchte Dreirichtungs-Wickelrohr aus verstärkten Kunststoffen. Vortrag auf der 8. Jahrestagung der AVK in Freudenstadt 1969. Kunststoffe 59 (1969) Nr. 12
- LAUGWITZ, D.: Differentialgeometrie. Stuttgart: Teubner, 1968
- LEHMANN, Th.: Seminare für Kontinuumsmechanik, T.H. Hannover, Lehrstuhl für Baumechanik, 1964-1967
- LEKHNITSKII, S.G.: Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. San Francisco: Holden Day Inc., 1963, 404 p.
- LEMPRIERE, B.M.: Uniaxial Loading of Orthotropic Materials, AIAA J., Vol. 6, No. 2, 1968, pp. 365-368
- LIN, T.H.: Review of some Correlations of Physical and Mathematical Theories of Plasticity. Composite Materials Workshop, 65-86. Technomic: Stamford, 1968
- LO, K.H., CONWAY, H.D.: Bending of Multi-Layered Curved Bars. Int. J. mech. Sci (1975), 283, 291
- LOVE, A.E.H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4. Ed. Cambridge: 4th, University Press 1927
- MAWENYA, A.S., DAVIES, J.D.: Finite Element Bending Analysis of Multilayer Plates. Int. J. f. Numerical Methods in Engineering 8 (1974), pp. 215-225
- MENGES, G., KELLENTER, M., KLEINHOLZ, R.: Mit Schaumglasgranulat gefüllte modellierfähige UP-Pasten zur Herstellung von Stützkernen für Sandwichkonstruktionen. Kunststoffe 60 (1970), S. 1079-1086
- MONFORTON G.R., IBRAHIM: Analysis of Sandwich Plates with Unbalanced Cross-Ply Faces. Int. J. mech. Sci. 17 (1975), pp. 227-238
- MURAKAMI, S., SUZUKI, K.: Application of the Extended Newton Method to the Creep Analysis of Shells of Revolution. Ing. Archiv 42 (1973), S. 194-207
- NONHOFF, G.: Stabilitätsberechnung und Prüfung von Zylinderschalen aus glasfaserverstärkten Kunststoffen. VDI-Z 116 (1974), S. 293-299
- PADOVAN, J.: Inplane and Bending Fields of Anisotropic Generally Laminated Plate Strips. J. Composite Materials 7 (1973), 536-542
- PADOVEC, J.: Stress Analysis of Shell Junctions fabricated by the Filament-Winding Method. PI-RPG Conference, Filament Winding II, The Plastics Institute, London 1972, paper 5, pp. 1-32

- PAGANO, N.J., WHITNEY, J. M.: Geometric Design of Composite Cylindrical Characterization Specimens. J. Composite Materials 4 (1970), 360-378
- PAGANO, N.J.: Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates. J. Composite Materials 4 (1970), pp. 20-34
- PAGANO, N.J.: On the Calculation of Interlaminar Normal Stress in Composite Laminate. J. Composite Materials 8 (1974), pp. 65-81
- PAO, Y.C.: Momentless Design of Composite Structures with Variable Elastic Constants. J. Composite Materials 3 (1969), pp. 604-616
- PETERS, H.L.: Numerische Lösung der Gleichungen des Spannungs- und Verformungszustandes allgemeiner Flächentragwerke im Rahmen einer linearen Theorie. Ruhr-Universität Bochum, Inst. f. konstr. Ingenieurbau, Mitteilung Nr. 71-1 (1971)
- PIPES, R.B., PAGANO, N.J.: Interlaminar Stresses in Composite Laminates under Uniform Axial Tension. J. Composite Materials 4 (1970), pp. 538-548
- PIPES, R.B., KAMINSKI, B.E., PAGANO, N.J.: Influence of the Free Edge upon the Strength of Angle-Ply Laminates, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites. ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 218-228
- PRYOR, C.W., BARKER, R.M.: Finite Element Analysis of Bending-Extensional Compling in Laminated Composites. J. Composite Mat. 4 (1970), 549-552
- PRYOR, C.W., BARKER, R.M.: A Finite-Element Analysis Including Transverse Shear Effects for Applications to Laminated Plates. AIAA Journal 9 (1971), 912-916
- PUCK, A., WURTINGER, H.: Werkstoffgemäße Dimensionierungs-Größen für den Entwurf von Bauteilen aus kunstharzgebundenen Glasfasern. Teil I u. II., Westdeutscher Verlag, Köln, 1963
- PUCK, A.: Zur Beanspruchung und Verformung von GFK-Mehrschichtenverbund-Bauelementen. Teil 1-3, Kunststoffe 57 (1967), S. 284-293, S. 573-582, S. 965-973
- RABICH, R.: Statik der Platten, Scheiben, Schalen. Leipzig: Teubner (1963), ITM, Bd. 1 Grundlagen des Ingenieurbaus, S. 865-1117
- READ, W.S.: Equilibrium Shapes for Pressurized Fiberglass Domes. J. o. Eng. f. Industry 1963, p. 115-118
- REHER, H.: Stützkern- und Schalenbauweise. Berechnung von Verbundkonstruktionen. VDI Bildungswerk, BW 1099
- REUTER, R.C.: Analysis of Shells under Internal Pressure. 1971, p. 94-113
- ROSEN, B.W.: Stiffness of Fibre Composite Materials. Composites 4 (1973), pp. 16-25
- SCHNELL, W., CZERWENKA, G.: Einführung in die Rechenmethoden des Leichtbaus, Teil I, II. B.I.-Hochschultaschenbücher 124/124a, 125/125a
- SCHULZ, J.C.: "Netting" Analysis of Filament-Wound Pressure Vessels. ASME Publ., Paper number 63-WA-223, 1963, p. 9
- SIERAKOWSKI, R.L., EBCIOGLU, I.K.: On Interlaminar Shear Stresses in Composites. J. Composite Materials 4 (1970), pp. 144-149
- SPIEGEL, M.R.: Vectoranalysis. Schaums Outline Series, New York: Mc Graw Hill, 1959

- STAMM, K., WITTE, H.: Sandwichkonstruktionen - Berechnung, Fertigung, Ausführung. Wien: Springer, 1974
- TANG, S.: A Boundary Layer Theory - Part I: Laminated Composites in Plane Stress. J. Composite Materials 9 (1975), 207-214
- TSAI, S.W., AZZI, V.D.: Strength of Laminated Composite Materials. AIAA J. (1966), p. 296-301
- VDI: Dimensionierung von Bauteilen aus GFK (glasfaserverstärkte Kunststoffe). VDI Handbuch Kunststofftechnik, VDI 2013, 1970, 19 Seiten
- WIEDEMANN, J.: Beitrag zum Problem orthotroper Platten ohne allgemeine Neutralebene. Teil I, Luftfahrttechnik 8 (1962), S. 283-289; Teil II, Luftfahrttechnik 0 (1963), S. 73-82; Teil III, Luftfahrttechnik 9 (1963), S. 118-130
- WIEDEMANN, J.: Elastizität und Festigkeit von Bauteilen aus GFK-Kunststoffen in "Konstruieren und Berechnen von GFK-Teilen" Beiheft zum Kunststoff-Berater, S. 44-66, Frankfurt: Umschau-Verlag, 1969
- WHITNEY, J.M.: Elastic Properties of Fiber-Reinforced Shells. AIAA Journal 5 (1967), 966-968
- WHITNEY, J.M.: On the Use of Shell Theory for Determining Stresses in Composite Cylinders. J. Composite Mat., Vol. 5 (1971), pp. 340-352
- WHITNEY, J.M., BROWNING, C.E.: Free-Edge Delamination of Tensile Coupons. J. Composite Materials, Vol. 6, 1972, pp. 300-303
- WHITNEY, J.M.: Stress Analysis of Thick Laminated Composite and Sandwich Plates. J. Composite Materials, Vol. 6 (1972), p. 426-440
- WORCH, G.: Elastische Platten. Berlin: Ernst u. Sohn, Betonkalender 1964, Teil II, S. 203-343
- WORCH, G.: Elastische Schalen. Berlin: Ernst u. Sohn, Betonkalender 1968, Teil II, S. 263-404. Elastische Scheiben. Berlin: Ernst u. Sohn, Betonkalender 1967, Teil II, S. 1-128
- WUNDERLICH, W.: Diff. gl. system und Übertragungsmatrizen der Biegetheorie allgemeiner Rotationsschalen. Dissertation TH-Hannover, 1966, Schriftenreihe des Lehrstuhl für Stahlbau.
- WURTINGER, H.: Die Sandwichbauweise als ein Element für Leichtbau-Konstruktionen, VDI-Berichte Nr. 174, 1971, S. 24-38
- ZERNA, N.: Mathematisch strenge Theorie elastischer Schalen. ZAMM 12 (1962), S. 333-341
- ZERNA, W.: Herleitung der ersten Approximation der Theorie elastischer Schalen. Abh. de Braunschweigischen Wiss. Gesellschaft, Bd. XIX (1967)
- ZICKEL, J.: Isotensoid Pressure Vessels. ARS Journal 1962, p. 950-951
- ZIENKIEWICZ, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science. New York-Toronto-London: Mc Graw Hill, 1971
- ZIMMERMANN, R.: Berechnung dünnwandiger, rotationssymmetrischer, fadengewickelter Innendruckbehälter nach der Membrantheorie. Teil I: Netztheorie. DLR FB 69-83, DFVLR-Institut für Flugzeugbau, Braunschweig, 1969
- ZIMMERMANN, R.: Experimentelle Untersuchungen über den Einfluß der Behälterform auf die Güte fadengewickelter dünnwandiger Druckbehälter aus GFK. IB 152-73/23, Inst. f. Flugzeugbau, DFVLR, Braunschweig, 1973, 28 S.



ZIMMERMANN, R.: Berechnung der Verschiebungen dünnwandiger, rotationssymmetrischer, fadengewickelter Innendruckbehälter mit isotsensoidförmigen Böden unter Berücksichtigung der Biegestörungen an den Übergängen zwischen den Böden und dem zylindrischen Mittelteil  
IB 085-72/52, Inst. f. Flugzeugbau, DFVLR, Braunschweig, 1972, 52 S.

## Kapitel 5:

- ABARCAR, R.B., CUNNIFF, P.F.: The Vibration of Cantilever Beams of Fibre Reinforced Material. J. of Composite Materials 6 (1972), 504-517
- ADAMS, R.D., FOX, M.A.O., FLODD, R.J.L., FRIEND, R.J., HEWITT, R.L.: The Dynamic Properties of Unidirectional Carbon and Glass Fiber Reinforced, Plastics in Torsion and Flexure. J. Composite Materials 3 (1969), 594-603
- ADAMS, R.D.: Measurement of the Flexural Damping Capacity and Dynamic Young's Modulus of Metals and Reinforced Plastics. J. Phys. D.: Appl. Phys 6 (1973), 27-41
- ADAMS, R.D., BACON, D.G.C.: The Dynamic Properties of Unidirectional Fibre Reinforced Composites in Flexure and Torsion. J. Composite Materials 7 (1973), 53-67
- ADAMS, R.D., BACON, D.G.: Effect of Fibre Orientation and Laminate Geometry on the Dynamic Properties of CFRP. J. Composite Materials 7 (1973), 402-428
- AMIRBAYAT, J., HEARLE, J.W.S.: Properties of Unit Composites as Determined by the Properties of the Interface. Part 1: Mechanism of Matrix-Fibre Load Transfer, Fibre Science and Technology 2 (1969), 123-141 and Part 2 Effect of Fibre Length and Shippage on the Modulus of Unit Composites, 143-153
- AUERBACH, F., HORT, W.: Handbuch der physikalischen und Technischen Mechanik, Band III, Teil 1, Statik und Dynamik elastischer Körper. Leipzig: J.A. Barth-Verlag, 1927
- BERCHA, F.G., GLOCKNER, P.G.: Thick Shell and Oriented Surface Theories. J. o. Eng. Mech. Div. (1972), pp. 823-832
- BERT, C.W., CLARY, R.R.: Evaluation of Experimental Methods for Determining Dynamic Stiffness and Damping of Composite Materials, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp.
- BRANDMAIER, H.E.: Limits on Unidirectional Composite Material Properties. J. Composite Materials 3 (1969), 728-731
- CALCOTE, L.R.: The Analysis of Laminated Composite Structures. Van Nostrand, New York, 1969, 222 p.
- CAWTHORNE, D., HARRIS, B.: Dynamic Elastic Modulus and Toughness of Dough moulding Compounds. Composites (1975), 25-29
- CHOU, P.C.: Introduction to Wave Propagation in Composite Materials. Aus Composite Materials Workshop, 193-216, Technomic: Stamford, 1968
- CHOU, P.C., CARLEONE, J., HSU, C.M.: Elastic Constants of Layered Media. J. Composite Materials (1972), 80-93
- COOPER, G.A.: The Structure and Mechanical Properties of Composite Materials. Rev. of Phys. in Techn. 2 (1971), 49-91
- CUNTZE, R.: Beitrag zur Berechnung von Eigenfrequenzen dünner Rechteckscheiben unter Berücksichtigung von randparalleler Orthotropie. Diss., TH-Hannover, Febr. 1968
- DEAN, G.D., LOCKETT, F.J.: Determination of the Mechanical Properties of Fiber Composites by Ultrasonic Techniques, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites. ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 326-346
- DEAN, G.D., TURNER, P.: The Elastic Properties of Carbon Fibres and their Composites. Composites (1973), 174-180

- DIETZ, A.G.H.: Composite Engineering Laminates. Cambridge: The MIT Press, 1969, 328 p.
- DIMMOCK, J., ABRAHAMS, M.: Prediction of Composite Properties from Fibre and Matrix Properties. Composites (Dec. 1969), p. 87-93
- DUDEK, T.J.: Young's and Shear Moduli of Unidirectional Composites by a Resonant Beam Method. J. Composite Materials, 4 (1970), pp. 232
- EKVALL, J.C.: Structural Behaviour of Monofilament Composites. AIAA 6th Structures and Materials Conference
- FOYE, R.L.: The Transverse Poissons Ratio of Composites. J. Composite Materials, 6 (1972), pp. 293
- FOYE, R.L.: An Evaluation of Various Engineering Estimates of the Transverse Properties of Unidirectional Composites. 1966, p. G - 31
- FREEMAN, W.T., KUEBELER, G.C.: Mechanical and Physical Properties of Advanced Composites, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 435-456
- GOENS, E.: Über die Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben mit Hilfe von Biegeschwingungen. Ann. Physik 5 (1931), 649-678
- GOGGIN, P.R.: The Elastic Constants of Carbon-Fibre Composites. J. of Materials Science 8 (1973), 233-244
- GREEN, A.E., ADKINS, J.E.: Large Elastic Deformations, Oxford, 1960
- GREEN, A.E., ZERNA, W.: Theoretical Elasticity, 2. Ed. Oxford: Clarendon Press, 1968
- GRESZCZUK, L.B.: New Test Technique for Shear Modulus and other Elastic Constants of Filamentary Composites. AFML-TR 66-274, 96-123
- GRESZCZUK, L.B.: Theoretical and Experimental Studies on Properties and Behaviour of Filamentary Composites. Proc. 21<sup>st</sup> Ann. Tech. Conf., SPI Reinforced Plastics Div., Soc. of the Plastics Ind., Inc., Section 8-A (Feb. 1966)
- GRESZCZUK, L.B.: Douglas Ring Test for Shear Modulus Determination of Isotropic and Composite Materials. Proceedings, 23<sup>rd</sup> Annual Technical and Management Conference, Society of the Plastics Industry, Washington, D.C., 6-9, Feb. 1968, 8 p.
- GRESZCZUK, L.B.: Shear Modulus Determination of Isotropic and Composite Materials. Composite Materials: Testing and Design, ASTM STP 460- 140-149, 1969
- ENIE, R.B., RIZZO, R.R.: Three Dimensional Laminate Moduli. J. Composite Materials 4 (1970), 150-154
- HAHN, H.T., TSAI, S.W.: Nonlinear Elastic Behavior of Unidirectional Composite Laminae. J. Composite Materials 7 (1973), 102-117
- HAHN, H.T.: Nonlinear Behavior of Laminated Composites. J. Composite Materials 7 (1973), 257-271
- HAHN, H.T.: A Derivation of Invariants of Forth Rank Tensors. J. Composite Materials 8 (1974), 2-14
- HAHN, H.T.: On Elastic-Plastic Poisson's Ratio. J. Composite Materials 8 (1974), 313-317
- HALPIN, J.C., PAGANO, N.J., WHITNEY, J.M., WU, E.M.: Characterization of Anisotropic Composite Materials. Composite Materials: Testing and Design, 1969, 37-47, ASTM STP 460

- HASHIN, Z., ROSEN, B.W.: The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials. J. of Appl. Mechanics (1964), p. 223-232
- HEARMAN, R.F.S.: An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity. Oxford: University Press, 1961, 136 S.
- HEATON, M.D.: A Calculation of the Elastic Constants of Unidirectional Fibre Reinforced Composites. British J. Appl. Phys. Ser. 2, 1 (1968), p. 1039
- HEATON, M.D.: A Calculation of the elastic constants of a unidirectional composite containing transversely isotropic fibres. Brit. J. Appl. Phys. (D) (1970), 672-676
- HEDGEPEETH, J.M., HASKELL, D.F.: Structural Mechanics of Fiber-Reinforced Composites. Mechanics of Composite Materials, 5<sup>th</sup> Symposium Naval Structural Mechanics, Philadelphia, 1967, 405-437
- HEIMESHOFF, B.: Über die elastische Stabilität des rhombisch-anisotropen Kontinuums bei Druckbeanspruchung. Dissertation TH-Hannover, 1966
- HEIMESHOFF, B.: Elastizitätstheorie nichtlinear-elastischer anisotroper Kontinua. Habilitation, TH-Hannover, 1969
- HERMANN, C.: Zur systematischen Strukturtheorie eine neue Raumgruppensymbolik. Zeitschrift Krist. 69(1928), S. 257-281
- HERRMANN, L.R., CHAN, S.T.K.: Mechanical Property Tests for Cylindrically Orthotropic Materials. J. Composite Materials 3 (1969), pp. 136-147
- HIRAI, T., KLINE, D.E.: Dynamic Mechanical Properties of Graphite-Epoxy and Carbon-Epoxy Composites. J. Composite Materials 7 (1973), 160-177
- KACZKOWSKI, Z.: Konjugierte Richtungen in anisotropen Körpern. Bulletin de l'Academie polonaise des sciences cl. IV - Vol. III, No. 3, 1955
- KALISCH, A.: Aufbau und Wirkungsweise des Elastomaten. Bericht, Institut Dr. Förster, Reutlingen
- KANG, S.I., RENTZEPIS, G.M.: On the Determination of Physical Properties of Composite Materials by a Three-Dimensional Finite-Element Procedure, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 166-187.
- KAVANAGH, K.T.: The Effect of Void and Fiber Variations on the Accuracy of Composite Material Characterizations. J. Composite Materials 7( 1973), 500-515
- KEYLWERTH, R.: Die anisotrope Elastizität des Holzes und der Lagerhölzer. VDI-Forschungsheft 430, Deutscher Ing. Verlag, Düsseldorf, 1951, 40 S.
- KMITTA, S.: Dynamischer E-Modul und mechanische Dämpfung von verstärktem PVC. Kunststoffe 6 (1974), 376-379
- KNIBBS, R.H., MORRIS, J.B.: The Effect of Fibre Orientation on the Physical Properties of Composites. Composites (1974), 209-218
- KO, H.-Y., STURE, S.: Three-Dimensional Mechanical Characterization of Anisotropic Composites. J. Composite Materials 8 (1974), 178-190
- LANGLEY, M.: Carbon Fibres in Engineering. London: Mc Graw Hill, 1973, 262 pp.

- LANTZ, R.B., BALDRIDGE, K.G.: Angle-Plyed Boron Epoxy. Test Methods - A Comparison of Beam Tension and Axial Tension Coupon Testing. Technomic: Composite Materials, 94-106
- LEKHNITSKII, S.G.: Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. San Francisco: Holden Day Inc., 1963, 404 p.
- LEMPRIERE, B.M.: Uniaxial Loading of Orthotropic Materials. AIAA J., Vol. 6 No. 2, 1968, pp. 365-368
- LEWIS, T.B., DI BENE DETTO, A.T.: Effects of Adhesion and Orientation on the Mechanical Properties of Graphite Composites. Int. Conf. on Carbon Fibres, their Composites and Applications, London 1971, paper 27, 6 p.
- LOVE, A.E.H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4. Ed., Cambridge: ~~4th Edition~~, University Press, 1927
- MITTON, P.D.: Test your Test: It's Cruder than you think. American Chemical Society, Div. Org. Cratings Plast. Chem. Pap. 165 th Meeting, 33 (1973), 84-91
- MOON, F.C.: Wave Surfaces Due to Impact on Anisotropic Plates. Composites (1972), 62-79
- NIEDERSTADT, G.: Untersuchungen über die zerstörungsfreie Prüfung von Verbundwerkstoffen aus Glasfaser und Kunstharz mit Ultraschall DFL-Bericht Nr. 192, DFVLR-Institut für Flugzeugbau, Braunschweig, 1962, 24 S. Text
- NIEDERSTADT, G.: Zur Frage der Probenform bei der Prüfung gewickelter Strukturen. Kunststoffe (1973), H. 12, 3S.
- NOVAK, R.C., BERT, C.W.: Theoretical and Experimental Bases for More Precise Elastic Properties of Epoxy. J. Composite Materials 2 (1968), 506-508
- PAGANO, N.J., WHITNEY, J.M.: Geometric Design of Composite Cylindrical Characterization Specimens. J. Composite Materials 4 (1970), 360-378
- PIPES, R.B., PAGANO, N.J.: Interlaminar Stresses in Composite Laminates under Uniform Axial Tension. J. Composite Materials 4 (1970), pp. 538-548
- PUCK, A., WURTINGER, H.: Werkstoffgemäße Dimensionierungs-Größen für den Entwurf von Bauteilen aus kunstharzgebundenen Glasfasern. Teil I u. II., Westdeutscher Verlag, Köln, 1963
- PUCK, A.: Zur Beanspruchung und Verformung von GFK-Mehrschichtenverbund-Bauelementen. Teil 1-3, Kunststoffe 57 (1967), S. 284-293, S. 573-582, S. 965-973
- PUCK, A.: Zur Beanspruchung und Verformung mehrschichtiger Verbundstoff-Bauelemente aus Glasseidensträngen und Kunststoff. Diss., TH-Darmstadt, 1967, 94 S.
- PUCK, A.: Das "Knie" im Spannungs-Dehnungs-Diagramm und Rißbildung bei Glasfaser/Kunststoffen. Kunststoffe 58 (1968), 886-893
- RAMSDEN, G.R.: A Review of the Equations used in the Determination of Young's Modulus by Vibration Methods. British Journal of N.D.T. (1963), 101-105
- RITCHIE, I.G., ROSINGER, H.E.: Torsional Rigidity of Rectangular Section Bars of Orthotropic Materials. J. Composite Materials 9 (1975), 187-190
- ROBINSON, E.Y.: On the Elastic Properties of Fiber Composite Laminates with Statistically Dispersed Fiber and Phy. Orientations. 28 th Ann. Techn. Conf., 1973, Reinforced Plastics/Composites Institute, The Society of the Plastics Industry, Inc.

- ROSE, J.L., MORTIMER, R.W.: Wave Velocities in Unidirectional Graphite Epoxy Shells. *J. Composite Materials* 8 (1974), 191-194
- ROSEN, B.W., SHU, L.S.: On Some Symmetry Conditions for Three Dimensional Fibrous Composites. *J. Composites Materials* 5 (1971), 279-282
- ROSEN, B.W.: A Simple Procedure for Experimental Determination of the Longitudinal Shear Modulus of unidirectional Composites. *J. Composite Materials* 6 (1972), 552-554
- ROSEN, B.W.: Stiffness of Fibre Composite Materials. *Composites* 4 (1973), pp. 16-25
- SCHAPER, H., SCHITTKO, H.: Die Ermittlung der elastischen Eigenschaften glasfaserverstärkter Kunststoffe mit Hilfe elastischer Wellen. *Kunststoffe* 56 (1966), S. 824-828
- SCHAPER, H.: Beitrag zur zerstörungsfreien Prüfung von glasfaserverstärkten Kunststoffen. Dissertation, TH-Hannover, 1966, 153 S.
- SCHAPER, R.A.: Stress Analysis of Viscoelastic Composite Materials. *Composite Materials Workshop*, 153-192. Technomic: Stamford, 1968
- SCHENKEL, G.: Die Schallgeschwindigkeit und andere Zustandfunktionen von Kunststoffen. *Kunststoffe* 62 (1972), 575-579
- SCHNEIDER, H.: Verfahren zur Berechnung von Elastizitäts- und Schubmodul aus Eigenfrequenzen stabförmiger Proben. *Materialprüfung* 8 (1966), 169-174
- SCHREYER, G., BAUER, P.: Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Kunststoffen im Zug-, Druck- und Biegeversuch. *Kunststoffe* 58 (1968), 98-100 Teil 1
- SENDECKYJ, G.P.: Cross Ply Laminates. *J. Composite Materials* (1971), 160-163
- SIMS, D.F., HALPIN, J.C.: Methods for Determining the Elastic and Viscoelastic Response of Composite Materials. *Composite Materials: Testing and Design (Third Conference)*, ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 46-66.
- SMITH, A., WILKONSON, S.J., REYNOLDS, W.N.: The Elastic Constants of some Epoxy Resins. *J. of Material Science* 9 (1974), 547-550
- SOKOLNIKOFF, I.S.: *Tensor Analysis*. New York: John Wiley and Sons, 1960
- STUMM, W.: Grundlagen der Messung elastischer Eigenschaften von Metallen mit Hilfe von Eigenschwingungen. Vortrag bei der Technischen Akademie in Esslingen, 1973, aus den Unterlagen des Institutes Dr. Förster, Reutlingen
- TAUCHERT, T.R., GUZELSU, A.N.: An Experimental Study of Dispersion of Stress Waves in a Fiber-Reinforced Composite. *Trans. ASME, J. of Appl. Mech.* (1972) pp. 98-101
- TAUCHERT, R.R.: Internal Damping in a Fiber-Reinforced Composite Material. (Ultrasonic pulse) *J. Composite Materials* 8 (1974), 195-199
- TIMOSHENKO, S.: On the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross-Section. *Phil. Mag. S. 6, Vol. 53, No. 253*, (1922)
- TSAI, S.W.: *Mechanics of Composite Materials. Part 1*, Air Force Materials Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base Ohio, 1966

- TSAI, S.W., PAGANO N. J.: Invariant Properties of Composite Materials. Composite Materials Workshop 233-252a, Technomic: Stanford, 1968
- VDI: Dimensionieren von Bauteilen aus GFK (glasfaserverstärkte Kunststoffe. VDI Handbuch Kunststofftechnik, VDI 2013, 1970, 19 Seiten
- VOGT, C.W., HANIUK, E.S., TRICE, J.M.: Evaluation of Testing Techniques Filament Wound Composites. 1966, U.S. NOL, 186-251
- VOIGT, W.: Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig: Teubner, 1910/1928
- WAWRA, H.: Wesentliche Erweiterungen des Anwendungsbereiches von Elastomat II zur Messung elastischer Größen. Z. Metallkunde 65 (1974), 579-585
- WIEDEMANN, J.: Beitrag zum Problem orthotroper Platten ohne allgemeine Neutralebene. Teil I, Luftfahrttechnik 8 (1962), S.283-289; Teil II, Luftfahrttechnik 9 (1963), S. 73-82; Teil III, Luftfahrttechnik 9 (1963), S. 118-130
- WIEDEMANN, J.: Elastizität und Festigkeit von Bauteilen aus GFK-Kunststoffen in "Konstruieren und Berechnen von GFK-Teilen", Beiheft zum Kunststoff-Berater, S. 44-66, Frankfurt: Umschau-Verlag, 1969
- WEIN J.: Fortran-Programm zur Berechnung der Elastizitätsgrößen und der Wärmeausdehnungskoeffizienten von mehrschichtigen, zweidimensionalen Verbunden. M.A.N.-Neue Technologie, Bericht 24/74, München, 1974
- WHITNEY, J.M., RILEY, M.B.: Elastic Properties of Fiber Reinforced Composite Materials. AIAA J. 4(1966), p. 1537-1542
- WHITNEY, J.M.: Elastic Moduli of Unidirectional Composites with Anisotropic Filaments. J. Composite Materials 1 (1967), p. 188-193
- WHITNEY, J.M.: Engineering Constants of Laminated Composite Materials. J. Composite Materials 2 (1968), p. 261
- WHITNEY, J.M., PAGANO, N.J.: Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates. J. of Applied Mechanics Trans ASME (1970), pp. 1031-1036
- WHITNEY, J.M., ASHTON, J.E.: Effect of Environment on the Elastic Response of Layered Composite Plates. AIAA J. (1971), pp. 1708-1713
- WHITNEY, J. M., BROWNING, C.E., MAIR, A.: Analysis of the Flexure Test for Laminated Composite Materials, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 30-45.
- WILLAX, H.O., EHRENSTEIN, G.W.: Der Einfluß von Tränkungs- und Benetzungseigenschaften auf mechanische Kenngrößen glasfaserverstärkter Kunststoffe. Kunststoffe 1972, H. 12, 6 S.
- WU, E.M., JERINA, K.L., LAVENGOOD, R.E.: Data Averaging of Anisotropic Composite Material Constants, Analysis of Test Methods for High Modulus Fibres and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 229-252
- YANG, P.C., NORRIS, C.H., STAVSKY, Y.: Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates. Int. J. Solids Structures (1966), pp. 665-684

Glasfaserverstärkte Kunststoffe. Lehrgangshandbuch des VDI-Bildungswerk, Teil 1 "Werkstoffe und Verfahren", Teil 2 "Anwendung und Konstruktion, 1972

Testing Techniques for Filament Reinforced Plastics Symposium, September 1966. AFML TR 66-274, Wright Patterson Air Force Base Ohio, 1967, 860 p.

Quantitative Zusammenhänge zur Auswertung der Meßergebnisse des Elastomaten. Bericht, Institut Dr. Förster, Reutlingen



## Kapitel 6:

- ALTHOF, W.: Bestimmung linearer Wärmeausdehnungskoeffizienten von CFK mit unterschiedlicher Faserorientierung. Abt. bericht FD 44, DFBLR-Institut für Flugzeugbau, Braunschweig 1971, 8 Seiten
- COOPER, G.A.: The Structure and Mechanical Properties of Composite Materials. Rev. of Phys. in Techn. 2 (1971), 49-91
- CHAMIS, C.C., SENDECKYJ, G.P.: Critique on Theories Predicting Thermoelastic Properties of Fibrous Composites. J. Composite Materials 2 (1968), 332-358
- DARDI, L.E., KREIDER, K.G.: Thermal Cycling in Boron Aluminium Composites. 18th Nat. SAMPE Symp. and Exh., Vol. 19, 1973, 125-139
- ESTES, R.C., MULHOLLAND, G.P.: Diffusion through Orthotropic Rectangular Laminated Composites. Fibre Science Technology 7 (1974), 257-279
- FAHMY, A.A., RAGAI, A.N.: Thermal Expansion of Graphite-Epoxy Composites. J. of Appl. Physics 41 (1970), p. 5112-5115
- FAHMY, A.A., RAGAI-ELLOZY, A.N.: Thermal Expansion of Laminated Fiber Composites in the Thickness Direction. J. Composite Materials 8 (1974), p. 89-92
- FREEMAN, W.T., KUEBELER, G.C.: Mechanical and Physical Properties of Advanced Composites, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 435-456
- GEILER, D.E.: Analysis, Test and Comparison of Composite Material Laminates Configured for Isotropic Low Thermal Expansion. 28th Ann. Techn. Conf., 1973, Reinforced Plastics (Composites Institute, The Society of the Plastics Industry, Inc.
- HAHN, H.T., PAGANO, N.J.: Curing Stresses in Composite Laminates. J. Composite Materials 9 (1975), 91-106
- HALPIN, J.C., PAGANO, N. J.: Consequences of Environmentally Induced Dilatation in Solids. Technical Report AFML-TR-68-395, 1971, p. 14
- HARTWIG, G., FUCK, A., WEISS, W., Thermische Kontraktion von glasfaserverstärkten Epoxydharzen bis zu tiefsten Temperaturen. Kunststoffe (1974), S. 32-35
- KALNIN, I.L.: Thermal Expansion of High Modulus Graphite Fiber/Epoxy Composites. 29th Ann. Conf. Soc. Plastics Industry (SPI), Febr. 1974, Sect., 17D, 1-11
- KNAPPE, W., MARTINEZ-FREIRE, P.: Messung und Berechnung der Wärmeleitfähigkeit von Glasfaser/Kunststoff. Kunststoffe (1965), S. 776-779
- KNIBBS, R.H., MORRIS, J.B.: The Effect of Fibre Orientation on the Physical Properties of Composites. Composites (1974), 209-218
- PAGANO, N.J.: Thickness Expansion Coefficients of Composite Laminates. J. Composite Materials 8 (1974), 310-312
- SCHAPERY, R.A.: Thermal Expansion Coefficients of Composite Materials Based on Energy Principles. J. Composite Mat. 2 (1968), p. 380
- SCHNEIDER, W.: Wärmeausdehnungskoeffizienten von Glasfaser/Kunststoffverbunden. Kunststoffe (1971), S. 273-277

TSAI, S.W., AZZI, V.D.: Strength of Laminated Composite Materials.  
 AIAA J. (1966), p. 296-301

WEIN, J.: Fortran-Programm zur Berechnung der Elastizitätsgrößen  
 und der Wärmeausdehnungskoeffizienten von mehrschichtigen, zwei-  
 dimensional Verbunden. M.A.N.-Neue Technologie, Bericht 24-74,  
 München, 1974

## Kapitel 7:

- ADAMS, D.F.: Elastoplastic Crack Propagation in a Transversely Loaded Unidirectional Composite. J. Composite Materials 8 (1974), 38-54
- ANDREWS, E.H.: A Generalized Theory of Fracture Mechanics. J. of Material Science 9 (1974), 887-894
- ARMENAKAS, A.E., GARG, S.K., SCIAMMARELLA, C.A., SVALBONAS, V.: Experimental Study of the Failure Mechanism and Strength Characteristics of Fiber Bundles and Composites. Experimental Mechanics (1972), 1-10
- BADER, M.G., ELLIS, R.M.: The Effect of Notches and Specimen Geometry on the Pendulum Impact Strength of Uniaxial CFRP. Composites (1974), 253-258
- BEAUMONT, P.W., HARRIS, B.: The Energy of Crack Propagation in Carbon Fibre-Reinforced Resin Systems. J. of Materials Science 7 (1972), 1265-1279
- BECHT, J., EISENBLAETTER, J., JAX, P.: Werkstoffprüfungen mit der Schallemissionsanalyse (SEA). Z. f. Werkstofftechnik 4 (1973), 306-314
- BERT, C.W., MAYBERRY, B.L., RAY, J.D.: Behavior of Fiber-Reinforced Plastic Laminates under Biaxial Loading. Aus Composite Materials: Testing and Design, 362-380, ASTM STP 460, 1969
- BRUNSCH, K.: Design of Composite Structure with Respect to Avoid Crack (caused by impact) Propagation. Sess: D, 39th AGARD Muting of Structures and Materials Panel, Munich 1974, 16 p.
- BROUTMAN, L.J., KROCK, R.H.: Modern Composite Materials. Reading: Addison-Wesley Publ. Comp., 1967
- BUHMANN, K.T.: Zum Bestimmen der Schädigungsgrenze von GFK-Laminaten. Neue zerstörungsfreie Methoden und ihre Eignung als Fertigungskontrollverfahren. Kunststoffe 62 (1972), S.875
- CHAMIS, C.C.: Failure Criteria for Filamentary Composites. Aus Composite Materials: Testing and Design, 336-351, ASTM STP 460, 1069
- CHOU, P.C., MC NAMEE, B.M., CHOU, D.K.: The Yield Criterion of Laminated Media. J. Composite Materials 7 (1973), 22-35
- COOPER, G.A.: The Structure and Mechanical Properties of Composite Materials. Rev. of Phys. in Techn. 2 (1971), 49-91
- CORTEN, H.T.: Micromechanics and Fracture Behavior of Composites. Aus Broutman/Krock, "Modern Composite Materials"
- CORTEN, H.T.: Fracture Mechanics of Composites. Chapter 9 of Fracture, Vol. 7, Academic Press, 1972, 676-769
- DEAN G.D., TURNER, P.: The Elastic Properties of Carbon Fibress and their Composites. Composites (1973), 174-180
- DIETMANN, H.: Spannungszustand und Festigkeitsverhalten. Techn. Wiss. Bericht der MFA (Univ.) Stuttgart
- DIMMOCK, J., ABRAHAMS, M.: Prediction of Composite Properties from Fibre and Matrix Properties. Composites (Dec. 1969), p. 87-93
- DOREY, G.: Fracture Behavior and Residual Strength of Carbon Fibre Composites Subjected to Impact Loads. AGARD, Structures and Materials Panel, München, Okt. 1974, B3, 11 p.

- EHRENSTEIN G.W.: Glasfaserverstärkte thermoplastische Kunststoffe - Grenzen und Anwendungsmöglichkeiten - Kunststoffe 60 (1970), 917-924
- ELLIS, C.D., HARRIS, B.: The Effect of Specimen and Testing Variables on the Fracture of some Fibre Reinforced Epoxy Resins. J. of Comp. Materials, 1973, pp. 76-83
- FOERSTER, R., KNAPPE, W.: Spannungs- und Bruchanalyse an GFK-Wickelkörpern. Kunststoffe (1970), S. 1053-1059
- FÖRSTER, R.: Festigkeitsrechnung und Festigkeitsoptimierung an Mehrschichtenverbunden aus Glasfaser/Kunststoff. Diss., TH Darmstadt, 1971
- FOERSTER, R., KNAPPE, W.: Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ribbildungsgrenze an zweischichtigen Wickelrohren aus Glasfaser/Kunststoff unter Innendruck. Kunststoffe 61 (1971), 583-588
- FOERSTER R., KRAFT, G.: Vergleich verschiedener Schalenformen dünnwandiger, fasergewickelter Rotationsschalen bei Dimensionierung auf Ribbildung. Kunststoffe 62 (1972), S. 587-591
- GATTI, A., MULLIN, BERRY: The Role of Bond Strength in the Fracture of Advanced Filament Reinforced Composites. Aus Testing and Design, 573-582, ASTM STP 460, Philadelphia, 1969
- GOLDBACH, G.: Bruchmechanische Kenngrößen zur Beurteilung des Festigkeitsverhaltens von Kunststoffen. Kunststoffe 64/1974, 475-481
- GRESZCZUK, L.B.: Compressive Strength and Failure Modes of Unidirectional Composites, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 192-217
- GRESZCZUK, L.B.: Microbuckling of Lamina-Reinforced Composites, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 5-29
- HAENCHEN, R., DECKER, K.-H.: Neue Festigkeitsberechnung für den Maschinenbau, München: Hanser, 1967, 191 S.
- HAHN, H.G.: Die linear elastische Bruchmechanik. VDI-Zeitung 113 (1971). S. 43-47
- HANASAKI, S., HASEGAWA, Y.: Compressive Strength of Unidirectional Fibrous Composites. J. Composite Materials 8 (1974), 306-309
- HANCOX, N.L.: Izod Impact Testing of Carbon-Fibre-Reinforced Plastics, Composites (1971), 41-45
- HANCOX, N.L., WELLS, H.: Izod Impact Properties of Carbon-Fibre/Glass-Fibre Sandwich Structures. Composites (1973), 26-30
- HARRISON, N.L.: Splitting of Fibre-Reinforced Materials. Fibre Science Techn. 6 (1973), 25-38
- HECKEL, H.: Einführung in die technische Anwendung der Bruchmechanik. München: Carl Hanser Verlag, 1970
- HECKEL, K.: Zur Lebensdauer vorhersage gekerbter, schwingend beanspruchter Bauteile. Berg- und Hüttenmännische Monatshefte 120, H. 1, 25-32
- HELLWEGE, K.H., WURTINGER, H.: Ribbildung in GFK-Laminaten infolge dynamischer Beanspruchung. Kunststoffe 58 (1968), S.163-167

- HÜTTER, U.: Composite-Schalen unter allgemeiner Belastung. 7. Lehrgang für Raumfahrttechnik, Braunschweig, 1968
- HÜTTER, U., SCHELLING, H., KRAUSS, H.: An Experimental Study to Determine Failure Envelope of Composite Materials with Tubular Specimens under Combined Loads and Comparison between several Classical Criteria. AGARD, Structures and Materials Panel, Munich, 1974, 11 p.
- ISHAI, O.: Failure of Unidirectional Composites in Tension. J. of Eng. Mech. Div. 1971, 205-211
- KAISER, H.: Exp. Bestimmung der Spannungs- Verformungskurven und der Festigkeiten von eben belasteten unidirektionalen Glasfaser/Kunststoff-Schichten unter statischer Langzeitbeanspruchung. Studienarbeit am Deutschen Kunststoff-Institut, Darmstadt, 1972
- KAMINSKI, B.E., LANTZ, R.B.: Strength Theories of Failure for Anisotropic Materials. Composite Materials: Testing and Design, ASTM STP 460, 1969, S. 160-169
- KAMINSKI, B.E.: Effects of Specimen Geometry on the Strength of Composite Materials, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 181-191
- KERKHOF, F.: Anwendung der Bruchmechanik auf Hochpolymere. Kolloid Zeitschrift & Zeitschrift für Polymere 251 (1973), H. 8, 545-553
- KNAPPE, W., SCHNEIDER, W.: Bruchkriterien für unidirektionalen Glasfaser/Kunststoff unter ebener Kurzzeit- und Langzeitbeanspruchung. Kunststoffe 62 (1972), 864-868
- KNAUSS, W.G.: Fracture Mechanics and the Time Dependent Strength of Adhesive Joints. J. Composite Materials 5 (1971), 176-192
- KNIBBS, R.H., MORRIS, J.B.: The Effect of Fibre Orientation on the Physical Properties of Composites. Composites (1974), 209-218
- KONISHI, H.: Stress Analysis of the Crack-Tip Region in a Cracked Anisotropic Plate. Dept. of Mech. Eng., Cornegie Instutue of Technology, Pittsburgh, SM64 - June 1971
- KONISHI, H.J., SWEDLOW, J.L., CRUSE, T.A.: Experimental Investigation of Fracture in an Advanced Fiber Composite. J. of Comp. Materials, 1972, pp. 114 - 124
- KONISHI, H.J., SWEDLOW, J.L., CRUSE, T.A.: Fracture Phenomena in Advanced Fiber Composite Materials. AIAA Journal, Vol. 11, 1973, p. 40-43
- KONISHI, H.J., CRUSE, T.A., SWEDLOW, J.L.: Method for Estimating Fracture Strength of Specially Orthotropic Composite Laminates, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 133-142
- KOWALEWSKI, J., JAKOBY, G.: Beurteilung der Bruchfestigkeit von Bauteilen aufgrund der Ribzähigkeit. 7. Lehrgang für Raumfahrttechnik, Braunschweig, 1968, 62 S.
- KUNZ, S.C., BEAUMONT, P.W.R.: Microcrack Growth in Graphite Fiber-Epoxy Resin Systems During Compressive Fatigue, Fatigue of Composite Materials, ASTM STP 569, American Society for Testing and Materials, 1975, pp. 71-91
- LANIR, Y., FUNG, Y.C.B.: Fiber Composite Columns under Compression. J. Composite Materials 6 (1972), 387-400

- LANTZ, R.B., BALDRIDGE, K.G.: Angle-Plied Boron Epoxy. Test Methods - A Comparison of Beam Tension and Axial Tension Coupon Testing. Technomic: Composite Materials, 94-106
- LEWIS, T.B., DI BENEDETTO, A.T.: Effects of Adhesion and Orientation on the Mechanical Properties of Graphite Composites. Int. Conf. on Carbon Fiber, Their Composites and Application, London 1971, paper 27, 6 p.
- LOVELL, F.G.: Shear Buckling of an Elastically Supported Fiber. J. Composite Materials, Vol. 6, 1972, p. 296-299
- MALLICK, P.K., BROUTMAN, L.J.: The Influence of the Interface on the Fracture Toughness of Low Aspect Ratio Fiber Composites. 29th Ann. Conf. Society Plastic Industry (SPI), Febr. 1974, Sect. 13-B, 1-14
- MANDELL, J.F., MC GARRY, F.J., KASHIHARA, R., BISHOP, W.R.: Engineering Aspects of Fracture Toughness: Fiber Reinforced Laminates. 29th Ann. Techn. Conf., Society Plastics Industry (SPI), Febr. 1974, Sect. 17-D, 1-11
- MANDELL, J.F., MC GARRY, F.J., WANG, S.S., IM, J.: Stress Intensity Factors for Anisotropic Fracture Test Specimens of Several Geometries. J. Composite Materials 8 (1974), 106-116 .
- MANDELL, J.F., MEIER, URS.: Fatigue Crack Propagation in  $0^{\circ}/90^{\circ}$  E-Glass/Epoxy Composites, Fatigue of Composite Materials, ASTM STP 569, American Society for Testing and Materials, 1975, pp. 28-44
- KENNA, G.P., MANDELL, J.F., MC GARRY, F.J.: Interlaminar Strength and Toughness of Fiberglass Laminates. 29th Ann. Conf. Soc. Plastic Ind. (SPI), Febr. 1974
- MC KINNEY, J.M.: Mixed - Mode Fracture of Unidirectional Graphite/Epoxy Composites. J. Composite Materials 6 (1972), 165-166
- MENGES, G., ROSKOTHEN, H.J., EMPT, P.: Zum Deformations- und Versagensverhalten von Mattenlaminaten unter besonderer Berücksichtigung des Schubeinflusses. Kunststoffe 6 (1970), 1009-1014
- MENGES, G., TAPROGGE, R.: Denken in Verformungen erleichtert das Dimensionieren von Kunststoffteilen. VDI-Z (1970), 341-346 1. Teil VDI-Z, (1970), 627, 2. Teil
- MENGES, G., BRINTRUP, H.: Reißgrenzen an unidirektionalen GFK-Wickellaminaten unter ein- und mehrachsiger Beanspruchung. Kunststoffe 62 (1972), 869-875
- MENGES, G., ALF, E.: How to Estimate the Strength of Plastic Structural Components. J. Macromol. Sci.-Chem. (1972), 1251-1265
- MENGES, G.: Das Verhalten von Kunststoffen unter Dehnung. Teil 1: Phänomenologie der Rißerscheinungen. Kunststoffe 63 (1973), 95-100
- MENGES, G., BRINTRUP, H., BARKING, H.L.: Bestimmung der Reißgrenzen an unidirektional verstärkten GFK (GFUP)-Laminaten. Kunststoffe 63 (1973), 874-880
- MENGES, G., ROSKOTHEN, H.J.: Deformationsgrenzen als Bemessungsgrundlage bei Stabilitätsproblemen. (Untersuchungen an GFK- und Sandwichstäben). Kunststoffe 1973, H. 12, 10 S.

- MENGES, G., RIESS, R.: Verarbeitungs- und Umgebungseinflüsse auf die kritische Dehnung von Kunststoffen. *Kunststoffe* 64 (1974), 87-92
- MULLIN, J.V.: Influence of Fiber Property Variation on Composite Failure Mechanisms, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 349-366
- MULLIN, J.V., MAZZIO, V.F.: A Comparative Study of Tensile Fracture Mechanisms. *J. Composite Materials* 6 (1972), p. 268-276
- NEITZEL, M.: Probleme der Materialprüfung bei Behältern und Rohren aus verstärkten Kunststoffen. *Gummi-Asbest-Kunststoffe* (1970), 856-861
- OWEN, M.J., BISHOP, P.T.: Critical Stress Intensity Factors for Glass Reinforced Plastics. 3. Int. Tagung über Bruch, München, April 1973, VII-343
- PAGANO, N.J., PIPES, R.B.: The Influence of Stacking Sequence of Laminate Strength. *J. Composite Materials* 5 (1971), 50-57
- PAGANO, N.J.: Distortional Energy of Composite Materials. *J. Composite Materials* 9 (1975), 67-72
- PIPES, R.B., KAMINSKI, B.E., PAGANO, N.J.: Influence of the Free Edge upon the Strength of Angle-Ply Laminates, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973 pp. 218-228
- PHILLIPS, D.C., TETELMANN, A.S.: The Fracture Toughness of Fibre Composites. *Composites* (1972), p. 216-223
- PHILLIPS, D.C.: Crack Propagation in Carbon Fibre Composites. 3. Int. Tagung über Bruch, München, April 1973, VII-232
- PHILLIPS, D.C.: The Fracture Mechanics of Carbon Fibre Laminates. *J. Composite Materials* 8 (1974), 130-141
- PUCK, A.: Zum Deformationsverhalten und Bruchmechanismus von unidirektionalem und orthogonalem Glasfaser/Kunststoff. *Kunststoffe* 55 (1965), 913-922
- PUCK, A.: Festigkeitsberechnung an Glasfaser/Kunststoff-Laminaten bei zusammengesetzter Beanspruchung. *Bruchhypothesen und Kunststoffe* 59 (1969), S. 781-787
- PUCK, A., SCHNEIDER, W.: On Failure Mechanisms and Failure Criteria of Filament-Wound Glass-Fibre/Resin Composites. *Plastics and Polymers* (1969, pp. 33-44)
- PUPPO, A.H., EVENSON, H.A.: Strength of Anisotropic Materials under Combined Stresses. *AIAA Journal* 10 (1972), No. 4
- RADAJ, D.: Festigkeitsnachweise. Teil I: Grundverfahren. Teil II: Sonderverfahren. Düsseldorf: DVS, 1974, 206-200 S.
- REUTER, R.C., JR.: Prediction and Control of Macroscopic Fabrication Stresses in Hoop Wound, Fiberglass Rings, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 264-276
- RILEY, V.R.: Fibre/Fibre Interaction. *J. Composite Materials* 2 (1968), 436-446
- RODERICK, G.L., EVERETT, R.A., CREWS, J.H., JR.: Debond Propagation in Composite-Reinforced Metals, Fatigue of Composite Materials, ASTM STP 569, American Society for Testing and Materials, 1975, pp. 295-306

- ROSE, J.L., CARSON, J.M., LEIDEL, D.J.: Ultrasonic Procedures for Inspecting Composite Tubes, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 311-325
- ROSKOTHEN, H.-J.: Untersuchungen zur Dimensionierung von Bauteilen aus Kunststoffen - Zeitabhängige Verformungen bei mehrachsigen Spannungszuständen. VDI-Z 117 (1975), 553-561 und Dissertation am IKV der RWTH Aachen (1974), ca. 220 S.
- ROTEM, A., HASHIN, Z.: Failure Modes of Angle Ply Laminates. J. Composite Materials 9 (1975), 191-206
- ROTH, S., GRUENINGER, G.: Beitrag zur Deutung des Querkzugversagens von Stranglaminaten. Composites 3 (1972), pp. 112-118
- SADOWSKY, M.A., PU, S.L., HUSSAIN, M.A.: Buckling of Microfibers. J. of Applied Mechanics (1967), 1011-1016
- SANFORD, R.J., STONESIFER, F.R.: Fracture Toughness Measurements in Unidirectional Glass-Reinforced Plastics. J. Composite Materials, Vol. 5, 1971, p. 241-245
- SCHAPER, H.: Adhesive and Cohesive Failure Criteria of Unidirectional Fibre/Matrix Composites. 3. Int. Tagung über Bruch, München, April 1973, VII-234
- SCHNEIDER, W.: Berechnung und Gestaltung hochbeanspruchbarer Bauteile aus glasfaserverstärktem Kunststoff. VDI-Z 115 (1973), 375-382
- SCHULZ, P., ZÖHREN, J.: Möglichkeiten bei der Kunststoff-Fertigteilprüfung. Kunststoffe 64 (1974), 452-457
- SIDEY, G.R., BRADSHAW, F.J.: Some Investigations on Carbon-Fibre-Reinforced Plastics under Impact Loading, and Measurements of Fracture Energies. Int. Conf. on Carbon Fibres, their Composites and Applications, London 1971, paper no. 25, 6 p.
- SIH, G.C., PARIS, P.C., IRWIN, G.R.: On Cracks in rectilinearly Anisotropic Bodies. Int. Fracture Mechanics, I, 1965, p. 189-203
- SIH, G.C.: Methods of Analysis and Solutions for Crack Problems. Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1973, 513 p.
- SIH, G.C., CHEN, E.P.: Fracture Analysis of Unidirectional Composites. J. Composite Materials, Vol. 7, 1973, p. 230-245
- SIH, G.C., CHEN, E.P., HUANG, S.L., MC QUILLEN, E.J.: Material Characterization on the Fracture of Filament-Reinforced Composites. J. Composite Materials 9 (1975), 167-186
- SKUPIN, L.: Verformungseigenschaften von Glasfaser-Kunststoff bei mehrachsiger Beanspruchung. Kunststoffe 60 (1970), 1059-1065
- SPÄHN, H., LENZ, H.W.: Die Bruchmechanik und ihre Anwendung auf Fragen der Bauteilzähigkeit. Z. f. Werkstofftechnik, 1973, S. 26-25; Anwendungsbeispiele, S. 351-360
- TETELMANN, A.S.: Fracture Processes in Fiber Composite Materials. Aus Testing and Design, 473-502. ASTM STP 460, Philadelphia, 1969
- TIROSH, J., BERG, C.A.: Experimental Stress Intensity Factor Measurements in Orthotropic Composites, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 663-673
- TRANTINA, G.G.: Combined Mode Crack Extension in Adhesive Joints. J. Composite Materials 6 (1972), 371-385
- ULRICH, E.: Elementare Festigkeitslehre. Essen: Girardet, 1967, 475 S.



UNDERWOOD, J.J.: Crack-Tip Deformation Measurements Accompanying Fracture in Fibrous and Laminar Composites, Composite materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 376-394

WILLIAMS, M.L.: The Relation of Continuum Mechanics to Adhesive Fracture J. Adhesion 4 (1972), 307-332

WHITNEY, J.M., NUISMER, R.J.: Stress Fracture Criteria for Laminated Composites Containing Stress Concentrations. J. Composite Materials 8 (1974), 253-265

WRIGHT, M.A., IANNUZZI, F.A.: The Application of the Principles of Linear Elastic Fracture Mechanics to Unidirectional Fiber Reinforced Composite Materials. J. Composite Materials (1973), 430-447

WU, E.M.: Fracture Mechanics of Anisotropic Plates. Aus Composite Materials Workshop, 20-43, Technomic: Stamford, 1968

ZWEBEN, CARL: Fracture Mechanics and Composite Materials: A Critical Analysis, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 65-97

## Kapitel 8:

- ADAMS, R.D., FLITCROFT, J.E., HANCOX, N.L., REYNOLDS, W.N.: Effects of Shear Damage on the Torsional Behaviour of Carbon Fibre Reinforced Plastics. J. Composite Materials 7 (1973), 68-75
- ALTHOF, W., MUELLER, J.: Untersuchungen an geklebten und lösbaeren Verbindungen von faserverstärkten Kunststoffen. Kunststoffe 60 (1970), 911-916
- AMIBAYAT, J., HEARLE, J.W.S.: Properties of Unit Composites as Determined by the Properties of the Interface. Part 1: Mechanism of Matrix-Fibre Load Transfer, Fibre Science and Technology 2 (1969), 123-141 and Part 2. Effect of Fibre Length and Slippage on the Modulus of Unit Composites, 143-153
- ARMENAKAS, A.E., GARG, S.K., SCIAMARELLA, C.A., SVALBONAS, V.: Experimental Study of the Failure Mechanism and Strength Characteristics of Fiber Bundles and Composites. Experimental Mechanics (1972), 1-10
- BADER, M.G., ELLIS, R.M.: The Effect of Notches and Specimen Geometry on the Pendulum Impact Strength of Uniaxial CFRP. Composites (1974), 253-258
- BARGEL, H.-J.: Lebensdaueranalyse bei unregelmäßig schwankender Beanspruchung (random load fatigue). Bericht über ein Kolloquium, Materialsprüfung 11 (1969), Nr. 7, S. 248
- BEAUMONT, P.W.R., PHILLIPS, D.C.: Tensile Strength of Notched Composites. J. of Composite Materials (1972), 32-46
- BEER, F.: Die Festigkeitseigenschaften kreuzweise bewehrter Kunststoffe. VDI-Z. 101 (1959), S. 463-468
- BELANGER, G.: Interlaminar Shear-Delamination. Key Factor in Designing FRP-Tanks. 28th Annual Techn. Conf., 1973, The Society of Plastics Industry, Inc., Section 16 S, pp. 1-3
- BERG, C.A., SALAMA, M.: Fatigue of Graphite Fibre-Reinforced Epoxy in Compression. Fibre Science and Technology 6 (1973), 79-118
- BLOOM, J.M., ADAMS, D.F.: Axial Loading of a Unidirectional Composite - Anisotropic Filaments. J. Composite Materials 3 (1969), p. 186-188
- BROUTMAN, L.J., KROCK, R.H.: Modern Composite Materials. Reading: Addison-Wesley Publ. Comp., 1967
- BROWN, W.F., SRAWLEY, J.E.: Plane Strain Crack Toughness Testing of High Strength Metallic Materials. ASTM Special Techn. Publ. No. 410, 1967, 129 p.
- BRUNSCH, K.: Design of Composite Structure with Respect to Avoid Crack (caused by impact) Propagation. Sess. D, 39th AGARD Muting of Structures and Materials Panel, Munich 1974, 16 p.
- BUHMANN, K.P., WINKLER, TH.: Kennwertbestimmung an GFK unter technischen und wirtschaftlichen Gesichtspunkten. Kunststoffe 63 (1973, H. 12, 9 S.
- CARDRICK, A.W., SMITH, M.A.: An Approach to the Development of Meaningful Design Rules for Fatigue-Loaded CFRP Components. Composites 1974, 96-100
- CHIAO, T.T., MOORE, R.L.: Tensile Properties of PRD-49 Fiber in Epoxy Matrix. Composite Materials (1972), S. 547
- CHIAO, T.T., MOORE, R.L.: Organic-Fibre/Epoxy Composites. Composites, Jan. 1973

- CHIAO, T.T., WELLS, J.E., MOORE, R.L., HAMSTAD, M.A.: Stress-Rupture Behavior of Strands of an Organic Fiber/Epoxy Matrix, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society of Testing and Materials, 1974, pp. 209-224
- CHRISTENSEN, R.H., BELLINFANTE, R.J.: Some Considerations in the Fatigue Design of Launch and Spacecraft Structures. NASA-CR 242, Langley Research Center, 1965
- COLCLOUGH, W.J., RUSSELL, J. G.: The Development of a Composite Propeller Blade with a Carbon Fibre Reinforced Plastics Spar. Aeron. Journal (1972), 53-56
- COLLINGS, T.A.: Transverse Compressive Behavior of Unidirectional Carbon Fibre Reinforced Plastics. Composites (1974), 108-116
- CRUSE, T.A., ET AL.: Interactive Program for Analysis and Design Problems in Advanced Composites Technology. AFML-TR-71-268, Carnegie-Messon University, Pittsburgh, 1971, p. 296
- CRUSE, T.A.: Tensile Strength of Notched Composites. J. Composite Materials, Vol. 7, 1973, p. 213-229
- DANIELS, B.K., HARAKAS, N.K., JACKSON, R.C.: Short Beam Shear Tests of Graphite Fiber Composites. Fibre Science and Technology 3 (1971), 187-208
- DÄPPEN, W.: Untersuchungen an PRD 49-Fasern und -Laminaten. Mitteilung aus dem DFVLR-Institut für Flugzeugbau, Braunschweig-Flughafen
- DIETMANN, H.: Kerbwirkung und Festigkeitsberechnung. VDI-Z 112 (1970), Teil 1: S. 617-620, Teil 2: S. 698-702
- DHARAN, C.K.H.: Fatigue Failure Mechanisms in a Unidirectionally Reinforced Composite Material, Fatigue of Composite Materials, ASTM STP 569, American Society for Testing and Materials, 1975, pp. 171-188.
- DOREY, G.: Fracture Behavior and Residual Strength of Carbon Fibre Composites Subjected to Impact Loads. AGARD, Structures and Materials Panel, München, Okt. 1974, B3, 11 p.
- DVORAK, G.J., TARN, J.Q.: Fatigue and Shakedown in Metal Matrix Composites, Fatigue of Composite Materials, ASTM STP 569, American Society for Testing and Materials, 1975, pp. 145-168
- EHRENSTEIN, G.W., NEITZEL, M., SCHIK, J.P.: Probleme bei der Ermittlung von Kennwerten von GFK. Kunststoffe (1972), H. 12, 6 S.
- FÖRSTER, R.: Festigkeitsrechnung und Festigkeitsoptimierung an Mehrschichtenverbunden aus Glasfaser/Kunststoff. Diss., TH Darmstadt, 1971
- FUKUDA, H., KAWATA, K.: Stress and Strain Fields in Short Fibre-Reinforced Composites. Fibre Science and Technology 7 (1974), 129-156
- GATTI, A., MULLIN, BERRY: The Role of Bond Strength in the Fracture of Advanced Filament Reinforced Composites. Aus Testing and Design, 573-582, ASTM STP 460, Philadelphia, 1969
- GAUBE, E., KAUSCH, H.H.: Bruchtheorien bei der industriellen Anwendung von Thermoplasten und glasfaserverstärkten Kunststoffen. Kunststoffe 63 (1973), 391-397
- GEIGER, J., FUELLER, J.: Whisker als Verstärkungskomponente von Verbundwerkstoffen, verfahrenstechnische Methoden zur Ausrichtung. Kunststoffe 7 (1972), H. 12

- GRESZCZUK, L.B.: Compressive Strength and Failure Modes of Unidirectional Composites, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 192-217
- GRESZCZUK, L.B.: Consideration of Failure Modes in the Design of Composite Structures. AGARD, Structures and Materials Panel, Munich, Oct. 1974, 22 pp.
- GROVER, H.: Using Fatigue Information in Design. Experimental Mechanics 12 (1972), p. 251-256
- GRUBISIC, V.: Festigkeitsbeurteilung von Bauteilen mit Zufallswerten für Mittelspannung und Spannungsamplitude. VDI-Z 116 (1974), 316-318
- HACKMAN: On Military Aircraft. Kapitel aus ASTM, Appl. of Composite Materials, STP 524
- HALPIN, J.C.: Introduction to Viscoelasticity. Aus Composite Materials Workshop, 87-152, Technomic: Stamford, 1968
- HALPIN, J.C.: Structure-Property Relations and Reliability Concepts. J. Composite Materials 6 (1972), 208-
- HAFERKAMP, H.: Zum Alterungsverhalten glasfaserverstärkter Kunststoffe, Dissertation an der TH Hannover, 1962
- HANCOX, N.L.: Izod Impact Testing of Carbon-Fibre-Reinforced Plastics. Composites 1971, 41-45
- HANCOX, N.L., WELLS, H.: Izod Impact Properties of Carbon-Fibre/Glass-Fibre Sandwich Structures. Composites (1973), 26-30
- HANKE, M., HRMIR, M.: Zur Berechnung der Betriebsfestigkeit nach der Schaden-Akkumulationshypothese von Corten-Dolan. Materialprüfung 11 (1969) Nr. 6, S. 189-195
- HANSON, M.P.: Static and Dynamic Fatigue Behavior of Glass Filament-Wound Pressure Vessels at Ambient and Cryogenic Temperatures. Science of Advanced Materials and Process Eng. Proc. 15 (1969), 249-256
- HAHN, H.T., TSAI, S.W.: Graphical Determination of Stiffness and Strength of Composite Laminates. J. Composite Materials 8 (1974), 160-176
- HARRIS, B.: The Strength of Fibre Composites. Composites (1972), p. 152-167
- HECKEL, K.: Zur Lebensdauervorhersage gekerbter, schwingend beanspruchter Bauteile. Berg- und Hüttenmännische Monatshefte 120, H. 1, 25-32
- HEEP u.a.: Schwerpunktdiskussionstexte zum Thema GFK-Behälter. Kunststoffe (1973), H. 12
- HELLER, R.A., CHIBA, T.: Alleviation of the Stress Concentration with Analogue Reinforcement. Exp. Mechanics (1973), 519-525
- HERTEL, H.: Ermüdungsfestigkeit der Konstruktionen. Berlin: Springer, 1969, 659 S.
- HOEPPNER, D.W., KRUPP, N.E.: Prediction of Component Life by Application of Fatigue Crack Growth Knowledge. Eng. Fracture Mech. 6 (1974), 47-70
- HOLTMANN, R., MENGES, G., V. HARMER, A.: Neue Glasseidenfäden für hochfeste Polyester- und Epoxidharzlaminate. Kunststoffe 63 (1973), 839-844

- IRWIN, L.H., DUNLAP, W.A., COMPTON, P.V.: Uniaxial, Biaxial and Fatigue Properties of Polyester Fiber Glass, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 395-418
- ISHAI, O., LAVENGOOD, R.E.: Characterizing Strength of Unidirectional Composites. Aus Testing and Design, S.271-281, ASTM STP 460, 1969
- ISHAI, O.: Failure of Unidirectional Composites in Tension. J. of Eng. Mech. Div. 1971, 205-221
- KABELKA, J., VEJCHAR, J.: Zur Problematik der Festigkeit unidirectional verstärkter Kunststoffe. Kunststoffe 62 (1972), 859-863
- KAMINSKI, B.E.: Effects of Specimen Geometry on the Strength of Composite Materials, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 181-191
- KIES, I.A.: Maximum Strains in the Resin of Fiberglass Composites. NRL Rep. 5752, 1962
- KIES, I.A.: The Strength of Glass Fibers and the Failure of Filament Wound Pressure Vessels. NRL Rep. 6034
- KINNA, M.A.: Multiaxial Fatigue Properties of Selected Filament Wound Plastics Materials. U.S. NOL, 1966, 253-291
- KLEINER, W., LÜSSMANN, W.: Ermittlung charakteristischer Werkstoffgrößen zum Berechnen von GFK-Wickelstrukturen unter betriebsgerechten Bedingungen. Kunststoffe (1972), H. 12, 7 S.
- KNAPPE, W., WURTINGER, H.: Einfluß von Schwingbelastungen auf die Rest-Kurzzeitfestigkeit von GFK-Laminaten. 8. AVK-Tagung, 1970, 7 S. Kunststoffe
- KNIGHT, M., HAHN, H.T.: Strength and Elastic Modulus of a Randomly-Distributed Short Fiber Composite. J. Composite Materials 9 (1975), 77-91
- LARK, R.F.: Filament-Wound Composite Vessel Materials Technology. NASA TM X-68196, Oct. 1973
- MATTING, A., WAGENER, K.: Über das Dauerfestigkeitsverhalten glasfaserverstärkter Kunststoffe. Kunststoffe 54 (1964) Nr. 12, S. 746-749
- MATTING, A., NEITZEL, M.: Verhalten von glasfaserverstärkten Kunststoffen unter statisch wechselnder gleichförmig schwingender Last. Kunststoffe 56 (1966) Nr. 1, S. 855-860
- MC KENNA, G.P., MANDELL, J.F., MC GARRY, F.J.: Interlaminar Strength and Toughness of Fiberglass Laminates. 29th Ann. Conf. Soc. Plastic Ind. (SPI), Febr. 1974, 13 C, S. 1-8
- MENGES, G., SCHWARZ, O.: Untersuchungen zum mechanischen Verhalten glasfaserverstärkter Kunststoffe bei statischer Langzeitbelastung. Der Plastverarbeiter 19 (1968) Nr. 9, S. 701-706
- MENGES, G., HESSELT, F.: Beitrag zum Alterungsverhalten von glasfaserverstärkten Kunststoffen. Kunststoffe 58 (1968), Teil 1: Nr. 7, S. 509-514, Teil 2: Nr. 8, S. 575-580
- MENGES, G.: Kunststoffe unter Druckbeanspruchung. VDI-Nachrichten Nr. 5, 29. Jan. 1969, S. 14
- MENGES, G., SCHWARZ, O.: Kennwerte für das Langzeitverhalten von glasseidenmattenverstärkten ungesättigten Polyesterharzen unter ruhender Last. Kunststoffe 59 (1969), 775-779

MENGES, G., ROSKOTHEN, H.J., ADAMCZAK, H.: Zum Kriech- und Alterungsverhalten glasfaserverstärkter Kunststoffe. Kunststoffe (1972), H. 12, 9 S.

MINER, M.A.: Cumulative Damage in Fatigue. Journal of Appl. Mechanics (1945), A 159-163

MITTON, P.D.: Test your Test: It's Cruder than You think. American Chemical Society, Div. Org. Coatings Plast. Chem. Pap. 165 th Meeting, 33 (1973), 84-91

NEITZEL, M.: Probleme der Materialprüfung bei Behältern und Rohren aus verstärkten Kunststoffen. Gummi-Asbest-Kunststoffe (1970), 856-861

NIEDERSTADT, G.: Zur Frage der Probenform bei der Prüfung gewickelter Strukturen. Kunststoffe (1973), H. 12, 3 S.

OLSTER, E.F., ROY, P.A.: Tolerance of Advanced Composites to Ballistic Damage, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 583-603

OPLINGER, D.W., PARKER, B.S., CHIANG, F.P.: Edge Effect Studies in Fiber-Reinforced Laminates. Exp. Mechanics 1974, 347-354

OUTWATER, I.O.: The Effect of Repeated Loading on Filament Wound Internal Pressure Vessels. Rep. 20 th SPI-Conference, University of Vermont

OWEN, M.J.: Fatigue Behavior of Orthogonally Cross-Plied Carbon-Fibre-Reinforced Plastics under Axial Loading. Int. Conf. on Carbon Fibres, their Composites and Applications, 51.1-51.10, London, 1971

OWEN, M.J., MORRIS, S.: Some Interlaminar - Shear Fatigue Properties of Carbon-Fibre-Reinforced Plastics. Plastics and Polymers (1972), 201-216

PAGANO, N.J., TSAI, S.W.: Micromechanics of Composite Media. Aus Composite Materials Workshop, 1-8, Technomic: Stamford, 1968

PAGANO, N.J., PIPES, R.B.: Some Observations of the Interlaminar Strength of Composite Materials. Int. J. Sciences (1973), pp. 679-688

PAGANO, N.J.: On the Calculation of Interlaminar Normal Stress in Composite Laminate. J. Composite Materials 8 (1974), pp. 65-81

PEPINA, O.: Theoretische Bestimmung des Ausnutzungsgrades von Kohlenstoffasern in Verbundwerkstoffen. Hausmitteilung, MAN-Neue Technologie, München, 1971

PIPES, R.B., KAMINSKI, B.E., PAGANO, N.J.: Influence of the Free Edge upon the Strength of Angle-Ply Laminates, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 218-228

PHILLIPS, D.C.: Crack Propagation in Carbon Fibre Composites.

PIPES, R.B., COLE, B.W.: On the Axis Strength Test for Anisotropic Materials. J. Composite Materials 7 (1973), 246-256

PIPES, R.B.: Interlaminar Shear Fatigue Characteristics of Fiber-Reinforced Composite Materials, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 419-432

- POTTER, R.T.: Repeated Loading and Creep Effects in Shear Property Measurements on Unidirectional CFRP. Composites (1974), 261-265
- PUPPO, A.H., EVENSOON H.A.: Interlaminar Shear in Laminated Composites under Generalized Plane Stress. J. Composite Materials 4 (1970), pp. 204-220
- RABOTNOV, J., ILJUSCHIN, A.: Methoden der Viskoelastizitätstheorie. München: Carl Hanser, 1970, 82 S.
- RADAJ, D.: Festigkeitsnachweise. Teil I: Grundverfahren. Teil II: Sonderverfahren. Düsseldorf: DVS, 1974, 206-200
- REED, D.L., ROGER, C.W.: Design Criteria. 18th Nat. SAMPE, Symp. and Exhib., 1973, 23-33
- REIFSNIDER: Fatigue of Composite Materials: An Overview of Present Practices and Understandings. AGARD-Vortragsveranstaltung bei der IABG in Ottobrunn, Deutschland, 4.6.1975
- ROSEN, B.W., DOW, N.F.: Mechanics of Failure of Fibrous Composites. Fracture Vol. 7, Fracture of Nonmetals and Composites, Academic Press, 1972, 611-672
- ROSKOTHEN, H.-J.: Untersuchungen zur Dimensionierung von Bauteilen aus Kunststoffen - Zeitabhängige Verformungen bei mehrachsigen Spannungszuständen. VDI-Z 117 (1975), 553-561
- ROTH, S., GRUENINGER, G.: Beitrag zur Deutung des Querkzugversagens von Sträglaminaten. Composites 3 (1972), pp. 112-118
- ROWLANDS, R.E., DANIEL, I.M., WHITESIDE, J.B.: Geometric and Loading Effects on Strength of Composite Plates with Cutouts, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 361-375
- SANDERS, R.C.: The Effect of Carbon Fibre Composites on Design. Aeron. J. Vol. 75 (1971), pp. 867-875
- SCALA, E.: High-Strength Filaments for Cables and Lines, Analysis of the Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 390-409
- SAYERS, K.H.: Interlaminar Shear Strength of a Carbon Fibre Reinforced Composite Material under Impact Conditions. J. of Comp. Material, 1973, 129-133
- SCHAPERY, R.A.: Stress Analysis of Viscoelastic Composite Materials. Aus Composite Materials Workshop, 153-192. Technomic: Stamford, 1968
- SCHNEIDER, G.: Untersuchung der Schubspannungsverteilung an kurzen, breiten Balken, die durch Einzelkräfte belastet sind (NOL-Ringstücke). AV/K 096 506 - Ex - 002, MAN-Neue Technologie, München, 1972
- SCHNEIDER, W.: Mikromechanische Betrachtung von Bruchkriterien unidirektional verstärkter Schichten aus Glasfaser, Kunststoff. Diss. TH-Darmstadt, 1974, 100 S.
- SIDEY, G.R., BRADSHAW, F.J.: Some Investigations on Carbon-Fibre-Reinforced Plastics under Impact Loading, and Measurements of Fracture Energies. Int. Conf. on Carbon Fibres, their Composites and Applications, London, 1971, paper no. 25, 6 p.
- SIEBEL, E.: Handbuch der Werkstoffprüfung. Berlin: Springer, 1955, 754
- SIERAKOWSKI, R.L., EBCIOGLU, I.K.: On Interlaminar Shear Stresses in Composites. J. Composite Materials 4 (1970), pp. 144-149

- SIH, G.C., HILTON, P.D., BADALIAN, R., SHENBERGER, P.S., VILLARREAL, G.: Fracture Mechanics for Fibrous Composites, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 98-132
- SIH, G.C., PAGANO, N.J.: Fracture Toughness of Fiber-Reinforced Composites. 3. Int. Tagung über Bruch, München, April 1973, VII-432
- SIMON, R.A.: Carbon Fiber Internal Pressure Vessels. NASA CR-121138, NOL, White Oak, 1973 20 p.
- SIMS, D.F., HALPIN J.C.: Methods for Determining the Elastic and Viscoelastic Response of Composite Materials, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp: 46-66
- SKUPIN, L.: Problem der Lebensdauer von GFK. Der Plastverarbeiter 16 (1965) Nr. 9, S. 527-530
- SKUPIN, L.: Verformungseigenschaften von Glasfaser-Kunststoff bei mehrachsiger Beanspruchung. Kunststoffe 60 (1970), 1057-1065
- STEEL, D.J.: The Vreep and Stress-Rupture of Reinforced Plastics. Trans. J. Plastics Inst (1965), 161-167
- SULLIVAN, T.L., CHAMIS, C.C.: Some Important Aspects in Testing High-Modulus Fiber Composite Tubes in Axial Tension, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 277-292
- TAPROGGE, G.: Untersuchungen zur Ermittlung zulässiger Beanspruchungen thermoplastischer Kunststoffe bei statischer und schwingender Zu- und Biegebeanspruchung. Technisch-wissenschaftlicher Bericht des Instituts für Kunststoffverarbeitung an der TH Aachen, gleichzeitig als Dissertation an der TH Aachen (D 82), 1966
- VOGT, C.W., HANINK, E.S., TRICE, J.M.: Evaluation of Testing Techniques for Filament Wound Composites. U.S. NOL, 1966, 186-251
- WADDAPS, M.E., EISENMANN, J.R., KAMINSKI, B.E.: Macroscopic Fracture Mechanics of Advanced Composite Materials. J. Composite Materials 5 (1971), 446-454
- WEIDMANN, G.W., OGORGIWICZ, R.M.: Tensile Creep of a Unidirectional Glass Fibre-Epoxy Laminate. Composites (1974), 117-121
- WIEDEMANN, J., GRIESE, H., GLAHN, M.: Stress and Strength Analysis of Reinforced Plastic with Holes. Consequences on Design. AGARD Structures and Materials Panel, München, Okt. 1974, 14 S.
- WILSON, F.N.: Development of Fatigue-Resistant Filament-Wound Emergency Air Storage Bottles. 19th SPI-Report
- WHITESIDE, J.B., DANIEL, I.M., ROWLANS, R.E.: The Behavior of Advanced Filamentary Composite Plates with Cutouts. AFFDL-TR-73-48, Grumman Aerospace Corporation Bethpage, 1973, p. 170
- WHITNEY, J.M., BROWNING, C.E.: Free-Edge Delamination of Tensile Coupons. J. Comp. Materials, Vol. 6, 1972, pp. 300-303
- WHITNEY, J.M.: Free-Edge Effects in the Characterization of Composite Materials, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers in Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 167-180
- WHITNEY, H.J., KONISHI, J.M.: Approximate Stresses in an Orthotropic Plate Containing a Circular Hole. J. Composite Materials 9 (1975), 157 p.



WILLAX, H.O., EHRENSTEIN, G.W.: Der Einfluß von Tränkungs- und Benetzungseigenschaften auf mechanische Kenngrößen glasfaserverstärkter Kunststoffe. Kunststoffe 1972, H. 12 6 S.

WOEBCKEN, W.: Langzeitverhalten der Kunststoffe als Baustoffe. VDI-Z 116 (1974), 335-342

WRIGHT, O.C.: Development of a High Performance PRD-49-III Filament-Wound Chamber for Trident I (C 4) Third Stage. AIAA/SAE 9 th Propulsion Conf., AIAA Paper No. 73-1259, 1973, 17 p.

WU, E.M.: Optimal Experimental Measurements of Anisotropic Failure Tensors. J. Composite Materials 6 (1972), 472-489

WU, E.M., JERINA, K.L., LAVENGOOD, R.E.: Data Averaging of Anisotropic Composite Material Constants, Analysis of Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 229-252

WU, E.M., SCHEUBLEIN, J.K.: Laminate Strength-A Direct Characterization Procedure, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 188-206

ZWEBEN, C.: Tensile Strength of Fiber-Reinforced Composites.: Basic Concepts and Recent Developments. Aus Testing and Design, 528-539. ASTM STP 460, Philadelphia, 1969

ZWEBEN, C., ROSEN, B.W.: A Statistical Theory of Material Strength with Application to Composite Materials. J. Jech. Phys. Solids 18 (1970), 189-206

Glasfaserverstärkte Kunststoffe. Lehrgangshandbuch des VDI-Bildungswerk, Teil 1 "Werkstoffe und Verfahren", Teil 2 "Anwendung und Konstruktion, 1972

Testing Techniques for Filament Reinforced Plastics Symposium, \$ September 1966. AFML TR 66-274, Wright Patterson Air Force Base Ohio, 1967, 860 p.

## Kapitel 9:

- APPEL, L.B.: Design and Fabrication of a Flight Antenna for a Planetary Spacecraft. 18 th Nat. SAMPE Symp. and Exhib., Vol. 18, 1973, 437-446
- AU, N.N., SCHEYHING, E.R., SUMMERS, G.D.: Structural Synthesis of Composite Materials for Ablative Nozzle Extensions. "Testing and Design", 444-459, ASTM STP 460,
- BAILEY, R.L., JEKSEN, W.M.: Advanced Composite Solid Rocket Motor Chamber. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, under Contract NAS 7-100, 1974
- BERNERT, J., HINTERSDORF, G., WENDE, A.: Praktische Dimensionierungsverfahren für tragende GFK-Bauteile. Kunststoffe 56 (1966), 847-854
- BUB, H.: Die Zulassung neuer Baustoffe, Bauteile und Bauarten. Kunststoffe 57 (1967) Nr. 5, S. 353-355
- BUXTON, M., HANSON, M.P., FERNANDEZ: Design Improvements in Liners for Glass Fiber Filament-Wound Tanks to contain Cryogenic Fluids. NASA CR 54-854
- CHAMIS, C.C.: Important Factors in Fiber Composite Design. Part 1, Modern Plastics (Sept. 1969), pp. 176-182, Part 2, Modern Plastics (Oct. 1969), pp. 106-111
- CHIAO, T.T., HAMSTAD, M.A., MARCON, M.A., HANAFEE, J.E.: Filament-Wound Kevlar 49/Epoxy Pressure Vessels. NASA Cr-134 506, UCRL-51466, Lawrence Liverence Laboratory, 1973
- COLCLOUGH, W.J., RUSSELL, R.G.: The Development of a Composite Propeller Blade with a Carbon Fibre Reinforced Plastics Spar. Aeron. Journal (1972), 53-56
- CRUSE, T.A. ET AL.: Interactive Programm for Analysis and Design Problems in Advanced Composites Technology. AFML-TR-71-268, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, 1971, p. 296
- CUNTZE, R.: Festigkeitsverhalten eines GFK-Tanks beim Wickeln und im Betrieb. AV 504 - Es - 018 (intern), MAN-Neue Technologie, München, 1970, 13 Seiten
- DALLAS, R.N.: Methods of Joining Advanced Fibrous Composites. Composite Materials: Testing and Design, 381-392, ASTM STP 460, 1969
- DAVIDSON, J.R.: Reliability After Inspection, Fatigue of Composite Materials, ASTM STP 569, American Society for Testing and Materials, 1975, pp. 323-334
- DIETERICH, G.: Die Sicherheit von Tragwerken aus verstärkten Kunststoffen. Kunststoffe 58 (1968), S. 872-876
- DIETZ, A.G.H.: Composite Engineering Laminates. Cambridge: The MIT Press, 1969, 328 p.
- DOLFEN, E.: Bemessungsgrundlagen für tragende Bauelemente aus glasfaserverstärkten Kunststoffen. Frankfurt: Umschau Verlag, 1969
- EBNER, H.: The Problem of Structural Safety with Particular Reference to Safety Requirements. NASA, AGARD REPORT Nr. 150, Nov. 1957, 23
- ELLIOTT, YURENKA, S.: Fabrication Processing, Applications of Composite Materials, ASTM STP 524, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 163-185

- FELDMAN, A., GIGUERE, A.J., YOUNG, D.A.: Design Application of High-Modulus Filament-Wound Composites to Aerospace Propellant and Pressurization Tanks. 15 th SAMPE Proc. Symposium (1969), pp. 151-161, Martin Marietta Corporation
- FOERSTER, R.: Grundlagen der Optimierung von Mehrschichtenverbunden aus faserverstärkten Werkstoffen. Teil 1, Kunststoffe 62 (1972) S. 57-62, Teil 2, Kunststoffe 62 (1972), S. 181-186
- FOREST, J.D., CHRISTIAN, J.L.: Space Structures, Applications of Composite Materials, ASTM STP 524, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 134-162
- FREEMAN, W.T., KUEBELER, G.C.: Mechanical and Physical Properties of Advanced Composites, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 435-456
- FRISCHMUTH, R.W., HACKER, P.T.: Investigation for Bonded Plastic Tape for Lining Filament-Wound Fiber-Glass Cryogenic Propellant Tanks. NASA TN D-3206, Lewis Research Center, 1966
- GALLEP, H.: Die Zulassung tragender Bauteile aus Kunststoffen. VDI-Bericht Nr. 122, 1968, S. 83-87 VDI-Verlag, Düsseldorf
- GEBELEIN, H.: Grundlagen der Zuverlässigkeitstheorie. 1. Lehrgang für Raumfahrttechnik, München (1962), Bd. IV, 32-2 bis 11
- GEIER, B.: Berechnung zweischichtiger, durch Innendruck belasteter, fasergewickelter Rotationsschalen. DLR FB 68-84, DFL-Institut für Flugzeugbau, Braunschweig, 1968
- GERSTLE, F.P., JR.: Analysis of Filament-Reinforced Spherical Pressure Vessels, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 694-631
- GLEICH, D.: Cryogenically formed prestressed Composite Fibre-Metal Structures for O<sub>2</sub>/N<sub>2</sub> high pressure Gas Tanks. Space Shuttle Materials, Volume 3, 2. Seiten 527 ff, October 1971
- GOODMANN, J.W., GLIKSMAN, J.A.: Structural Evaluation of Long Boron Composite Columns. Testing and Design, 460-469. ASTM STP 460, Philadelphia, 1969
- GRAF, U., HENNING, H.J., STANGE, K.: Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1966, 2. Auflage, 362 S.
- GREENWOOD, J.H.: Faserverstärkte Kunststoffe. Glas- oder kohlenstoffverstärkte Kunststoffe für Kleincentrifugen. Techn. Rundschau, 1974, Nr. 38, S. 41
- GROSSKOPF, P., WINKLER, TH.: Auslegung von GFK:Hartschaum-Verbundwerkstoffen. Kunststoffe 63 (1973), S. 881-888
- GRÜNEWALD, R.: Konstruieren mit glasfaserverstärkten Kunststoffen. Kunststoff-Berater 12 (1967), Teil 1: Nr. 5, S. 356-361, Teil 2: Nr. 6, S. 425-427
- GRUENEWALD, K., FRITZSCH, W.: Holographisch-interferometrische Verformungsmessungen an GFK- und KFK-Modelltanks. Kunststoffe (1973), H. 12 6 S.
- JONES, B.H.: Determination of Design Allowables for Composite Materials. Testing and Design, S.307-320, ASTM STP 460, 1969

- JONES, M.W.: Fabrication of Filament-Wound CFRP components. International conference on Carbon Fibres, their Composites and Applications, London 1971, Paper No. 47, P. 5
- HACKMAN: On Military Aircraft. Kapitel aus ASTM, Appl. of Composite Materials, STP 524
- HAFERKAMP, H., EHRENSTEIN, G.W.: Zur Dimensionierung von Bauteilen aus glasfaserverstärkten Kunststoffen. Der Plastverarbeiter 1966, H. 1, 9 S.
- HALPIN, J.C.: Structure-Property Relations and Reliability Concepts. J. Composite Materials 6 (1972), 208-
- HANSON, M.P.: Glass-, Boron- and Graphit-Filament-Wound Resin Composites and Liners for Cryogenic Pressure Vessels. NASA-Conference 1967
- HEEP u.a.: Schwerpunktdiskussionstexte zum Thema GFK-Behälter. Kunststoffe (1973), H. 12
- HERTEL, H.: Leichtbau. Berlin: Springer, 1960
- HINTERSDORF: Tragwerke aus Plasten. Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart, 1972, 240 S.
- HOGGATT, J.T.: High Performance Filament Wound Composites for Pressure Vessel Applications. The Boeing Company, SAMPE 72, p. 157-167
- HOGGATT, J.T.: Thin Metal Lined PRD 49-III Composite Vessels. NASA CR-134555, Jan. 1974, 125 p.
- HÜTTER, U.: Probleme der Krafteinleitung in Glasfaser-Kunststoff-Bauteilen. Kunststoffe 56 (1966) Nr. 12, S. 843-846
- HUMPHREY, W.D., SCHMIDT, W.W.: Filament-Wound Graphite/Epoxy Rocket Motor Case. NASA-CR-128417, Brunswick Corp., Lincoln, under JPL Contract 953210 (1972)
- KAIBA, K.: Computer-Programm zur Auslegung von faserverstärkten Tanks. NT 26-71, MAN-Neue Technologie, München, 1971
- KENDALL, K.: Shrinkage and Peel Strength of Adhesive Joints J. Phys. D.: Appl. Phys. 6 (1973), 1782-1786
- KNAPPE, W.: Grundlagen für die Berechnung definiert beanspruchter Bauteile aus Kunststoff. Teil 1 und 2. VDI-Zeitschrift 107 (1965), Nr. 20, S. 853-861 u. Nr. 22, S. 1085-1093
- KREFT, H.: Experimentalstudie Cryotank. NT 48/70, MAN-Neue Technologie, München, 1970
- KREFT, H., WOLF, G., CUNTZE, R.: Investigation of Fibres and Composites Applicable to the Design of High Pressure Vessels for Satellites. NT 10/72 under ESTEC Contract No. 1485/71 AA,
- KRESS, W.: Auslegung von faserverstärkten Tanks (Planare Kontur). MAN-NT Nr. 13/74, München, 1973, 35 S.
- KOCHENDÖRFER, R., JAHN, H.: Über Belastbarkeit, Technologie und Anwendung borfadenverstärkter Kunststoffe. Kunststoffe (1972), H. 12, 6 S.
- LANGLEY, M.: Carbon Fibres in Engineering. London: Mc Graw Hill, 1973, 262 pp.
- LANGLIE, C.: Statische Berechnung und konstruktive Ausbildungen von Fachwerk-, Sandwich- und Kuppelkonstruktionen aus GF-UP. VDI-Berichte Nr. 213, 1973, S. 57-69

- LARK, R.F.: Filament-Wound Composite Vessel Materials Technology. NASA TM X - 68196, Oct. 1973
- LAUSSERMAIR, F., LASSMANN, S., SIMON, M., KREFT, H.: Kohlefaser-verstärkte Treibstoffbehälter für kryogene Treibstoffe und die Anwendung der CFK-Technologie im Post-Apollo-Programm. Raumfahrtforschung 15 (1971), S. 165 ff
- LEWIS, A., BUSH, G.E.: Improved Cryogenic Resin/Glass-Filament Wound Composites. NASA CR-72163, by Aerojet under Contract NAS-3-6297, 1967
- LOVELL, D.R.: Quality Control in Carbon Fibre Manufacture. Int. Conf. on Carbon Fibres, their Composites and Applications, London, 1971, paper no. 50
- MATTING, A., NEITZEL, M.: Die Zulassung von Bauteilen aus glasfaser-verstärkten Kunststoffen. Vortragsveröffentlichung 159, S. 7-18, Haus der Technik, Essen: Vulkan-Verlag
- MC NEILL, C.E.: Composite Material Characterization for Large Space Structures. SAMPE 72, Materials
- MENGES, G.: Abschätzen der Tragfähigkeit mäßig beanspruchter Kunststoff-Formteile. Kunststoffe 57 (1967) Nr. 6, S. 476-484
- MENGES, G.: Ingenieurmäßige Festigkeitsrechnung für Spritzgußteile aus Thermoplasten. Kunststoffe 57 (1967) Nr. 1, S. 1-8
- MENGES, G., DOLFEN, E.: Prüfung und Dimensionierung von tragenden Bauteilen aus GFK. Vortrag auf der 8. Jahrestagung der AVK in Freudenstadt 1969. Kunststoffe 59 (1969) Nr. 12
- MOORE, J.: "Orthopropgen", Description of a Hewlett-Packard Programme for the Generation of Orthotropic Material Properties. Bericht 4/75, MAN-Neue Technologie, München, 1975
- MORLEY, J.G.: Fibrous Composites with Multiple and Variable-Shear-Strength Interfaces. Composites (1971), 80-84
- MORRIS, E.E., ET AL.: Parametric Study of Glass-Filament-Reinforced Metal Pressure Vessels. NASA CR 54-855, by Aerojet under Contract NAS 3-6292, Karman Center, 1966
- MORRIS, E.E.: Glass-Fiber-Reinforced Metal Tanks for Cryogenic Service. NASA CR-72224, by Aerojet under Contract NAS 3-6292, Karman Center, 1967
- MORRIS, E.E.: The Performance of Glass-Filament-Wound Pressure Vessels with Metal Liners at Cryogenic Temperatures. Journal of Materials 4 (1969), pp. 970-1004
- MORRIS, E.E., ALFRING, R.: Cryogenic Boron-Filament-Wound Pressure Vessels. Composite Materials: Testing and Design, ASTM STP 460, American Society for testing and materials, 1969, S. 430-443
- NEITZEL, M.: Die Zulassung von Bauteilen aus GFK. Kunststoff-Berater 14 (1969) Nr. 5, S. 387-399
- NEITZEL, M.: Rohre und Behälter aus glasfaserverstärkten Kunststoffen. VDI-Z. 110 (1968), S. 618-623
- NEITZEL, M.: Verbundwerkstoffe im Druckbehälterbau. Fortschritt-Ber. VDI-Z. Reihe 5, Nr. 8, 1969
- NEITZEL, M., MÜLLER, D.: Zur Problematik der Sicherheit gegen Bruch bei Glasfaser-Kunststoffen. Kunststoffe (1972), H. 12, 7 S.

- NEITZEL, M., SCHELLENBERG, R.: Mechanisch, thermisch und chemisch hochbeanspruchte Zentrifugen aus Glasfaser Kunststoff. Kunststoffe 62 (1972), 799-805
- NEITZEL, M.: Dimensionierungshinweise für die Verwendung von Kunststoffen im Apparatebau. Konstruktion 25 (1973), 201-210
- NICHOLS, R.W.: Pressure Vessel Engineering Technology. Barking: Appl. Science Publishers Lim., 1971, 193 pp.
- NIEDERSTADT, G., DAEPPEN, W., WIELAND, U.: Untersuchungen zur Entwicklung von Druckbehältern aus KFK. IB-085-72/07, DFVLR, Institut f. Flugzeugbau, Braunschweig, 1972
- NIEDERSTADT, G., PABSCH, A.: Ein Beitrag zur Entwicklung von Druckbehältern aus faserverstärkten Kunststoffen. IB 152-73/18, DFVLR, Institut für Flugzeugbau, Braunschweig, 1973
- OEHLER, G., WEBER, A.: Steife Blech- und Kunststoffkonstruktionen. Berlin-Heidelberg-New York; Springer, 1972
- PAO, Y.C.: Momentless Design of Composite Structures with Variable Elastic Constants. J. Composite Materials 3 (1969), pp. 604-616
- PETER, K., HOFSTÖTTER, P.: Prüfung und Beurteilung von Tankbehältern aus Glasfaser-Kunststoffen. Kunststoffe 60 (1970), 1074-1079
- PFLEIDERER, K.: GFK Rotorblätter und - Druckbehälter - Zwei hochbeanspruchte Konstruktionen. Kunststoffe 56 (1966), 899-904
- PUCK, A., WURTINGER, H.: Werkstoffgemäße Dimensionierung-Größen für den Entwurf von Bauteilen aus kunstharzgebundenen Glasfasern. Teil I u. II. Westdeutscher Verlag, Köln, Oktober 1963
- PUCK, A.: Zur Beanspruchung und Verformung mehrschichtiger Verbund-Bauelemente aus Glasseidensträngen und Kunststoff. Diss., TH-Darmstadt, 1967, 94 S.
- PUCK, A.: Zur Beanspruchung und Verformung von GFK-Mehrschichtenverbund-Bauelementen. Teil 1-3, Kunststoffe 57 (1967), S. 284-293, S. 573-582, S. 965-973
- PUCK, A.: Einführung in das Gestalten und Dimensionieren in "Konstruieren und Berechnen von GFK-Teilen". Beiheft zum Kunststoff-Berater S. 44-66, Frankfurt: Umschau-Verlag, 1969
- PUTLAYEV, I.A.: Shrinkage Kinetics and Internal Shrinkage Stresses in Polymeric Materials based on Thermosetting Plastics. Structural Chemically Stable Polymer..., Israel Program for Scientific Translations, 1971, pp. 50-58
- REED, D.L., ROGER, C.W.: Design Criteria. 18. th Nat. SAMPE Symp. and Exhib., 1973, 23-33
- REHER, H.: Stützkern- und Schalenbauweise. Berechnung von Verbundkonstruktionen. VDI Bildungswerk, BW 1099
- REMEDIOS, N.C., WOOD, W.G.: Stress Transfer from a Loaded Matrix to a Single Fiber. J. Composite Materials 2 (1968), 517-520
- ROBINSON, E.Y., STONIER, R.A., LOFGREN, C.L.: Development of a Unique Graphite/Epoxy Antenna Subreflector, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 632-650
- ROSATO, D.V., GROVE, C.S.: Filament Winding: Its Development, Manufacture, Applications and Design. New York: John Wiley and Sons, 1964, 360 p.

- SANGER, M.J., REINHART, T.J.: Development of Filament-Wound Tankage for Rocket Oxidizers and Fuels. AS7 12th National SAMPE Symposium, Anaheim, 1967
- SANDERS, R.C.: The Effect of Carbon Fibre Composites on Design. Aeron. J., Vol. 75 (1971), pp. 867-875
- SCHJELDERUP, H.C., JONES, B.H.: Practical Influence of Fibrous Reinforced Composites in Aircraft Structural Design. Testing and Design, 285-306, ASTM STP 460, 1969
- SCHLEHÖFER, B.: Berechnung, Konstruktion und Prüfung von GFK-Druckbehältern. Kunststoffe 58 (1968) Nr. 12, S. 894-900
- SCHNEIDER, W.: Berechnung und Gestaltung hochbeanspruchbarer Bauteile aus glasfaserverstärktem Kunststoff. VDI-Z 115 (1973), 375-382
- SCHOENWALD, H.: Einführung in die Berechnung von Glasfaser-Kunststoff-Teilen. VDI-Bildungswerk, BW 983, 16 S.
- SCHREYER, G.: Konstruieren mit Kunststoffen. München: Carl Hanser, 1972, Teil 1 und 2
- SCOTT, K.A., PAUL, K.T.: Weathering Resistance of Plastics Composites. Article 6 in the Series - Composite Materials and the Designer. Composites 1974, 201-208
- SCHUMACHER, W.: NRW baut. Neue Baustoffe und Bauarten, Zulassung und Normung. Schriftenreihe Nordrhein-Westfalen baut, Bd. 12, Verlag für Wirtschaft und Verwaltung, Essen
- SIMON R.A.: Carbon Fiber Internal Pressure Vessels. NASA Cr-121138, NOL, White Oak, 1973, 20 p.
- SOFFER, L.M., MOLHO, R.: Cryogenic Resins for Glass-Filament-Wound Composites. NASA CR-72114, by Aerojet under Contract NAS-3-6287, 1967
- TRIGG, T.A.: The evaluation of carbon fibre for the filament-winding of rocket motor cases and pressure vessels. International Conference on Carbon Fibres, their Composites and Applications, London 1971, Paper No. 48 P.8
- ÜBING, D., PETER, K.: Qualitätskontrolle und Zulassungsfragen bei hochbeanspruchten Bauteilen aus glasfaserverstärkten Kunststoffen. Kunststoffe 60 (1970), 1015-1023
- VAN DER NEUT, A.: Some Remarks on the Fundamentals of Structural Safety. NASA, AGARD Report Nr. 155, Pars 1957, 20 p.
- WADDAPS, M.E.: Characterization and Design of Composite Materials. Composite Materials Workshop, 254-308, Technomic: Stamford, 1968
- WELLS, A.A.: Composite Materials and the Designer. Composites (1972), 112-118
- WENZEL, H.: Zuverlässigkeit bei komplizierten Entwicklungen. M. Lehrgang für Raumfahrttechnik, München 1962, Bd. IV, 31-1 bis 18
- WETTER, R.: Wickeln eines GFK-Tanks für brennbare Flüssigkeiten. Kunststoffe 65 (1975), 200-203
- WIEDEMANN, J., GRIESE, H., GLAHN, M.: Stress and Strength Analysis of Reinforced Plastic with Holes. Consequence on Design. AGARD Structures and Materials Panel, München, Okt, 1974, 14 S.
- WINKLER, TH., BUHMANN, K.P.: Beitrag zur Auslegung und Beurteilung von GFK-Behältern. Konstruktion 25 (1973), S. 219-230

WHITNEY, J.M., BROWNING, C.E., MAIR, A.: Analysis of the Flexure Test for Laminated Composite Materials, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 30-45

WRIGHT, O.C.: Development of a High Performance PRD-49-III Filament-Wound Chamber for Trident I (C4) Third Stage. AIAA/SAE 9 th Propulsion Conf., AIAA Paper No. 73-1259, 1973, 17 p.

ZIMMERMANN, R.: Some Activites Concerning the Application of Composite Materials to Structural Components of Spacecraft. DFVLR Braunschweig, 1974

ZIMMERMANN, R.: Experimentelle Untersuchungen über den Einfluß der Behälterform auf die Güte fadengewickelter dünnwandiger Druckbehälter aus GFK. IB 152-73/23, Inst. f. Flugzeugbau, DFVLR, Braunschweig 1973, 28 S.

Glasfaserverstärkte Kunststoffe. Lehrgangshandbuch des VDI-Bildungswerk, Teil 1 "Werkstoffe und Verfahren", Teil 2 "Anwendung und Konstruktion, 1972

Handbuch für Strukturberechnung (HSB) Herausgeber: Industrieausschuß für Strukturberechnung (Vorsitzender Dr.-Ing. E. Schreiner , seit 1974)

Structural Design Criteria applicable to a Space Shuttle. NASA SP-8XXX Advance Sopy, 1970

Vorläufige Richtlinien zur Kennwertbestimmung, Zulassungsprüfung und Güteüberwachung von zulassungspflichtigen Bauteilen aus GFK 1. Fassung: Gemeinschaftsentwurf des IKV, IAFW und SKZ, Aachen, Okt. 1967. 2. Fassung: Gemeinschaftsentwurf des AK "Kunststoffe" des LSA, Mai 1969

Zulassung von Kunststoffbauteilen. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1975, 193 S.



## Kapitel 10:

- ARGYRIS, J.H.: Three-Dimensional Anisotropic and Inhomogeneous Elastic Media Matrix Analysis for Small and Large Displacements. Ing.-Archiv 34 (1965), S. 33-55
- BATHE, K.J., WILSON, E.I., PETERSON, R.E.: SAP IV, ein Programmsystem zur linearen statischen und dynamischen Berechnung von Tragwerken. Univ. of California, Berkeley, June 1973
- CHAMIS, C.C.: Computer Code for the Analysis of Multilayered Fiber Composites - Users Manual. NASA TN D-7013, 1971, 116 p.
- COOK, R.D.: Two Hybrid Elements for Analysis of Thick, Thin and Sandwich Plates. Int. J. for Numerical Methods in Engineering 5 (1972), pp. 277-288
- DESAI, C.S., ABEL, J.F.: Introduction to the Finite Element Method. New York: Van Nostrand Reinold, 1972
- CUNTZE, R.: Theoretische Ermittlung der dreidimensionalen Spannungsverteilung in Radialverdichterrädern. DLR FB 70-16, DFVLR-Institut für Festigkeit, Mülheim (Ruhr), 1970
- HALPIN, J.C., JERINA, K.L., JOHNSON, T.A.: Characterization of Composites for the Purpose of Reliability Evaluation, Analysis of Test Methods for High Modulus Fibers and Composites, ASTM STP 521, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 5-64
- HOLAND, I., BELL, K.: Finite Element Methods in Stress Analysis. Trondheim: Tapir, 1970
- KAIBA, K.: Computer-Programm zur Auslegung von faserverstärkten Tanks. NT-26-71, MAN-Neue Technologie, München, 1971
- KAVANAGH, K.T., CLOUGH, R.W.: Finite Element Applications in the Characterization of Elastic Solids. Int. J. Solids Structures 7 (1971), pp. 11-23
- KNOELL, A.C.: Structural Design and Stress Analysis Program for Advanced Composite Filament-Wound Axisymmetric Pressure Vessels (COMTANK). Techn. Rep. 32-1531, JET Propulsion Laboratory, 1971, NASA, N 71-26368
- MAWENYA, A.S., DAVIES, J.D.: Finite Element Bending Analysis of Multilayer Plates. Int. J. f. Numerical Methods in Engineering 8 (1974), pp. 215-225
- RUOFF, G.: Theorie der finiten Elemente in der Elastizität. Vortragzyklus bei M.A.N-Nürnberg, 1972
- KANG, S.I., RENTZEPIS, G.M.: On the Determination of Physical Properties of Composite Materials by a Three-Dimensional Finite-Element Procedure, Composite Materials: Testing and Design (Third-Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, pp. 166-187
- PRYOR, C.W., BARKER, R.M.: A Finite-Element Analysis Including Transverse Shear Effects for Applications to Laminated Plates. AIAA Journal 9 (1971), 912-916
- SRINIVAS, S.: Analysis of Laminated, Composite, Circular Cylindrical Shells with General Boundary Conditions. NASA TR R-412, 1974, 76 p.
- THIEM, H., RAASCH, I.: SAP IV-Version, zur Berechnung mehrschichtiger, dünnwandiger Faserverbundschalen. MAN-NT, München, 197
- ZIENKIEWICZ, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science. New York-Toronto-London: Mc Graw Hill, 1971

## Literaturnachtrag

### Zu Kapitel 2:

- OBERBACH, K.: Kunststoff-Kennwerte für Konstrukteure. München: Carl Hanser, 1805, 1975
- SAECHTLING, H.-J.: Baustofflehre Kunststoffe für Bauingenieure und Architekten, München: Carl Hanser, 240 p, 1975
- SAECHTLING, H.-J.: Kunststoff-Taschenbuch. München: Carl Hanser, 19. Ausgabe, 1026 S., 1974
- SAECHTLING, H.-J.: Kunststoff-Bestimmungstafel. 7. Auflage. München: Carl Hanser Verlag, 1975
- SELDEN, P. H.: Typisierungsvorschlag für GFK-Werkstoffe. Kunststoffe 65 (1975), 334-340
- DOMKE, H.: Zur Bemessung tragender Konstruktionen aus Kunststoffen. Plasticconstruction 5 (1975), 195-202
- VDI-Richtlinie 2020, Kunststoff-Werkstoffe

### Zu Kapitel 5:

- DANIEL, I.M., MULLINEAUX, J.L., AHIMAZ, F.J., LIBER, T.: The Embedded Strain Gage Technique for Testing Boron/Epoxy Composites. Composite Materials: Testing and Design (2nd Conf.), ASTM STP 497, 1972, 257-272
- DIN Taschenbuch 21 "Kunststoffnormen", 1969; DIN Taschenbuch 18, Materialprüfnormen für Kunststoffe, Kautschuk und Gummi, 1969; Berlin: Beuth Vertrieb

### Zu Kapitel 6:

- FREEMAN, W.T., CAMPBELL, M.D.: Thermal Expansion Characteristics of Graphite Reinforced Composite Materials. Composite Materials: Testing and Design (2nd Conf.), ASTM STP 497, 1972, 121-142

### Zu Kapitel 7:

- ASTM. Fracture Toughness Testing and its Application. STP 381, Philadelphia, 1964
- Fatigue of Composite Materials, STP 569: 3401. Foreign Object Impact Damage to Composites, STP 568, 252 p; Instrumented Impact Testing, STP 563, 214 p
- OLSTER, E.F., JONES, R.C.: Toughening Mechanisms in Continuous Filament Undirectionally Reinforced Composites. Composite Materials: Testing and Design (2nd Conf.), ASTM STP 497, 1972, 189-205
- SCHNEIDER, W., BARDENHEIER, R.: Versagenskriterien für Kunststoffe. Z.f. Werkstofftechnik 6 (1975), 339-348

SENDECKY, J.: A Brief Survey of Empirical Multiaxial Strength Criteria for Composites. Composite Materials: Testing and Design (2nd Conf.), ASTM STP 497, 1972, 41-51

WADDAPS, M.E., EISENMANN, J.R., KAMINSKI, B.E.: Macroscopic Fracture Mechanics of Advanced Composite Materials. J. Composite Materials 5 (1971); 446-454

Zu Kapitel 8:

ASTM.:

Foreign Object to Composites. STP 568. 252 pp. Instrumented Impact Testing, STP 563, 214 pp.

Composite Materials: Testing and Design (2nd Conf.), STP 497, 1972, 324 pp

BERG, C.A., TIROSH, J., ISRAELI, M.: Analysis of Short Beam Bending of Fiber, Reinforced Composites. Composite Materials: Testing and Design (2nd Conf.), ASTM STP 497, 1972, 206-218

BROUTMAN, L.J., SAHN, S.: A New Theory to Predict Cumulative Fatigue Damage in Fiberglass Reinforced Plastics. Composite Materials: Testing and Design (2nd Conf.), ASTM STP 497, 1972, 170-188

BROCKMAN, W., ROEDER, E.: Laufzeitverhalten von GFK (GFRP) bei zyklischer Beanspruchung (Teil 1). Kunststoffberater (1975), 263-266

CHAMIS, C.C., HANSON, M.P., SERAFINI, T.T.: Impact Resistance of Undirectional Fiber Composites. Composite Materials: Testing and Design (2nd Conf.), ASTM STP 497, 324-349

DIN Taschenbuch 21 "Kunststoffnormen" 5. Auflage, 1969; DIN Taschenbuch 18 "Materialprüfnormen für Kunststoffe, Kautschuk und Gummi", 1969; Beuth Vertrieb

DIN 53392-Norm-Entwurf: Prüfung von glasfaserverstärkten Kunststoffen; Bestimmung von Zugfestigkeit, Dehnung und Elastizitätsmodul an unidirektional verstärkten Laminaten. Febr. 1975

Fatigue of Composite Materials, STP 569 3401; Foreign Impact Damage to Composites, STP 568 252 p; Instrumented Impact Testing, STP 563, 214 p

GAGGAR, S., BROUTMAN, L.J.: Crack Growth Resistance of Random Fiber Composites. J. Composite Materials 9 (1975), 216-227

GREENWOOD, J.H.: Creep and Fracture of CF RP at 180 - 200°C. Composites 6 (1975), 203-206

GRESZCZUK, L.B.: Stress Concentrations and Failure Criteria for Orthotropic and Anisotropic Plates with Circular Openings. Composite Materials: Testing and Design (2nd Conf.), ASTM STP 497, 363-381

HAHN, M.T., KIM, R.Y.: Proof Testing of Materials. J. Composite Materials 9 (1975), 297-311

- HALPIN, J.C., JERINA, K.L., JOHNSON, T.A.: Characterization of Composites for the Purpose of Reliability Evaluation. ASTM STP 521 (1973), 5-64
- HAMSTAD, M.A., CHIAO, T.T., PATTERSON, R.G.: Fatigue Performance of Metal-Lined Graphite/Epoxy Pressure Vessels. Composites (1975), 249-253
- HARRIS, B., BUNSELL, A.R.: Impact Properties of Glass Fibre/Carbon Fibre Hybrid Composites. Composites (1975), 197-201
- HOLMES, M., AL-KHAYATT, Q.J.: Structural Properties of GRP. Composites 6 (1975), 157-165
- KALNIN, I.L.: Evaluation of Unidirectional Glass-Graphite Fiber/Epoxy Resin Composites. (Hybrid Composites). Composite Materials: Testing and Design (2nd Conf.), ASTM STP 497, 551-563
- KOENEMAN, J.B., KICHER, T.P.: Creep Behaviour of Elastic Fiber/Epoxy Composite Materials. Composite Materials: Testing and Design (2nd Conf.), ASTM STP 497, 503-515
- KREMPL, E.: Die Zeitfestigkeit metallischer Werkstoffe. Materialprüfung 9 (1967), 37-44
- KULKARNI, S.V., RICE, J.S., ROSEN, B.W.: An Investigation of the Compressive Strength of Kevlar 49 (Epoxy Composites. Composites 6 (1975), 217-225
- LARDER, R.A.: Strength Distributions of Single Filaments. J. Composite Materials 9 (1975), 241-243
- MANDELL, J.F., WANG, Su-Su, Mc GARRY, F.J.: The Extension of Crack Tip Damage in Fiber Reinforced Plastic Laminates. J. Composite Materials 9 (1975), 266-287
- MANSON, S.S.: Thermal Stress and Low Cycle Fatigue. New York: Mc Graw Hill, 1966
- MARKHAM, M.F., DAWSON, D.: Interlaminar Shear Strength of Fibre-Reinforced Composites. Composites 6 (1975), 173-176
- MAYER, W.: Dauerfestigkeit von Kunststoffen. VDI-Z 117 (1975), 828-834
- MÜLLER, W.: Über einige Probleme der Dauerschwingfestigkeit von Glasfaserkunststoffen. 2. Int. Tagung über glasfaserverstärkte Kunststoffe und Gießharze, Ostberlin 1967, E 6
- NOVAK, R.C., DECRESCENTE, M.A.: Impact Behaviour of Unidirectional Resin Matrix Composites Tested in the Fiber Direction. Composite Materials. Testing and Design (2nd Conf.), ASTM STP 497, 311-323
- PERRY, J.L., ADAMS, D.F.: Charpy Impact Experiments on Graphite/Epoxy Hybrid Composites. Composites 6 (1975), 166-172
- SALKIND, M.J.: Fatigue of Composites. Composite Materials: Testing and Design (2nd Conf.), ASTM STP 497, 1972, 143-169

SCHALL, R., THOMER, G.: Zur Klassifizierung der Einschußvorgänge. Wehrtechnische Monatshefte, 1963, Beiheft 3, S. 112-120

VDI-Richtlinie 2020: Kunststoff-Werkstoffe; Erstellen von Werkstoffblättern und Hinweise für ihre Anwendung. März 1972

WADDAPS, M.E., EISENMANN, J.R., KAMINSKI, B.E.: Macroscopic Fracture Mechanics of Advanced Composite Materials. J. Composite Materials 5 (1971), 446-454

WELLINGER, K., KRÄGELOH, E.: Werkstoffe und Werkstoffprüfung. Technik-Lexikon. H. 1-4. Hamburg: Rowohlt, 1971

WENDT, F.W., LIEBOWITZ, H., PERRONE, N.: Mechanics of Composite Materials. Proceeding of the fifth Symposium on Naval Structural Mechanics. Oxford: Pergamon press, 1967

Zu Kapitel 9 :

DAO-THIEN, M., MASSOUD, M.: On the Relation between the Factor of Safety and Reliability. J.o. Engeneering f. Ind. (1974), 853-857

HADCOCK, R.N.: Design Philosophy for Boron/Epoxy Structures. Composite Materials: Testing and Design (2nd Conf.), ASTM STP 497, 1972, 28-40

HALPIN, J.C., JERINA, K.L., JOHNSON, T.A.: Characterization of Composites for the Purpose of Reliability Evaluation. ASTM STP 521 (1973), 5-64

Plasticconstruction-Zeitschrift für das Bauen mit Kunststoffen. München: Carl Hanser Verlag

SCHREYER, G.: Konstruieren mit Kunststoffen. München: Carl Hanser Verlag, 2 Teile, 1164 S.

BUCK, K.E., SCHARPF, D.W., STEIN, E., WUNDERLICH, W.: Finite Elemente in der Statik. Berlin: W. Ernst & Sohn, 1973, 456 S.

ODEN, J.T., CLOUGH, R.W., YAMAMOTO, Y.: Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design. Huntsville: UAH-Press, 1972, 787 p.

## Anhang I

Die Transformationsbeziehungen für die Komponenten von Tensoren werden wie folgt hergeleitet:

Analog zu Glg. (4.5) läßt sich bei einem allgemeinen Ausgangs-KOS der Zusammenhang zwischen dem alten Basissystem  $y_k$  und dem neuen Basissystem  $\tilde{y}^i$  festlegen zu

$$\tilde{y}_i = a_i^k y_k \quad \text{und} \quad y_k = \tilde{a}_k^l \tilde{y}_l \quad (I.1)$$

Das Einsetzen von  $y_k$  in  $\tilde{y}_i$  und die skalare Multiplikation mit der kontravarianten Basis  $\tilde{y}^l$  (s. Glg. (4. )) liefert den Zusammenhang

$$\tilde{y}_i \cdot \tilde{y}^l = a_i^k \tilde{a}_k^l \tilde{y}_l \cdot \tilde{y}^l = \delta_i^l ,$$

also

$$\delta_i^l = a_i^k \tilde{a}_k^l . \quad (I.2)$$

Analog wird ebenso  $\delta_i^l = \tilde{a}_i^k a_k^l$

Für die kontravarianten Basen läßt sich entsprechend ansetzen

$$\tilde{y}^i = \tilde{b}_k^i y^k \quad \text{und} \quad y^i = b_k^i \tilde{y}^k .$$

Welche Verbindung zwischen den Transformationsmatrizen  $a_k^i$  und  $b_k^i$  besteht, zeigen die skalaren Produkte. Z.B. wird

$$y^i \cdot y_k = \delta_k^i = b_m^i \tilde{y}^m \cdot \tilde{a}_k^l \tilde{y}_l = b_m^i \tilde{a}_k^l \delta_l^m = b_m^i \tilde{a}_k^m .$$

Das Einsetzen von (I.2) liefert

$$\tilde{a}_k^m a_m^i = b_m^i \tilde{a}_k^m \quad \text{also} \quad a_m^i = b_m^i . \quad (I.3)$$

Entsprechend erhält man aus

$$\tilde{y}^0 \cdot \tilde{y}_l = \delta_l^0 = \tilde{b}_p^0 y^p \cdot a_l^s y_s = \tilde{b}_p^0 a_l^s \delta_s^p = \tilde{b}_p^0 a_l^p \\ \tilde{a}_m^i = \tilde{b}_m^i . \quad (I.3)$$

Invariante Größen-hier der Tensor erster Stufe-lassen sich in den verschiedenen Basissystemen darstellen als

$$\tau^{(1)} = \tilde{t}^i \tilde{y}_i = \tilde{t}_i \tilde{y}^i = t^i y_i = t_i y^i .$$

Aus

$$\tilde{t}^i \tilde{y}_i = t^i y_i = t^i \tilde{a}_i^l \tilde{y}_l = t^l \tilde{a}_l^i \tilde{y}_i$$

ergibt sich dann leicht  $\tilde{t}^i = \tilde{a}_l^i t^l$  (I.4)

Ebenso finden wir beim Einsetzen der anderen Transformationsgesetze

$$\tilde{t}_i = a_i^k t_k , \quad t_i = \tilde{a}_i^k \tilde{t}_k , \quad t^i = a_k^i \tilde{t}^k . \quad (I.4)$$

Wir sehen, daß sich die Komponenten wie die Basis transformieren!

Für die Tensoren zweiter Stufe erhält man die Darstellungen

$$\tau^{(2)} = \tilde{t}^{ij} \tilde{y}_i \tilde{y}_j = \tilde{t}_{ij} \tilde{y}^i \tilde{y}^j = t^{ij} y_i y_j = t_{ij} y^i y^j , \\ = \tilde{t}^i_j \tilde{y}_i \tilde{y}^j = \tilde{t}_i^j \tilde{y}^i \tilde{y}_j = t^i_j y_i y^j = t_i^j y^i y_j .$$

Hier finden wir entsprechend nach Austausch der Summationsindizes

$$\begin{aligned} \tilde{t}^{ij} \tilde{y}_i \tilde{y}_j &= t^{ij} y_i y_j = t^{ij} \tilde{a}_i^l \tilde{y}_l \tilde{a}_j^m \tilde{y}_m = t^{lm} \tilde{a}_l^i \tilde{a}_m^j \tilde{y}_i \tilde{y}_j \\ \tilde{t}^{ij} &= \tilde{a}_l^i \tilde{a}_m^j t^{lm} \end{aligned} \quad (I.5)$$

Für die restlichen kontra- bzw. kovarianten Komponenten gelten ähnlich

$$\tilde{t}_{ij} = \underline{a}_i^l \underline{a}_j^m t_{lm}, \quad t_{ij} = \tilde{a}_i^l \tilde{a}_j^m \tilde{t}_{lm}, \quad t^{ij} = \underline{a}_i^l \underline{a}_j^m \tilde{t}^{lm} \quad (I.5)$$

und für die gemischtvarianten Komponenten

$$t_j^i = \underline{a}_k^i \tilde{a}_j^k \tilde{t}^k_l, \quad \tilde{t}^i_j = \tilde{a}_k^i \underline{a}_j^k t^k_l, \quad t_i^j = \tilde{a}_i^k \underline{a}_k^l \tilde{t}_l^j, \quad \tilde{t}_i^j = \underline{a}_i^k \tilde{a}_k^l t_l^j. \quad (I.5)$$

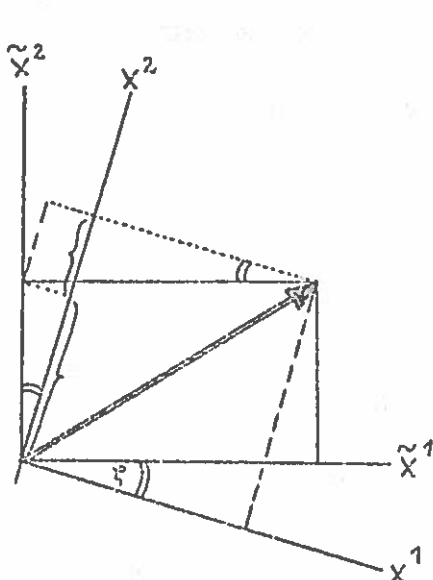
Auf demselben Wege lassen sich natürlich die Transformationsgesetze für den Tensor n-ter Stufe ermitteln. Als Beispiele hierfür mögen genügen [Klingbeil]

$$\begin{aligned} \tilde{t}^{ijkl} &= \tilde{a}_m^i \tilde{a}_n^j \tilde{a}_p^k \tilde{a}_q^l t^{mnpq} \\ \tilde{t}^{ij}_k{}^l &= \tilde{a}_m^i \tilde{a}_n^j \underline{a}_k^p \tilde{a}_q^l t^{mn}_p{}^q \\ t_{ij}{}^{kl} &= \tilde{a}_i^m \tilde{a}_j^n \underline{a}_p^k \underline{a}_q^l \tilde{t}_{mn}{}^{pq} \end{aligned} \quad (I.5)$$

Zum Schluß sollen noch die verschiedenen Transformationsmatrizen bei Drehungen und Spiegelungen angegeben werden. Ihre allgemeine Form ist

$$[\tilde{a}] = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1^1 & \tilde{a}_2^1 & \tilde{a}_3^1 \\ \tilde{a}_1^2 & \tilde{a}_2^2 & \tilde{a}_3^2 \\ \tilde{a}_1^3 & \tilde{a}_2^3 & \tilde{a}_3^3 \end{bmatrix}, \quad [\underline{a}] = [\tilde{a}]^{-1}. \quad (I.7)$$

Bei Drehungen um die  $x^3$ -Achse z.B. sind die  $\tilde{a}_3^1 = \tilde{a}_3^2 = \tilde{a}_3^3 = \tilde{a}_2^3 = \tilde{a}_1^3 = 0$  bzw.  $\underline{a}_3^1 = \underline{a}_3^2 = \underline{a}_3^3 = \underline{a}_2^3 = 0$  und bei Spiegelungen zur  $x^1$ - $x^2$ -Ebene verschwinden zusätzlich die  $\tilde{a}_2^1 = \tilde{a}_1^2 = 0$  bzw.  $\underline{a}_2^1 = \underline{a}_1^2 = 0$ .



$$(\tilde{a}) = \begin{bmatrix} \cos \xi & -\sin \xi & 0 \\ \sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I.8)$$

$$|\tilde{a}| = \det \tilde{a}_k^i = +1$$

bei Rotation

# ANHANG II

## Begriffserläuterungen

**ADHÄSION:** Zustand, bei dem zwei Oberflächen durch Kräfte in ihrer Zwischenfläche zusammengehalten werden.

**ADHÄSIVBRUCH:** "Bruch" an Faser/Harz-Grenzflächen bzw. an Faser/Haftmittel/Harz-Grenzflächen.

**ÄQUATOR:** Übergang vom Zylinderbereich zum Bodenbereich eines Behälters.

**ALTERN:** Der zeitliche Einfluß der Umgebung auf Materialeigenschaften.

**ANISOTROPIE:** Elastischer Zustand, in dem in verschiedenen Richtungen unterschiedliche elastische Eigenschaften vorliegen.

**AUSNUTZUNGSGRAD:** Beispielsweise bei der Faserfestigkeit das Verhältnis zweier miteinander zu vergleichender Zustandsfestigkeiten, wie Faserfestigkeit im Strang zur Einzelfaserfestigkeit (jeweils Mittelwerte) oder mittleren Festigkeit nach der Spinnöse.

**AXIALWICKLUNG:** Wickelverfahren, bei dem die Fasern parallel zur Achse abgelegt werden.

**BESCHLEUNIGER:** Eine Substanz, die die chemische Reaktion zwischen Katalysator und Harz beschleunigt.

**BIDIREKTIONALER VERBUND:** (abgek. BDV) Verbund, der aus zwei Laminaten (oder auch Schichten) mit unterschiedlichen Faserorientierungswinkeln besteht.

**DELAMINATION:** Trennung zwischen den einzelnen Schichten (Lagen, engl. laminae) eines Laminates (engl. laminate).

**DENIER:** Ein Numerierungssystem für Elementarfäden und Spinnfäden (Garn, engl. yarn), dessen Zahl das Gewicht in Gramm von 9000 m Länge Elementar- bzw. Spinnfaden ist. Je kleiner die Zahl, desto feiner das Produkt.

**DOM (auch Boden genannt):** Endteil eines gewickelten Behälters.

**DOPPLER:** Verstärkung (z.B. an Ausschnitten).

**DUROMER:** Dreidimensionaler vernetzter makromolekularer Kunststoff, der unter Temperatureinfluß nicht schmilzt.

**DYNAMISCHER MODUL:** Das Verhältnis von Spannung zu Verzerrung unter Schwingungsbedingungen.

**EIGENSPANNUNGEN:** Innere Spannungen (Gleichgewichtszustand), die z.B. infolge Temperatur in den unterschiedlich reagierenden Komponenten eines Verbundes hervorgerufen werden.

**ELASTIZITÄTSMODUL:** Das Verhältnis von Spannung zu Verzerrung unterhalb der Proportionalitätsgrenze.

**(ELEMENTAR-) FADEN:** Endlosfaser .



ENDE: (engl. end): Spinnfaden

EPOXIDHARZ: Vernetzungsprodukte von kettenförmigen Verbindungen, die durch die Reaktion von Epichlorhydrin mit aromatischen Dioxydverbindungen entstehen. Es sind Duromere.

ERMÜDUNG: Der Abfall der mechanischen Eigenschaften bei wiederholter Belastung.

FASER (engl. fiber): Endlicher Faden größerer Länge. Längen zu Durchmesser Verhältnis größer 10:1 (laut ASTM-Vereinbarung).

FASERVOLUMENANTEIL: Anteil der Fasern am Volumen des Verbundes (außer Harz- und Luftanteil); ein Wert, der etliche Informationen über den Verbund in sich birgt.

FILAMENTWINDING (engl.): Drückt nichts weiter als die reine Übersetzung Wickelverfahren aus.

FILZ: Flächiges Gebilde aus nichtorientierten langen Fasern (Fäden).

FINISH (dt. Haftvermittler): Mittel zur Endbehandlung der Oberfläche von Fasern, um bessere Verbundeigenschaften (z.B. Verringerung des Festigkeitsverlustes an Harz/Glas-Grenzfläche) zu erhalten.

FLEXIBILISATOREN (dt. Wächmacher): Dienen zum Erniedrigen der Sprödigkeit des Reaktionsharzes (innere oder äußere Wächmachung verschiebt die Einfriertemperatur in den Bereich niedrigerer Temperatur).

FLIESSGRENZE: Grenze, bei der der Werkstoff eine bestimmte plastische Deformation erfährt. Bei der zumeist gebräuchlichen  $\sigma_{0,2}$ -Grenze beträgt die bleibende plastische Dehnung 0,2 Prozent.

GARN (engl. yarn): Gesponnener Faden aus Stapelfasern oder aus gedrehten Fasern. In der englischen Literatur die kleinste Einheit an Fadenbündel mit dem man hantieren kann.

GEODÄTISCHE FADENABLAGE: Die Fadenablage erfolgt auf einer geodätischen Linie, d.b. der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten auf einer Schale.

GEWEBE: Auf Webmaschinen hergestellte Bahnen, die aus mindestens zwei Fadensystemen (Kette und Schuß) bestehen und deren Fäden in einer bestimmten Bindungsart (z.B. Leinwand-, Köper-, Atlasbindung) rechtwinklig miteinander verkreuzt sind.

HÄRTER: Eine Substanz, die dem Harz beigemischt wird, um den Härungsprozess einzuleiten, zu fördern und zu kontrollieren.

HÄRTUNG: Vorgang, bei dem die Vernetzung erfolgt.

HARZSYSTEM: Es besteht aus drei Komponenten: dem Reaktionsharz, dem Verdünner und dem Härter.

INHIBITOR: Eine Substanz, die die chemische Reaktion (z.B. Polymerisation) zurückhält, so daß sich die Lager- oder Verarbeitungszeit verlängern läßt.

INTERFACE (engl.): Der Verbindungspunkt oder die Kontaktfläche (Grenzfläche) zwischen zwei Medien oder Strukturteilen.

**INTERLAMINARE SCHUBSPANNUNG:** Schubspannung zwischen den einzelnen Schichten eines Laminates.

**ISOTENSOID:** Faserverbundkörper, bei dem (nach der Netztheorie ausgelegt) alle Fasern an jeder beliebigen Stelle dieselbe Beanspruchung erfahren.

**KALTHÄRTENDES HARZSYSTEM:** Harzsysteme, die unterhalb 50°C aushärten.

**KOHÄSION:** Innerer Zusammenhalt bedingt durch molekulare Kräfte.

**KOHÄSIVBRUCH:** a) Bruch der Faser b) Bruch des Harzes.

**KONTINUUMSTHEORIE:** Nichts weiter als die übliche Elastizitätstheorie. In der Verbundtheorie als Schlagwort gegenüber der Netztheorie für die Elastizitätstheorie zweidimensionaler Verbundstrukturen benutzt.

**KREUZVERBUND:** Faserverbund, der aus zwei oder mehr Lagen besteht, mit zwei aufeinander senkrecht stehenden Faser-Orientierungen.

**KRIECHEN:** Änderung der Abmessungen eines Körpers unter zeitlich andauernder Last.

**KUNSTSTOFFE:** Synthetisch hergestellte Werkstoffe, die hauptsächlich aus Kohlenstoff enthaltenden Kettenmolekülen bestehen.

**LAGERZEIT:** Diejenige Zeit, die ein Harzsystem aufbewahrt werden kann unter einer speziellen Temperatur, so daß es noch verwendungsfähig bleibt.

**LAMINAT:** Ein sich aus mehreren Schichten aufbauender Verbund-Mehrschichtenverbund.

**LINER(engl.):** Metallische oder organische Auskleidung eines Behälters zum Schutz gegen chemischen Angriff des Füllmediums bzw. gegen Undichtwerden des Behälters unter Innendruck.

**MATRIX:** Internationale Bezeichnung für Bettungsmasse; Beispiele sind Alu-Matrix, Harzmatrix.

**MATTE:** Faseriges Material aus regellos orientierten bzw. geschichteten Kurzfasern.

**(MONO) FILAMENT:** Praktisch einzelne Endlosfaser bzw. Einzelfaden, auch Elementarfaden genannt.

**MONOMER:** (z.B. Styrol ) Ein Molekül, das mit gleichen oder ähnlichen Molekülen reagiert und damit ein Polymer aufbaut.

**NACHHÄRTUNG:** Dient zur optimalen Aushärtung des Harzsystems; kann mit und ohne Temperaturerhöhung vorgenommen werden.

**NETZTHEORIE:** Diejenige Theorie von zweidimensionalen Faserverbundstrukturen, bei der die Fasern allein tragend angenommen werden und die Lastaufnahme der Matrix Null gesetzt wird. Dabei sollen die Fasern nur Zugspannungen erhalten. Mit der Netztheorie ausgelegte Schalen besitzen theoretisch keine Biege- und Schubsteifigkeit und ertragen nur Membranbeanspruchungen.

**NOL-RING:** Ein aus Fäden wafengewickelter Ring zur Feststellung mechanischer Verbund-Kenngrößen; verwendet als voller Ring oder segmentiert.

**OBERFLÄCHENBEHANDLUNG:** Hierbei wird mit einem chemischen Mittel die Oberfläche von Fasern zur Erzielung verbesserter Verbundqualität behandelt.

**ORGANISCH:** Aus natürlich oder synthetischen Kohlenstoffverbindungen bestehend.

**ORTHOTROPIE:** Abkürzung für orthogonale Anisotropie.

**OVALOIDBODEN:** Kennzeichnet Bodenformen, die runder sind als Isotensoiden und nicht planar oder isotensoidisch ausgelegt wurden.

**PACKUNGSDICHTE:** Funktion der Lagerungsart und -dichte der Fasern im Verbund.

**PLANARE FADENABLAGE:** Die Fadenablage erfolgt theoretisch in einer Ebene des rotationssymmetrischen Wickelkörpers.

**PLANAROIDBODEN:** Wie ein Isotensoidboden nach der Netztheorie ausgelegt. Statt der Forderung nach gleicher Spannung in den Fasern wird aber nun die geometrische Forderung - Ablage der Fasern in einer Ebene - berücksichtigt.

**POLYAMID :** Ein Polymer, bei dem die Baueinheiten durch Amide oder Thioamid-Gruppen verbunden werden. Manche Polyamide erhalten faserförmige Erstreckung.

**POLYIMID:** Ein hitzebeständiges Polymer (Dauergebrauchstemperatur 250°C); eignet sich als Matrix und als Verklebungsmittel.

**POLYMER:** Eine organische Verbindung von hohem Molekulargewicht. Verbindung kann ein Naturprodukt sein oder synthetisch aus Monomeren aufgebaut worden sein.

**POLYMERISATION:** Eine chemische Reaktion ohne Abspaltung von niedermolekularen Nebenprodukten, bei der Monomere zu Kettenmolekülen mit hohem Molekulargewicht verbunden werden.

**REAKTIONSHARZE:** Bezeichnung der Kunstharztypen Duromere und Thermomere als Reaktionskomponente des Harzsystems. Der Begriff Harz allein wird auf naturharzähnliche Stoffe beschränkt. Reaktionsharze sind zumeist bei RT flüssig.

**REISSLÄNGE (auch spezifische Festigkeit genannt):** Der Quotient aus Bruchspannung zu spezifischem Gewicht eines Materials. Die Reißlänge ist anschaulich diejenige Länge eines Stabes, bei der er unter Eigengewicht (Erdbeschleunigung) reißt.

**SANDWICH KONSTRUKTION:** Tragkonstruktion aus Kern- und Deckschichten zur Erzielung großer Steifigkeit. Das Kernmaterial ist spezifisch äußerst leicht und das Deckschichtmaterial sehr steif und fest.

**SEIDE:** Name, der in Verbindung mit Endlosfasern (Fäden) aus Glas benutzt wird. Nicht versponnene aus geschmolzenem Glas gezogene Elementarfasern.

**(SEIDEN)ROVING:** Bündel aus unverdrallten Spinnfäden oder verdrallten Garnen.

**SEKANTENMODUL:** Derjenige Modul, der sich als Verhältnis von tatsächlich erreichter Spannung zu erreichter Verzerrung ergibt.

**SPANNUNGSINTENSITÄTSFAKTOR:** Entspricht Bruchzähigkeit (engl. Fracture Toughness) in der Bruchmechanik. Er ist von der äußeren Last und der Rißlänge abhängig.

**SPANNUNGSKONZENTRATIONSFAKTOR:** Das Verhältnis der Maximalspannung im gestörten Bereich zur Maximalspannung im ungestörtem Bereich; Beispiel: Zugstab mit und ohne Kerbe.

**SPANNUNGSRELAXATION:** Der Spannungsabfall unter konstanter Dehnung..

**SPINNFADEN** oder Ende (engl. end, standard strand): Bestimmte Anzahl von Endlosfasern. (Faser) Strang als Arbeitseinheit ist allgemeiner.

**SCHLICHTEN:** Mittel zum Schutz der Fasern vor Beschädigung, manchmal zur Verbesserung der interlaminaeren Scherfestigkeit des Verbundes.

**SCHRUMPFUNG:** Größenänderung des Verbundes, die beim Entformen bei Raumtemperatur gegenüber der Formgröße bei der Aushärtungstemperatur festgestellt wird.

**STAPELFASER:** Faser von kurzer Länge (i.a. kleiner als 50 mm). Sie wird direkt hergestellt, oder man erhält sie durch Schneiden von Spinnfäden.

**STRANGFESTIGKEIT:** Die im Zugversuch ermittelte nutzbare Faserfestigkeit des untersuchten Rovings.

**TANGENTENMODUL:** Derjenige Modul, der in jedem Punkt einer Spannungs-Verzerrungskurve durch Anlegen der Tangente ermittelt werden kann.

**TEILUNGSZAHL:** Kennzahl beim Behälterwickeln, die das Wickelmuster festlegt.

**TEX:** Zahlenwert des Gewichtes in Gramm je km Länge eines Rovings oder eines Spinnfadens. Zum Beispiel: Bei 10 m Filamentdurchmesser eines E-Glasfadens und bei 40 Tex-Standardspinnfäden ergibt sich 60-fach zusammengesputt ein 60 end-Roving von 2400 Tex. Darstellung der Faserfeinheit im internationalen Tex-System (DIN 60910).

**THERMOMERE:** Harze, die sich aus linearen, unvernetzten Makromolekülen aufbauen und bei Erwärmung erwichen.

**THERMOPLAST:** Werkstoff aus nichtvernetzten Kettenmolekülen, der in der Wärme (in der Regel) mehrmals formbar ist.

**TOPF:** Harztränkbad, aber auch Behälter für Rovings.

**TOPFZEIT:** Diejenige Zeitdauer, bei der das mit Katalysatoren versehene Harz so viskos bleibt, daß es verarbeitet werden kann (also Verarbeitungszeit).

**TOW** (engl.): Dicker Faserstrang, z.B. Wickelband bzw. Wickelstrang, aus Tausenden von Elementarfasern.

**TROCKENWICKELN:** Ausdruck für das Wickeln mit vorimprägnierten Rovings. Im Unterschied zum Naßwickeln, bei dem der nicht imprägnierte Roving durch ein Harzbad gezogen wird.

UNGESÄTTIGTES POLYESTERHARZ: Kondensationsprodukt aus zweiwertigen Alkoholen (Glykolen) mit Dicarbonsäuren. Die UP-Harze werden in flüssigem Zustand angeliefert. Bei der Verarbeitung entsteht durch dreidimensionale Vernetzung das Duromer.

VERBUND: Ein heterogener, aus zwei oder mehreren homogenen Materialien aufgebauter Werkstoff zur Erzielung bestimmter Eigenschaften. Sonderfall: Faser-Verbund, zu dem hier i.a. nur Verbund gesagt wird.

VERDÜNNER: Dienen zur Erleichterung der Verarbeitung des Harzsystems. Werden bei der Härtung mit ins Netzwerk eingebaut.

VISKOSITÄT: Widerstand, den ein Stoff dem Fließen entgegensetzt. Je größer der Wert, desto steifer der Stoff.

WICKELBAND (engl. tape): Die Gesamtheit aller Rovings, die gleichzeitig miteinander verwickelt werden.

(WICKEL)DORN (engl. mandrel): Öfters auch Kern genannt, der - als Innenform - zur Herstellung von Rohren, Behältern etc. benutzt wird.

WICKELMUSTER: Muster, das sich beim Wickeln nach Ablage von Wickelband neben Wickelband nach voller Überdeckung des Kernes ergibt.

WICKELZUG: Zugkraft, die am Wickelband vor Ablage auf den Wickelkörper gemessen wird.

ZÄHIGKEIT: Keine Bruchmechanikgröße, sondern die Arbeit, die beim Erreichen der Bruchdehnung als Fläche unter der Spannung-Dehnungs-Linie einer ungerissenen Probe vorliegt.

ZWIRN: Zusammengedrehtes Garn.